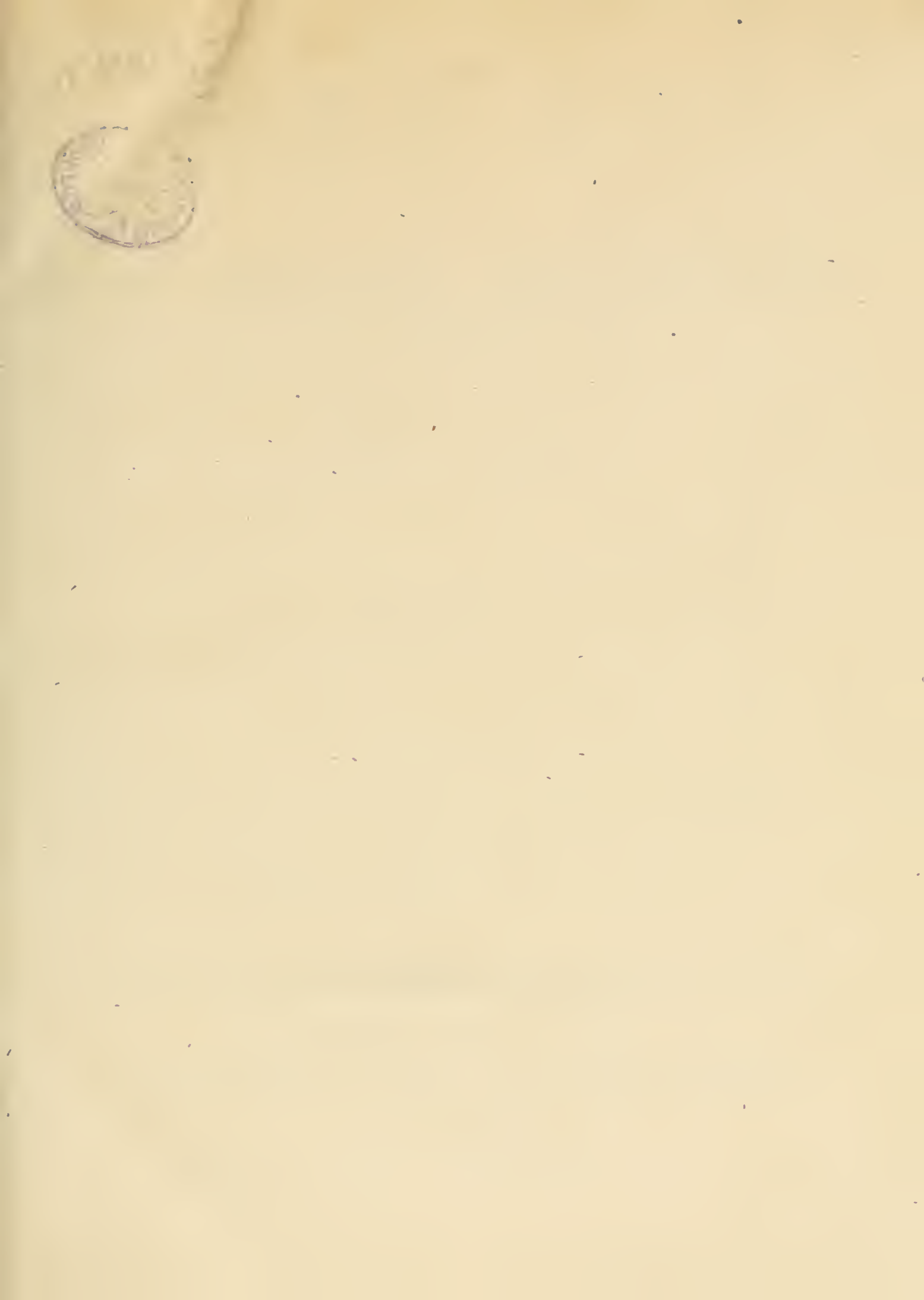








MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE

DES SCIENCES

DE

ST. PÉTERSBOURG.

TOME VII.

AVEC

L'HISTOIRE DE L'ACADÉMIE

POUR LES ANNÉES 1815 ET 1816.

ST. PÉTERSBOURG,

DE L'IMPRIMERIE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

1820.

Publié par ordre de l'Académie, et avec l'obligation d'envoyer, où il convient, le nombre d'exemplaires fixé par la loi.

N. Fuſs

Secrétaire perpétuel.

TABLE DES MATIÈRES.

Histoire de l'Académie *Impériale* des Sciences.

Années 1815 et 1816.

*

MÉMOIRES
DE L'ACADÉMIE *IMPÉRIALE* DES SCIENCES.

I. Section des sciences mathématiques.

II. Section des sciences physiques.

III. Section des sciences politiques.

IV. Section d'Histoire et de Philologie.

HISTOIRE

DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE

DES SCIENCES.

ANNÉES 1815 ET 1816.

HISTOIRE

DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

Années 1815 et 1816.

I.

EVÈNEMENS MÉMORABLES.

Le Secrétaire lut une Communication adressée à l'Académie par Mgr. le Ministre du Culte, Prince *Alexandre Golitzyn*, qui fait savoir qu'ayant été nommé très-gracieusement à faire les fonctions du Ministre de l'Instruction qui vient d'obtenir sa dimission, l'Académie doit s'adresser directement à Son Excellence, pour les affaires qui concernent ce Ministère.

Mécredi, 13 Septembre 1816, Mgr. le Prince *Golitzyn*, en fonction de Ministre de l'Instruction, vint visiter l'Académie à 10 heures du matin. M^{rs}. les Académiciens, assemblés dans la salle de la bibliothèque, reçurent Son Excellence, et le Secrétaire eut l'honneur de Lui présenter ceux qui ne Lui étoient pas encore connus personnellement. Mgr. le Ministre visita successivement la Bibliothèque, le Muséum d'Histoire naturelle, les Cabinets d'Anatomie, de Minéralogie, de Physique, de Curiosités, celui de *Pierre le Grand*, le Médailler, l'Observatoire, le grand Globe de Gottorp, le Comité d'Administration, la Salle des Conférences et l'Archive, et quitta l'Académie à 2 heures, en témoignant aux Académiciens sa satis-

faction du bon ordre, ainsi que ses regrèts de ce que des collections aussi précieuses et instructives n'eussent pas un Local assez spacieux, pour être exposées avec tout l'avantage qui convient au nombre et à la beauté des objèts qui les composent.

II.

CHANGEMENS ARRIVÉS DANS L'ACADÉMIE.

1) Membres décédés.

Académicien extraordinaire:

Mr. *Thimothée Smélovski*, Professeur de Pharmacie et Académicien de l'Académie IMPÉRIALE de Médécine et de Chirurgie, Membre de la Société libre économique, Conseiller de Collège et Chevalier de l'ordre de St. Vladimir du 4e. degré, décéda le 21 Octobre 1815, dans la 46e. année de son âge; à la suite d'une apoplexie abdominale. Le Défunt fut reçu Adjoint de l'Académie pour la Botanique le 19 Mai 1802 et Académicien extraordinaire le 14 Août 1803.

Membres honoraires de l'Intérieur:

Mr. *Bénoit François Jéan Hermann*, Capitaine en Chef des Mines de la 4me classe et Chevalier de l'ordre de Ste. Anne de la 1re classe, mourût à St. Pétersbourg le 31 Janvier 1815, dans la 61me année de son âge. Le Défunt avoit été agrégé le 9 Janvier 1786 et avoit exercé les fonctions d'Académicien effectif depuis 1796 jusqu'en 1801.

S. E. Mr. le Comte *Jean Potozki*, Conseiller privé, Membre du Collège des Affaires étrangères, Chevalier de l'ordre de St. Vladimir de la 2de classe, de l'Aigle blanc et de Stanislas. Le Defunt avoit été élu Membre honoraire le 29 Janvier 1806, et mourût à Tulczine en Podolie en Janvier 1816.

Membres honoraires externes :

Mr. *Thomas Bugge*, Conseiller de Justice de S. M. le Roi de Danemark, Membre et Secrétaire perpétuel de la Société Royale des Sciences de Copenhague, Directeur de son Observatoire et du Bureau des Longitudes, Chevalier de l'ordre de Danebrog, mourût le 15 Janvier 1815, dans la 74me année de son âge. Le Défunt avoit été reçu le 5 Octobre 1803.

Mr. *Everard Auguste Guillaume* de *Zimmermann*, Conseiller d'Etat privé de S. A. S. Mgr. le Duc de Brunswik, Directeur du Gymnase illustre Ducal, connu sous le nom de Carolinum etc., décéda à Brunswik le 4 Juillet 1815. Le Défunt avoit été reçu au nombre des Honoraires de l'Académie le 28 Juillet 1794, et au nombre des pensionnaires, à la suite d'un ordre spéciel de feu l'*Empéreur Paul I.* de glorieuse mémoire, le 1 Octobre 1797.

Mr. *Abel Burja*, Professeur de Mathématiques de l'Académie militaire et membre de l'Académie Royale des Sciences de Berlin, etc. décéda à Berlin le 16 Févier 1816, dans la 64me année de son âge. Le Défunt avoit été reçu le 28 Juillet 1794.

Mr. *Laurent Florentin Fréderic* de *Crell*, Conseiller de Cour de S. M. le Roi d'Hannovre, et Professeur de Médecine à l'Université de Göttingue, mourût le 7 Juin 1816, agé de 73 ans. Le Défunt avoit été reçu le 23 Octobre 1786.

Correspondans de l'Intérieur:

Mr. *Jean George André Brückner*, Conseiller d'Etat. Le Défunt avoit été reçu le 13 Avril 1808.

Mr. *Pierre Changuine*, Conseiller des Mines à Barnaoul, Chevalier de l'ordre de St. Vladimir de la 4e. classe, mort à Barnaoul le 3 Juin 1816 dans la 75e. année de son âge. Le Défunt avoit été reçu Correspondant de l'Académie, le 31 Août 1795.

Mr. *Léon* de *Waxell*, Colonnel des Ingénieurs des voyes de Communication, mort le 6 Septembre 1816. Le Defunt avoit été reçu Correspondant le 29 Février 1804.

Correspondans externes:

Mr. *Eugène Melchior Louis Patrin*, Correspondant de l'Académie depuis 1779.

Mr. le Docteur *Jean Jérome Schroeter*, Conseiller de Justice de S. M. Britannique, Grand-Baillif à Lilienthal dans le Royaume d'Hannovre et Chevalier; membre de plusieurs Académies, mort à Lilienthal le 29 Août 1816, agé de 71 ans. Le Défunt avoit été reçu au nombre de Correspondans le 28 Juillet 1794.

2) Nouvelles réceptions.

a. *Académiciens ordinaires:*

Mr. *Vincent Wisnievski*, pour l'Astronomie, élu le 15 Février 1815.

Mr. *Alexandre Nicolas Schérer*, pour la Chymie, élu le 16 Août 1815.

Mr. *Philippe Krug*, pour l'Histoire, élu le 16 Août 1815.

Mr. *Basile Petroff*, pour la Physique expérimentale, élu le 16 Août 1815.

b. *Membre honoraire de l'Intérieur:*

S. E. Mr. *Alexandre Khvostoff*, Conseiller privé, Chef de la Banque IMPÉRIALE, Membre de l'Académie IMPÉRIALE Russe et Chevalier; reçu le 8 Mars 1815.

c. *Membres honoraires externes:*

S. E. Sir *Gore Ouseley*, Baronet, Ambassadeur extraordinaire de S. M. Britannique à la Cour de Perse; reçu le 8 Mars 1815.

Mr. le Major *James Rennel*, Membre de la Société Royale des Sciences de Londres et de l'Institut de France; reçu le 4 Octobre 1815.

Mr. *Simonde* de *Sismondi*, Membre du Conseil de Commerce, Arts et Agriculture du Canton de Léman, à Genève; reçu le 26 Juin 1816.

Mr. *Jean Baptiste Say*, ancien Membre du Tribunat, Professeur d'Economie politique à l'Athénée Royal de Paris; reçu le 26 Juin 1816.

d. *Correspondans de l'Intérieur:*

Mr. le Docteur *Chrétien Steven*, Conseiller de Collèges, Sur-Intendant des établissemens de la Couronne pour la Culture des soyes, Chevalier de l'ordre de St. Vladimir du 4e. degré; reçu le 22 Février 1815.

Mr. *Alexis* de *Maïroff*, Colonnel des Ingénieurs de la Suite de SA MAJESTÉ L'EMPEREUR, Chevalier de l'ordre de St. George du 4me degré et de St. Vladimir 4e. classe; reçu le 23 Août 1815.

Mr. le Docteur *Maurice* d'*Engelhardt*, Gentilhomme Livonien; élu le 31 Janvier 1816.

Mr. *Michel Buldakoff*, Conseiller de Cour, Directeur de la Régence de la Compagnie Russe-Américaine, et Chevalier de l'ordre de St. Vladimir du 4e. degré; élu le 31 Janvier 1816.

Mr. *Fréderic Parrot*, Docteur en Médecine et Chirurgie; élu le 11 Septembre 1816.

Mr. *Chrétien* de *Beck*, Conseiller d'Etat actuel et Chevalier; élu le 27 Novembre 1816.

e. *Correspondans externes:*

Mr. le Baron d'*Eschwegue*, Lieutenant-Colonnel au Service du Roi de Portugal; reçu le 22 Février 1815.

Mr. *Auguste* de *Kotzebue*, Conseiller d'Etat et Chevalier, Consul-général à Königsberg, Membre de l'Académie Royale des Sciences de Berlin; reçu le 4 Octobre 1815.

Mr. *Henry* de *Struvé*, Conseiller de Collèges et Chevalier, Chargé des Affaires de SA MAJESTÉ IMPÉRIALE près des villes hanséatiques; élu le 31 Janvier 1816.

f. *Au nombre des Elèves:*

Le Pensionnaire de l'Académie, Mr. *Paul Fuſs*, pour les Mathématiques; reçu le 1 Février 1815.

3) Election de membres du Comité d'Administration:

Mr. l'Academicien *Severguine*, pour deux ans, à la place de Mr. l'Académicien *Schubert*; élu le 16 Août 1815.

Mr. l'Académicien *Schubert*, pour deux ans, à la place de S. E. Mr. l'Académicien *Fuſs;* élu le 14 Août 1816.

4) Gratifications, Décorations et Avancemens civils:

Mr. l'Académicien extraordinaire *Herrmann* notifia: que par un Oukaze SUPRÊME, daté du 17 Février 1816, SA MAJESTÉ L'EMPÉREUR a daigné très-gracieusement l'avancer au rang de Conseiller d'Etat, en sa qualité de Chef du Bureau statistique auprès du Ministère de la Police.

Mr. l'Académicien *Storch* notifia, qu'ayant fait présenter des exemplaires de son Cours d'Économie politique à L. L. M. M. le Roi de France et le Roi de Prusse, il a reçu de ces Souverains deux beaux cadeaux: du premier un Solitaire de 3000 Roubles, et du second une bague de 1000 Roubles de valeur.

Mr. l'Académicien *Zagorski* remit une copie d'un Oukaze SUPRÊME, daté du 4 Septembre 1816, par lequel lui et Mr. l'Académicien *Pétroff*, en leur qualité d'Académiciens de l'Académie IMPÉRIALE de Médecine et de Chirurgie, ont été avancés au rang de Conseillers d'Etat, avec l'ancienneté fixée par la loi.

Son Excellence Mgr. le Ministre en fonction fit savoir à l'Académie que sur sa représentation, SA MAJESTÉ L'EMPÉREUR, par un Oukaze donné le 9 Décembre 1816 au Chapître des ordres, a daigné très-gracieusement accorder à Mr. l'Académicien *Krug* l'ordre de S^te^. Anne de la 2de classe.

Mr. l'Académicien *Schubert* fut avancé, par un Oukaze SUPRÊME du 20 Décembre 1816, au rang de Conseiller d'Etat actuel.

Le Secrétaire notifia à la Conférence que Mr. l'Académicien extraordinaire *Herrmann*, en sa qualité de Professeur de l'Institut pédagogique, a obtenu la décoration de l'ordre de S^te^. Anne de la 2de classe.

5) Distinctions littéraires:

Mrs. les Académiciens *Fuſs* et *Schubert* furent reçus au nombre des Membres honoraires de l'Académie Américaine des Sciences et Arts à Boston en Massachusetts, en Novembre 1812.

Mr. l'Académicien extraordinaire *Schérer*, fut reçu membre honoraire de l'Université IMPÉRIALE de Vilna, le 15 Mai 1815.

S. E. Mr. l'Académicien *Fuſs* fut reçu par l'Académie Impériale et Royale des Sciences et Arts à Padoue au nombre de ses Membres honoraires externes le 16 Avril 1816.

III.

PRÉSENS FAITS À L'ACADÉMIE.

1) Pour la Bibliothèque:

De la part du Comité de Censure de l'Université IMPÉRIALE de Dorpat:

Cent - vingt - neuf dissertations et autres brochures imprimées dans son arrondissement.

De la part de l'Université IMPÉRIALE d'Abo:

1°) Les dissertations académiques qui ont été publiées à Abo dans le courant de l'année 1814.

2°) Orationes panegyricae trilingues, quibus paci Parisiis, die XVIII. Maii anno 1814 compositae, simulque Augusto orbis pacificatori *Alexandro I.* gratulabunda plausit Academia Aboensis. Aboae 1815. 4°.

3°) Tentamen mineralogico-chemicum de Pargasite; auctoribus Bonsdorff et Lindewall. Aboae. 1816. 4°.

De la part du Département IMPÉRIAL de l'Amirauté:

1°) Морскій мѣсяцословъ на лѣто 1816. С. П. бургъ 1815. 8°.

2°) Морскій мѣсяцословъ на лѣто 1817. С. П. бургъ 1816. 8°.

De la part de l'Académie Américaine des Sciences et Arts de Boston :

Memoirs of the American Academy of Arts and Sciences. Vol. III. Part. 1 et 2. Cambridge 1809 and 1815. 4°.

De la part de l'Académie Royale des Sciences de Stokholm :

1°) Kongl. Vetenskaps Academiens Handlingar, försten och sednare hälften of är 1814. Stokholm 1814. 8°.

2°) Kongl. Vetenskaps Akademiens Handlingar, for är 1815. Stokholm 1815. 8°. (en deux volumes.)

3°) Svensk Botanik, utgifven af. G. I. Billberg, med text föfattad af Oloff Swartz, Sjunde Bandet, Häftet 73 — 84. Stokholm 1812 — 1815. 8°. (Douze cahiers.)

De la part de la Société Royale vétérinaire de Copenhague :

Analyse des travaux de la Société Royale vétérinaire à Copenhague. 2d rapport. Copenhague 1815. 4°.

De la part de la Société des amis Scrutateurs de la nature à Berlin :

1°) Der Gesellschaft naturforschender Freunde Magazin für die neuesten Entdeckungen in der gesammten Naturkunde. VI. Jahrg. 4tes Quartal und VII. Jahrg. 1stes Quartal. Berlin 1814-1815. 4°.

2°) Der Gesellschaft naturforschender Freunde in Berlin, Magazin für die neuesten Entdeckungen in der gesammten Naturkunde. VII. Jahrg. 2tes und 3tes Quartal. Berlin 1815. 4°.

De la part de la Société Royale des Sciences de Londres :

Philosophical Transactions of the Royal Society of London, for the year 1814. Part 1 and 2. London 1814. 4°.

De la part de la Société Royale des Sciences d'Edinbourg :

Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Vol. VII. Part. 2. Edinbourg 1814. 4°.

De la part de l'Académie IMPÉRIALE Russe :

1°) Извѣстія Россійской Академіи. Книжка 1-я. С. П. бургѣ. 1815. 8°.

2°) Правила о употребленіи въ письмѣ буквы ѣ, собранныя П. С. С. П. бургѣ. 1815. 8°.

3°) Извѣстія Россійской Академіи, Книжка 2-я. С. П. бургѣ. 1816. 8°.

De la part de l'Académie Royale des Sciences de Munich :

1°) Denkschriften der königlichen Akademie der Wissenschaften zu München für das Jahr 1813. München 1814. 4°.

2°) Von den bisherigen Versuchen über längere Voraussicht der Witterung; von A. Ellinger. München 1815. 4°.

3°) Bruchstück einer Bairiscen Handelsgeschichte, aus der Regierung Herzog Ludwigs des Strengen, vom J. 1253 — 1294; von Karl H. v. Lang. München 1815. 4°.

4°) Ueber einige seltene und unbekannte Schaumünzen Herzogs Albert V; von E. I. Streber. München 1814. 4°.

5°) Ueber die Gottheiten von Samothrace; von L. W. Schelling. München 1815. 8°.

6°) Beiträge über den Einfluſs der Himmelskörper auf unsere Atmosphäre; von A. Ellinger. München 1814. 8°.

7°) Vorschläge zur Einrichtung einer Staatsverwaltung im Allgemeinen; von C. F. v. Wiebeking. München 1815. 8°.

8°) Ueber die leichtesten Methoden, hölzerne Brücken für den anrückenden Feind unbrauchbar zu machen. München 1813. 8°.

De la part de la Société Wernerienne établie à Edinbourg :

Memoirs of the Wernerian Natural History - Society. Vol. I. for the years 1811. 12. 13. Edinburgh 1811 et 1814. 8°.

De la part de l'Académie IMPÉRIALE de Médecine et de Chirurgie :

Всеобщiй Журналъ врачебной науки, издаваемый Императорскою Медико-Хирургическою Академiею. N°. I. II. С. П. бургъ 1816. 8°.

De la part de l'Académie Royale des Sciences de Göttingue :

Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gœttingensis recentiores. Vol. I. ad annos 1808—1811. Gœttingae 1811. 4°.

De la part de l'Académie Impériale et Royale des Sciences de Padoue :

Statuto della I. R. Accademia di Scienze, lettere ed arti di Padova, e Catalogo degli Accademici. Podova 1816. 4°.

De la part de l'Université IMPÉRIALE de Dorpat :

Praelectiones semestres, in Caesarea universitate litteraria, quae Dorpati constituta est, a Cal. Aug. anni MDCCCXVI habendae, indicuntur a Rectore et Senatu academico. Dorpati 1816. folio.

De la part de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin :

Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften in Berlin, aus den Jahren 1804 — 1811; nebst der Geschichte der Akademie aus diesem Zeitraum. Berlin 1815. 4°.

De la part de Mr. l'Academicien extraordinaire Langsdorff :

Bemerkungen auf einer Reise um die Welt in den Jahren 1803 — 1807; von G. H. v. Langsdorff, mit 17 Kupfern. Frankfurth a. M. 1812. 4°.

De la part de Mr. le Comte La Place :

Théorie analytique des probabilités; par Mr. le Comte La Place; 2de édition. Paris 1814. 4°.

De la part de Mr. le Professeur Gustave Ewers à Dorpat :

1°) Kritische Vorarbeiten zur Geschichte der Russen; 1tes und 2tes Buch; von Joh. Phil. Gustav Ewers. Dorpat 1814. 4°.

2°) Geschichte der Russen. Versuch eines Handbuchs; von Joh. Phil. G. Ewers. 1ter Theil. Dorpat 1816. 8°.

De la part de Mr. le Professeur Gadolin à Abo :

1°) О употребленіи горячихъ паровъ при винокуреніи. Сочиненіе И. Гадолина.

2°) Dissertationes Academicae, Historiam doctrinae de affinitatibus chemicis exhibentes. Abo 1815. 4°.

De la part de Mr. l'Académicien Zakharoff :

Desiderii Spreti, Historici Ravennatis de amplitudine, eversione et restauratione urbis Ravennae, libri tres, a Camillo Spreti in italicum idioma versi et notis illustrati. Vol. I. et voluminis II. Pars 1 et 2. Ravennae 1793 — 1796. 4°.

De la part de Mr. Jean Sniadecki, Recteur de l'Université de Wilna :

Pisma rozmaite Jana Sniadeckiego. Tom. 1 et 2. w Wilnie. 1814. 8°.

De la part de Mr. le Professeur Morgenstern à Dorpat :

1°) Dörptische Beyträge für Freunde der Philosophie, Litteratur und Kunst. Jahrg. 1814. 1te Hälfte. Dorpat 1816. 8°.

2°) Grundriſs einer Einleitung zur Aesthetik, mit Andeutungen zur Geschichte derselben; von Karl Morgenstern. Dorpat 1815. 8°.

3°) Praelectiones semestres in Caesarea Universitate litteraria, quae Dorpati constituta est, a Calend. Aug. anni 1815 habendae. Insunt C. Morgenstern Symbolae criticae in Platonis Politiam ab Astio denuo editam. Dorpati. folio.

4°) Dörptische Beyträge für Freunde der Philosophie, Litteratur und Kunst, von Carl Morgenstern. Jahrg. 1814. 2te Hälfte. Dorpat und Leipzig 1815. 8°.

De la part de Mr. le Professeur Stoïkovitch :

1°) Начальныя основанія Физической Географіи Аѳанасія Стойковича и пр. Харьковъ 1813. 8°.

2°) Система Физики, сочиненіе Аѳанасія Стойковича и пр. Книга I и II. Въ Харьковѣ 1813. 4°.

De la part de S. E. Mr. le Général d'Auvray :

Dictionnaire chinois, françois et latin, publié par Mr. de Guignes, Résident de France à la Chine. Paris 1813. gr. in folio.

De la part de Mr. le Docteur Wollaston :

1°) On the elementary particles of certain cristals.

2°) On a method of freezing at a distance.

3°) On a method of drawing extremely fine wires, and a description of a single lens micrometre.

4°) On a periscopic Camera obscura and microscope.

5°) On a synoptic scale of chemical equivalents.

De la part de Sir Humphry Davy :

1°) Some experiments on a new substance, which becomes a violet coloured gas by heat.

2°) An account of some new experiments on the fluoric compounds.

De la part de S. E. Mr. le Conseiller d'Etat actuel d'Ouvaroff :

Essai sur les mystères de l'Eleusis. St. Pétersbourg 1815. 8°.

De la part de Mr. le Conseiller privé Léonhard à Hanau :

1°) Taschenbuch für die gesammte Mineralogie, mit Hinsicht auf die neuesten Entdeckungen. VIII Jahrg. 2te Abtheilung. Frankfurth a. M. 1814. 8°.

2°) IX Jahrgang 1te u. 2te Abtheilung. Frankf. a. M. 1815. 8°.

3°) Darstellung der Farben als äufseres Kennzeichen der Naturkörper.

De la part de Mr. le Conseiller de Légation de Struve:

Mineralogische Beyträge, vorzüglich in Hinsicht auf Würtemberg und den Schwarzwald; von H. S. Gotha 1807. 8°.

De la part de Mr. le Conseiller médicinal et Chevalier Klaproth à Berlin:

Chemische Abhandlungen gemischten Inhalts, von M. H. Klaproth. Berlin 1815 8°.

De la part de Mr. le Professeur Develey à Lausanne:

Elémens de Géométrie; par Em. Develey. Paris 1812. 8°.

De la part de Mr. de Zimmermann à Brunsvic:

Rufsland's glorreiche Selbstaufopferung zur Rettung der Menschheit. Leipzig 1815. 8°.

De la part de Mr. le Professeur Bojanus á Vilna:

Introductio in Anatomen comparatam, Oratio academica. Auctore Lud. Henr. Bojanus. Vilna 1815. 8°.

De la part de Mr. l'Academicien Storch:

Cours d'Économie politique, ou Exposition des principes qui déterminent la prospérité des nations. Ouvrage qui a servi à l'instruction de *Leurs Altesses Impériales* les Grands-Ducs *Nicolas* et *Michel;* par Henry Storch etc. St. Pétersbourg 1815 in 8°. Tome I — VI.

De la part de Mr. le Conseiller de Collèges Parrot à Dorpat:

Grundrifs der Physik der Erde und Geologie, zum Gebrauch der akademischen Vorlesungen; von G. F. Parrot. Riga 1815. 8°.

De la part de Mr. le Conseiller de Collèges Fischer à Moscou:

Описаніе курицы имѣющей въ профилѣ фигуру человѣка, съ присовокупленіемъ нѣкоторыхъ наблюденіи и ея изо-

браженія; изданное Профессоромъ Фишеромъ. Москва 1815. 8°.

De la part de Mr. le Conseiller d'Etat et Chevalier Adelung:
Catharinens der Grofsen Verdienste um die vergleichende Sprachkunde; von Fried. Adelung. St. Petersburg 1815. 4°.

De la part de Mr. le Professeur Jason Petroff:
Начальныя основанія Ботаники, для преподаванія. С П. бургъ 1815. 8°.

De la part de Mr. Bessel, Astronome à Königsberg:
Untersuchung der Gröfse und des Einflusses des Vorrückens der Nachtgleichen; von F. W. Bessel. Berlin 1815. 4°.

De la part de Mr. l'Abbé Antonio Scoppa:
Des beautés poëtiques de toutes les langues, considérées sous le rapport de l'accent et du rhythme. Ouvrage couronné par la 2de classe de l'Institut. Paris 1816. 8°.

De la part de Mr. le Conseiller de Cour Grindel:
Versuch über die künstlichen Gährungs-Mittel, nach dem itzigen Zustande der Wissenschaft entwickelt und mit Hinsicht auf die inländischen Branntewcinbrennereyen; von Dr. D. H. Grindel. Riga 1816. 8°.

De la part de Mr. le Professeur Degouroff à Kharkoff:
De la civilisation des Tatares Nogaïs, dans le midi de la Russie Européenne; par le Professeur Degouroff. Kharkoff 1816. 8°.

De la part de Mr. l'Astronome Schröter à Lilienthal:
Beobachtungen und Bemerkungen über den grofsen Kometen von 1811; von Dr. Joh. Hier. Schröter. Göttingen 1815. 8°.

De la part de Mr. l'Académicien Bode à Berlin:
Astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1818, nebst einer Sammlung der neuesten in die astronomischen Wissenschaften einschlagenden Abhandlungen; herausgegeben von I. E. Bode. Berlin 1815. 8°.

De la part de Mr. le Professeur et Chev. Thunberg à Upsala:

Douze dissertations publiées à Upsala en 1815.

De la part de Mr. Noël de la Morinière:

Histoire générale des pêches anciennes et modernes, dans les mers et les fleuves des deux continens; par S. B. I. Noël de la Morinière. Tome I. Paris 1815. 4°.

De la part de Mr. le Lieutenant des Ingénieurs Sevastianoff:

Основанія начертательной Геометріи, для употребленія воспитанниками Института Корпуса Инженеровъ Путей Сообщенія. Сочиненіе Г. Потье, Корпуса Инженеровъ Подполковника и пр. Переводъ Инженеръ-Порутчика Севастьянова. С. П. бургъ 1816. 8°.

De la part des Auteurs et Éditeurs:

Słovnik Jesyka Polskiego, przez M. Samuiła Bogumiła Linde etc. Tom I. Czesc. I. A — F. w Warzawie 1807. 4°. (Retardé)

Słovnik Jesyka Polskiego, przez M. Samuiła B. Linde etc. Tom. VI. i ostatni. U — Z. w Warszawie 1814. 4°.

Abel Burja's Lehren der hylodynamischen Philosophie. Berlin 1812. 8°.

Anleitung den Seidenbau im Freyen zu betreiben; von Franz Ritter Edeln von Heintl u. s. w. Wien 1815. 8°.

Новой, простой и дешевой способъ бѣленія пеньки, и пеньковой пряжи. Изобрѣтеніе Порутчика Щепочкина. С. П. бургъ 1815. 8°.

О усовершенствованіи винокуренія посредствомъ выгоднѣйшей посуды для броженія, и печи для виннаго куба. Сочиненіе Кол. Сов. и Кав. Гр. Энгельманна и пр. С. П. бургъ 1815. 8°.

Widerlegung einiger Stellen der in N°. 92 der Göttingenschen gelehrten Anzeigen von 1813 eingerückten Beurtheilung eines zu Paris erschienenen Werks: Mémoire explicatif sur la Sphère Caucasienne etc. von Peter Körner. Paris 1813. 4°.

Encore quelques argumens contre le Zodiaque. Paris 1814. 8°.

Astronomical observations, made at the Royal Observatory at Greenwich, in the year 1811, by John Pond. Esq. Vol. I. London 1812 in folio.

Топо-Медическое описанie мѣстечка Кемпна, что вѣ Великой-Польшѣ, гдѣ былѣ вѣ 1813 и 1814 годахѣ времянной гошпиталь для Императорской Россiйской Гвардiи. Сочинено Главнымѣ Врачемѣ сего гошпиталя А. Владимирскимѣ. С. П. бургѣ 1815. 8°.

Epistolae Sodalium Socraticorum philomatiae, cum praefatione et appendicibus Guilielmi Leonhardi Mahne, Rectoris Zierizeani Gymnasii. Zierizeae. 1813. 8°.

Das Majestäts-Verbrechen aus den Geboten Gottes und der Vernunft, so wie auch aus den alten und den neuen Staats-Gesetzgebungen, philosophisch-juridisch erklärt und critisch festgesetzt; von Dr. Helmuth Winter. Berlin 1815. 8°.

Meteorologisches Jahrbuch von 1813, mit Rücksicht auf die hieher gehörigen meteorischen und astronomischen Beobachtungen, nebst den Aspecten der Sonne, der Planeten und vorzüglich des Mondes; vom Canonicus Augustin Stark etc. Augsburg 1814. 4°.

Beschreibung der meteorologischen Instrumente, nebst einer Anleitung zum Gebrauch derselben bey den Beobachtungen, mit 5 Kupfertafeln; vom Canonicus Augustin Stark etc. Augsb. 1815. 4°,

Recherches sur l'acide prussique; par Mr. Gay-Lussac. Paris 1815. 8°.

Reise in die Krym und den Kaukasus; von Moritz v. Engelhardt und Fried. Parrot; mit Kupfern und Karten. 1ter und 2ter Theil. Berlin 1815. 8°.

Alexander, Keizer van Rufsland, in Holland en te Zaardam in 1814; door Jacobus Scheltema, te Amsterdam 1814. 8°.

Peter de Groote, Keizer van Rufsland, in Holland en te Zaardam in 1697 en 1717, door M. Jacobus Scheltema 1 en 2 Deel, Te Amsterdam 1814. 8°.

Coup d'œil géognostique sur le Nord de l'Europe en général, et particulièrement de la Russie; par le Comte G. de Razoumovski etc. St. Pétersbourg 1816. 8°.

Primitiae Florae Galiciae Austriacae utriusque; Auctore Besser. M. D. Pars 1 et 2. Viennae 1809. 8°.

Supplementum II et III. ad Catalogum plantarum in horto botanico Gymnasii Volhyniensis Cremeneci cultarum. Auctore Besser. Cremeneci 1814. 8°.

On the laws which regulate the polarisation of light by reflexion from transparent bodies; by David Brewster. London 1815. 4°.

Nereis Britannica, containing all the species of Fuci, natives of the British coasts, with a description in English and Latin, and plates coloured from nature; by John Stackhouse. Bath 1801. gr. fol. royal.

Theophrasti Eresii de Historia plantarum libri decem; curante John Stackhouse. Oxonii 1813. Pars I et II. 8°.

Extracts from Bruce's Travels in Abyssinia, and other modern authorities respecting the Balsam - and Myrrh - Tree's; by John Stackhouse. Bath 1815. 8°.

Kurze Beschreibung der Vögel Liv - und Esthlands; von Dr. Bernhard Meier etc. mit einer Kupfertafel. Nürnberg 1815. 8°.

Praktische Darstellung der Ziegelhüttenkunde; von Joh. Nepom. Schönauer etc. Salzburg 1815. 8°.

2) Pour le Cabinet de Curiosités:

De la part de Mr. l'Académicien extraordinaire Langsdorff:

1°) La continuation de la suite de ses empreintes des papillons du Brésil, au nombre de trente.

2°) Seize peaux d'oiseaux du Brésil.

3°) Deux œufs de Kaiman.

De la part de Mr. l'Académicien Severguine:

Un cacadou empaillé.

De la part de Mr. le Secrétaire de Collège Fedor Kolessof à Yakoutsk :

Un crane de Rhinoceros, avec sa machoire inférieure et un fragment de défense de Mamouth, trouvés l'un dans la rivière Kolyma en 1812, et l'autre sur les bords de la mer glaciale en 1811.

Reçu du Comptoir de la Cour, par ordre de S. E. Mgr. le Ministre :

Une collection de cent oiseaux empaillés, arrivés de l'Angleterre.

De la part de Mr. le Conseiller de Cour et Chev. Buldakoff :

1°) Une peau de Loup noir, variété qu'on trouve fréquemment dans la Sibérie orientale.

2°) Une peau du Baïbak. (Arctomys Bobak.)

Envoyés par un Anonyme :

1°) Un tronc de peuplier noir à deux tiges réunies par une grosse branche de traverse, et

2°) un morceau de granite à filons de gypse.

De la part de Mr. le Conseiller de Colléges et Chevalier Steven à Symphéropol :

Le Crane d'un chien marin, de l'espèce de Phoca barbata.

De la part de la Régence de Sarskoye Sélo :

Une vigogne amenée par le vaisseau Souvoroff et morte dans la ménagerie.

Par Ordre de SA MAJESTÉ L'EMPÉREUR :

Une corne ou dent de Narval (Licorne de mer.).

3) Pour le Cabinet d'instrumens mathématiques :

De la part de Mr. le Conseiller de Cour et Chev. Karsakoff :

Un Astrolabe de poche, d'une construction simple et d'un usage

facile, exécuté ici à St. Pétersbourg d'après les idées de l'inventeur.

4) Pour le Cabinet de Minéralogie:

De la part de Mr. le Docteur Hamel :

1°) Un morceau de la pierre à chaux flexible qu'on a trouvée en petite quantité près de Sunderland.

2°) Huit pièces de Schiste alumineux de Renfrewshire dans ses différens degrés de décomposition.

3°) Une lampe de l'invention de Sir Humphry Davy, propre à prévenir les malheurs qui arrivent si souvent dans les mines de charbon de terre, par l'inflammation du gaz hydrogène carbonné; avec la déscription.

De la part de Mr. l'Académicien Zakharoff :

Un goniomètre de l'invention de Carangeau, la même dont Haüy se sert dans ses recherches cristallographiques.

De la part de Mr. le Dòcteur Ure à Glasgow :

Un tuyau de verre contenant du Jode.

De la part de Mr. le Docteur Lyall à Edinbourg :

Quelques minéraux des environs d'Edinbourg, consistans en porphyres, basaltes, schistes etc.; en tout huit numéros.

De la part de Mr. le Minéralogiste Etter :

Un morceau d'étain noir de Cornouaille.

De la part de Mr. l'Académicien Schérer :

Un morceau de Quartz bleu de Finlande.

À la suite d'un ordre SUPRÈME :

Une pétrification, appellée pain pétrifié, qui a été trouvé à Tver, dans la rivière Tverza.

Envoyée de Petrozavodsk :

Une caisse, contenant 145 pièces de minéraux.

5) Pour la Bibliothèque de l'Observatoire:

De la part de Mr. Pasquich, Directeur de l'Observatoire Royal d'Ofen:

1°) Epitome elementorum Astronomiae sphaerico calculatoriae; Auctore I. Pasquich etc. Pars 1 et 2, cum appendice Viennae 1811. 4°.

2°) Nachricht von der neuen Königlich-Ungarschen Universitäts-Sternwarte zu Ofen. Ofen 1813. 8°.

De la part de Mr. l'Académicien Bode à Berlin:

1°) Astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1818; herausgegeben von I. E. Bode. Berlin 1815. 8°.

2°) Astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1819; herausgegeben von I. E. Bode Berlin 1816. 8°.

De la part de Mr. le Docteur Bessel à Königsberg:

Astronomische Beobachtungen auf der Königl. Universitäts-Sternwarte in Königsberg; von F. W. Bessel. 1te Abtheilung, vom 12 November 1813 bis den 31 December 1814. Königsberg 1815. folio.

IV.

MÉMOIRES ET AUTRES OUVRAGES MANUSCRITS PRÉSENTÉS À L'ACADÉMIE.

О кривыхъ линіяхъ зажигательными называемыхъ; par S. E. Mr. Fuſs.

О вліяніи климатовъ на образованіе ископаемыхъ тѣлъ; par Mr. Severguine.

О потерѣ дерева отъ рубки дровъ; par Mr. Zakharoff.

О употребленіи въ домашнемъ крашеніи лишаевъ; par le même.

О пріуготовленіи синей краски изъ красной капусты; par Mr. Zakharoff.

Kurzer Auszug meiner Bemerkungen über Brasilien, und besonders die Kapitanie Minas-Geraes; par Mr. le Lieutenant-Colonnel Baron d'Eschwégue.

Decades tres Eleutherorum novorum, descripsit I. Fr. Eschholz.

О необыкновенной уродливости дѣтородныхъ частей и о раздвоенной хребтовой кости. Сочиненіе Г. Лобенвейна и пр. переведено съ Латинскаго; par Mr. Zagorski.

Извѣстіе о убитомъ въ Сибири, не подалеку отъ Змѣиногорскаго рудника Тигрѣ, и о каменномъ щеглѣ, сообщенное Г. Спасскимъ, Корреспондентомъ Академіи Наукъ, съ примѣчаніями Александра Севастьянова.

Plantarum novarum aut minus cognitarum Pentas prima; par Mr. le Docteur Trinius.

Determinatio temporis per observatas distantias siderum ab objecto dato terrestri, ipsiusque objecti situs; par Mr. Littrow.

Выписка учиненнымъ наблюденіямъ о погодахъ и воздушныхъ явленіяхъ въ Пензенской Губерніи и уѣздѣ, въ селѣ Машвѣевкѣ въ 1814 году; par Mr. Europeus.

Dissertatio de plantis naviformibus; par Mr. Smélovski.

Versuch einer systematischen Übersicht der chemisch untersuchten Mineral-Wässer Rufslands, nebst einigen vorläufigen Bemerkungen über die Classification der Mineral-Wässer; par Mr. Schérer.

Über das alte Nordische Jul-Fest, welches im X[ten] Jahrhundert unter dem Namen το Γοτθικὸν auch am Hofe in Konstantinopel gefeyert ward; par Mr. Krug.

Полный Латинско-Россійскій Ботаническій Словарь, съ означеніемъ въ ономъ мѣсторожденія и продолженія жизни всѣхъ по сіе время извѣстныхъ растѣній; par Mr. Smélovsky.

De piscatu Wolgensi; par S. E. Mr. Ozeretskovski.

De praeparatis ad piscatum Wolgensem; par le même.

Sur la formation du sucre, lors de la préparation du malt et l'échaudement de la farine avec de l'eau bouillante; par Mr. Kirchhoff.

Наблюденія надъ выпареніемъ воды, снѣга и льда въ тѣниcтомъ мѣстѣ; par Mr. Petroff.

Résultats statistiques sur l'étendue de la surface et sur la population de l'Empire de Russie, depuis 1803 jusqu'en 1811 inclusivement; par Mr. Herrmann.

Fortsetzung der Untersuchung über die Bestimmung der Anzahl imaginärer Wurzeln, die sich in einer gegebenen algebraischen Gleichung, deren Wurzeln nicht möglich sind, befinden; par Mr. le Docteur Kupfer.

Histoire de l'Académie IMPÉRIALE des Sciences, année 1813; par S. E. Mr. Fufs.

Histoire de l'Académie IMPÉRIALE des Sciences, année 1814; par le même.

Über die Porphyrgebirge am Flusse Akstapha in Georgien; par Mr. Schlégelmilch.

De transformatione seriei in fractionem continuam; par Mr. Schubert.

Описаніе компаса съ діоптрами новой конструкціи полеваго прямоугольника для употребленія при съемкахъ въ полѣ; par Mr. Karsakoff.

Разсужденіе о свойствахъ, отношеніи и употребленіи гиперболическихъ функцій; par S. E. Mr. Fufs.

Краткое изслѣдованіе упавшаго изъ атмосферы порошка или мнимой сѣры; par l'Élève Mr. Moukhine.

Замѣчанія въ проѣздѣ къ городу Осташкову; par S.E. Mr. Ozeretskovski.

Observations astronomiques, faites à l'Observatoire de l'Université IMPÉRIALE de Vilna en 1814; par Mr. Sniadecki.

Выписка учиненнымъ въ С. Петербургѣ при Императорской Академіи Наукъ наблюденіямъ о погодахъ и воздушныхъ явленіяхъ и перемѣнахъ въ 1814 году; par l'Elève Mr. Tarkhanoff.

Новые опыты о разложеніи алмаза и другихъ угольныхъ веществъ; par Mr. Zakharoff.

De Descensu gravium super arcu Lemniscatae; par S. E. Mr. Fufs.

Descriptiones quatuor Proteae novarum specierum; par Mr. Thunberg.

Les observations météorologiques, faites par le Chirurgien-Major Vyssotsky en 1812, dans la ville de Torjok et en 1813 et 1814 dans la ville d'Ostachkoff du Gouvernement de Tver.

Геометрія въ пространствахъ, или приложеніе Алгебраическаго Анализа къ начертательной Геометріи. Сочиненіе Алексѣя Маюрова.

Vuës générales sur l'étât de l'agriculture en Russie, depuis 1804 jusqu'en 1810 inclusivement; par Mr. Herrmann.

De parallelepipedi obliquanguli soliditate; par Mr. Littrow.

Разсужденіе физіологическое о животной теплотѣ; par Mr. Zagorski.

De nova Medusarum specie; par Mr. Tilésius.

Idées sur la population du Caucase, et sur l'origine des Géorgiens; par Mr. Steven.

Замѣчанія мои по дорогѣ изъ Москвы въ Бѣлоруссію въ 1807 году; par Mr. Zinovieff.

Разсужденіе о зарожденіи чревныхъ, или во внутренностяхъ другихъ животныхъ обитающихъ червей, и о средствахъ къ истребленію ихъ служащихъ. Сочиненіе Блоха, перевелъ на Россійскій языкъ и нѣсколькими примѣчаніями дополнилъ Александръ Севастьяновъ.

Observations de la grande Comète de l'an 1811, faites à Novo-Tcherkask au mois d'Août 1812; par Mr. Wisnievski.

Über die Malz-Essigbereitung, die Bleyzucker- und Bleyweis-Fabrikation in den Rheingegenden; par Mr. Nassé.

Continuatio Prodromi Florae Petropolitanae; par Mr. Smélovski.

Novae species generis plantarum cryptogamarum Hydnum dicti, quae hucusque non sunt in Flora Petropolitana indicatae ac descriptae, cum effigiebus ad naturam delineatis; par le même.

Anzeige eines Werks über die chemische Litteratur; par Mr. Schérer.

О древнихъ начертаніяхъ и надписяхъ, сткрытыхъ въ полу-

деиной Сибири, близъ Саянскихъ и Алтайскихъ горъ; par Mr. Spasski.

Ladoga, im Gegensatz von Novgorod; par Mr. Krug.

О городѣ Гатчинѣ; par S. E. Mr. Ozeretskovski.

О нѣкоторыхъ свойствахъ логариѳмической спирали; par Mr. Collins.

Николая Фуса рѣшеніе разныхъ вопросовъ о состояніи равновѣсія обремененныхъ связанныхъ бревенъ, о силахъ состава, и о давленіи на столбы служащіе подпорами. Съ Латинскаго перевелъ Императорской Академіи Наукъ воспитанникъ Павелъ Фусъ.

Des Maxima et Minima d'une fonction de plusieurs variables; par Mr. Schubert.

Extrait des Observations météorologiques, faites à St. Pétersbourg, par feu Mr. Inochodzoff, année 1806, d'après le vieux Style; rédigé par Basile Pétroff.

О скорозачатіи въ животныхъ и въ растѣніяхъ; par S. E. Mr. Ozeretskovski.

Determinatio latitudinis geographicae Observatorii Casaniensis; par Mr. le Professeur Littrow.

Минералогическія замѣчанія, учиненныя на пути изъ Моздока въ Тифлисъ; par Mr. Schlégelmilch.

Calcul des observations de la Comète de 1815, faites à l'Observatoire de St. Pétersbourg; par Mr. Schubert.

Über die Sicherungsmittel gegen Feuersgefahr, durch Verminderung der Zündbarkeit des Holzes, Leinenzeugs, Papiers etc.; par Mr. Kirchhoff.

Démonstration d'un théorème fondamental de la Géométrie élémentaire; par Mr. Kausler.

Ganz einfache Art eine Zambonische Säule zu construiren; par Mr. le Docteur Grindel.

Über das Phosphoresciren; par le même.

Разсужденія о наружныхъ отличительныхъ признакахъ ископаемыхъ тѣлъ; par Mr. Séverguine.

Новая Система Минераловъ, основанная на наружныхъ отличительныхъ признакахъ; par le même.

Opposition de Jupiter et Occultations observées à l'Observatoire de de l'Académie; par Mr. Schubert.

Nova linearum parallelarum theoria; par Mr. Kausler.

Выписка учиненнымъ Казанской Губерніи, Чебоксарскаго уѣзда въ деревнѣ Нерадовѣ наблюденіямъ о погодахъ и воздушныхъ явленіяхъ и перемѣнахъ въ 1815 году; par Mr. Lokhtine.

Sur les moyens de supprimer la papier monnaie en Russie; par Mr. Storch.

О жидкихъ частяхъ человѣческаго тѣла, и въ особенности о крови; par Mr. Zagorski.

Arundo Wilhelmsii; par Mr. Ledebour.

Descriptio et analysis chemica Steinheilithi; par Mr. Gadolin.

Описаніе города Луги; par Mr. Tchadayeff.

О Россійскихъ бобрахъ строющихъ плотины; par Mr. Sévastianoff.

Mésure de la hauteur du mont Elbrus audessus du niveau de la mer; par Mr. Wisnievski.

Über die Reinigung des Phosphors; par Mr. Schérer.

О термитахъ просто называемыхъ бѣлыми муравьями; par Mr. Sévastianoff.

Über eine Stelle in den Bertinischen Annalen, das Volk Rhos betreffend; par Mr. Krug.

Николая Фуса рѣшеніе нѣкоторыхъ гидравлическихъ вопросовъ, касательно вытеканія жидкостей изъ цилиндрическихъ сосудовъ; переведено съ Французскаго и умножено примѣчаніями воспитанникомъ Императорской Академіи Наукъ Павломъ Фусомъ.

Продолженіе наблюденій дѣланныхъ безпрерывно два мѣсяца надъ выпареніемъ льда и снѣга въ тѣнистомъ мѣстѣ при различныхъ градусахъ холода; par Mr. Pétroff.

Des progrès de la population en Russie, par Gouvernemens, d'après la 4me, 5me et 6me Révision. 1re partie; par Mr. Herrmann.

Описаніе простонародныхъ лѣкарствъ, какія въ Москвѣ и въ окрестностяхъ ея простыми людьми потребляются, и въ какихъ болѣзняхъ; par S. E. Mr. Ozeretskovski.

Метеорологическія наблюденія 1815 года, дѣланныя Тверской Губерніи въ городѣ Осташковѣ Штабъ-Лѣкаремъ Высоцкимъ.

Способъ распознавать настоящіе драгоцѣнные камни отъ подложныхъ и поддѣланныхъ; par Mr. Séverguine.

Общія понятія о искуствѣ граненія, шлифованія и полированія камней; par le même.

Recherches sur deux séries, pour servir de réponse à une question d'Analyse, proposée par la Société Royale des Sciences de Copenhague; par S. E. Mr. Fufs.

Des progrès de la population en Russie, par Gouvernemens, d'après la 4me, 5me et 6me révision. 2de partie; par Mr. Herrmann.

Recherches sur un problème de la théorie des fonctions équiformes; par Mr. Collins.

Observations astronomiques, faites à l'Observatoire de l'Université IMPÉRIALE de Vilna en 1815 et 1816 nouveau Style; par Mr. Sniadecki.

Выписка учиненнымъ въ Санктпетербургѣ при Императорской Академіи Наукъ наблюденіямъ о погодахъ и воздушныхъ явленіяхъ и перемѣнахъ въ 1815 году; par Mr. Tarkhanoff.

О крымскихъ домашнихъ и дикихъ млекопитающихъ, такъже птицахъ, рыбахъ, земноводныхъ и насѣкомыхъ; par Mr. Sévastianoff.

Die Verfertigung eines feinen Rum-ähnlichen Geistes, mit Hülfe des künstlichen Zuckers; par Mr. Grindel.

Продолженіе метеорологическихъ наблюденій, учиненныхъ въ Змѣиногорскомъ рудникѣ, съ 10-го Іюля 1814 по 10-е Іюля 1816 года; par Mr. Spasski.

Anleitung zur Bereitung mehrerer Gattungen von künstlichen Mineral-Wässern, nebst Bemerkungen über natürliche und künstliche Gesundbrunnen; par Mr. Nassé.

Примѣчанія о разныхъ предметахъ касающихся до каменныхъ строеній; par Mr. Séverguine.

Calcul de l'opposition de Jupiter, observée à St. Pétersbourg l'an 1816; par Mr. Schubert.

О Помостровской минеральной водѣ; par Mr. Zakharoff.

О животныхъ Американскихъ соотвѣтствующихъ верблюдамъ стараго свѣта; par Mr. Sévastianoff.

Vérification de la Latitude de l'Observatoire de l'Académie IMPÉRIALE des Sciences; par Mr. Wisnievski.

Die Raffinerie des Kampfers, nach den neuesten Verbesserungen beschrieben von A. N. Scherer.

Извѣстіе о Американскихъ животныхъ находящихся нынѣ въ Сарско-Сельскомъ звѣринцѣ; par Mr. Sévastianoff.

Über den dreyfachen Anfang des Jahrs in Rufsland; par Mr. Krug.

Опыты касательно очищенія меду и дѣланія изъ него сиропа; par Mr. Zagorski.

Объ употребленіи спаржи; par le même.

Способъ къ очищенію обыкновеннаго меда, и сдѣланію его безцвѣтнымъ; par le même.

Способъ дѣлать превосходныя сальныя свѣчи; par le même.

Extrait des Observations météorologiques faites à St. Pétersbourg, année MDCCCVIII, d'après le nouveau Stile; par Mr. Pétroff.

Физическія примѣчанія, дѣланныя учителемъ 2-го класса при Лужскомъ уѣздномъ училищѣ, Александромъ Чадаевымъ, съ 9-го Апрѣля по 1 е Іюня 1816.

Supplementum ad dissertationem meam: Investigatio terminorum seriei ex datis productis terminorum contiguorum; par S. E. Mr. Fufs.

Примѣчанія и дополненія къ XII главѣ 2-го тома Алгебры Эйлера, касательно рѣшенія уравненій третьей степени; par Mr. Paul Fufs.

Объ удивительныхъ или чудесныхъ дождяхъ (Pluviae prodigiosae); par Mr. Moukhine.

Disquisitio de limitatis in compositione salium proportionibus; par Mr. Gadolin.

Способъ красить природныя дерева; par Mr. Zagorski.

Приготовленіе дерева къ окрашенію; par le même.

Приготовленіе краски; par le même.

Покрываніе дерева лакомъ; par le même.

Über die zweite oder mittlere Bergreihe der Pambackischen Gebirgskette; par Mr. Schlégelmilch.

Vom Kartoffelmehl und dessen Benutzung zum Brodtbacken und Branntweinbrennen; par Mr. Kirchhoff.

De Epicurvoidibus; par Mr. Collins.

Всеобщая Исторія о звѣриныхъ и рыбныхъ промыслахъ древнихъ, и новѣйшихъ въ моряхъ и рѣкахъ обоихъ материковъ; сочиненіе С. Б. І. Ноеля. Томъ 1. перевелъ Н. Озерецковскій.

V.

OBSERVATIONS, EXPÉRIENCES ET NOTICES INTÉRESSANTES, FAITES ET COMMUNIQUÉES À L'ACADÉMIE.

1°) Mr. le Professeur *Bessel* à Königsberg, envoya pour être présenté de sa part: *Beobachtung der Wintersonnenwende des Jahrs 1814 in Königsberg.* Dans sa lettre au Secrétaire Mr. *Bessel* observe: qu'il lui a toujours paru inconcevable, comment tant d'Astronomes, avec des cercles si différens, ont pu trouver l'obliquité de l'Ecliptique en hyver notablement plus petite qu'en été. Ses observations des deux Solstices de l'année passée, communiquées l'une et l'autre à l'Académie, ne les font différer que de $\frac{16}{100}$ de seconde, ce qui prouve qu'à présent, comme autrefois, les tropiques sont à distance égale de l'équateur. Mr. *Bessel* est por-

té à croire que les différences notables que d'autres Astronomes avoient trouvées, doivent être attribuées à l'influence de la chaleur du soleil sur les instrumens, contre laquelle on ne s'étoit pas prémuni avec assez de soin. Enfin, en comparant sa détermination de l'obliquité de l'Ecliptique avec celle qu'il a déduite des observations de Bradley de l'an 1755, Mr. *Bessel* a trouvé une diminution annuelle de 0″,464.

2°) Mr. l'Académicien extraordinaire Schérer notifia à la Conférence: qu'au mois de Mars de l'année passée il est tombé des pierres météoriques à Sawataipola, près de Frederiksham, sur la surface glacée d'un lac; que des préjugés populaires ont empêché les païsans qui étoient spectateurs de ce phénomène, de les ramasser. Les pierres restèrent sur la glace et tombèrent au fond de l'eau lors du dégèl du printems. Mr. *Schérer* ajoute que dans le même mois de la même année il est tombé aux environs de Kharkoff un Aërolithe du poids de 50 livres, qui contient du chrome d'après l'Analyse de Mr. *Giese*, dont Mr. *Schérer* promet de donner des détails plus circonstanciés dans la suite.

3°) Mr. l'Académicien extraordinaire *Schérer*, présenta l'analyse faite par Mr. le Professeur *Giese* de la pierre météorique du poids de 50 livres, tombée de l'Atmosphère aux environs de Kharkoff au mois de Mars 1814. D'après son analyse cet Aërolithe contient:

Silice - - - -	0,44
Fer métallique - -	0,21
Nickel - - - -	0,25
Magnésie - - -	0,18
Argille - - - -	0,03
Manganèse - - -	0,01
Oxide de Chrome -	0,01.

avec un indice de soufre.

4°) Mr. l'Académicien extraordinaire *Schérer* présenta un fragment de la pierre météorique, dite pierre de Kharkoff, dont il a communiqué l'Analyse de Mr. *Giese*. Il ajoute, pour rectifier sa première notice, que cet aërolithe n'est pas tombé à Kharkoff ni en Mars 1814, mais dans le cercle de Bakhmout du Gouvernement de Yekaterinoslav le 3 Fevrier 1814. Le fragment fait voir qu'il est d'un grain plus fin ou plus menu que les autres aërolithes connus, et d'une couleur moins foncée.

5°) Mr. l'Académicien extraordinaire *Herrmann* envoya une boëte remplie de pierres prétendues météoriques, tombées avec la grèle à Vilna le 29 Mai 1815, durant un orage. Dans un rapport, que Mr. *Herrmann* communiqua avec ces pierres, le Gentilhomme de la Chambre, Mr. Liachnitski, mande qu'il en est tombé une grande quantité du poids d'une once jusqu'à une livre, ajoutant qu'on en fait àprésent l'analyse chimique, dont il communiquera le résultat en son tems.

6°) Le Secrétaire lut une lettre adressée à l'Académie par le célèbre Elève de *Joseph Haydn*, Mr. *Neukomm*, Maître de Chapelle de S. A. Mr. le Prince Talleyrand. Occupé depuis longtems de l'idée de découvrir un moyen sûr d'indiquer, de la manière la plus exacte, le mouvement que le Compositeur de Musique a voulu donner à ses ouvrages, Mr. *Neukomm* croit être parvenu à faire un Chronomètre musical propre à remplir toutes les conditions désirables dans un pareil instrument, et il en transmet un exemplaire à l'Académie, en la priant de vouloir bien seconder ses vuës désintéressées, en donnant à son Chronomètre musical la plus grande publicité possible. La Conférence chargea Mr. l'Académicien *Schubert* d'examiner le Chronomètre de Mr. *Neukomm* et de lui en dire son opinion.

7°) S. E. Mr. l'Académicien *Ozeretskovski* notifia d'avoir fait l'acquisition d'un gros bloc de pierre de Labrador, qui vient

d'être déterré en creusant un puits, près le cimetière de Volkova, à la profondeur de cinq toises. — Le bloc abonde en lames luisantes de couleur bleue, verte et rouge. Mr. *Ozeretskovski* promet de présenter à la Conférence, pour son Cabinet de Minéralogie, des échantillons de ce bloc de Labrador, dès qu'il aura été scié en morceaux.

8°) Le Secrétaire lut une communication du Directoire de la Compagnie Russe-Américaine, qui fait savoir à l'Académie: que le Lieutenant de la Flotte *Lazareff*, commandant le vaisseau de la Compagnie, le Souvoroff, a découvert le 27 Septembre 1814 un grouppe de cinq petites îles, dont la plus méridionale se trouve à 13°, 13′, 15′ de latitude australe et à 163°, 31′, 4″ de longitude à l'Ouest de Greenwich. L'avis étoit accompagné d'un extrait du Journal du Lieutenant *Lazareff*, d'une Carte et d'une vuë des îles.

9°) Mr. le Docteur *Hamel*, Correspondant de l'Académie, donne plusieurs notices technologiques et physiques, rassemblées pendant son dernier voyage en Ecosse. Parmi les dernières se trouve un aperçu intéressant des nouvelles découvertes faites par le Docteur *Brewster* à Edinbourgh, sur la polarisation de la lumière et sur la nouvelle loi qui régit cette polarisation, découverte par Mr. *Brewster* et prouvée par des expériences directes.

10°) S. E. Mgr. le Ministre fait savoir à la Conférence que le Chef de l'Etàt-Major de SA MAJESTÉ IMPÉRIALE Lui a envoyé, à la suite d'un ordre SUPRÈME, et pour être conservée au Musée de l'Académie, une pétrification qu'il appelle pain pétrifié, et qui a été trouvée à Tver, dans la rivière Tverza. En transmettant cet objet, pour être conservé au Cabinet, Mgr. le Ministre ordonne de charger de son examen un Académicien Minéralogiste, et de Lui communiquer son opinion.

11°) Mr. l'Académicien *Schubert* présente, de la part du Départament IMPERIAL de la Marine, trois morceaux de pierres

des roches de l'isle Youssari du golphe de Finlande, dans le voisinage de laquelle l'aiguille de la boussole perd sa direction fixe. Le Département de la Marine présume que le phénomène mentionné doit être attribué aux rochers de cette île, qui renferment peut-être quelque chose de magnétique. Les pierres furent données à Mr. l'Académicien *Séverguine*, pour être examinées.

12°) Mr. le Docteur *Hamel*, Correspondant de l'Académie, donne connoissance d'une nouvelle invention de Sir *Humphry Davy*, propre à prévenir les accidens qui arrivent si souvent dans les mines de charbon de terre, par l'inflammation et l'explosion du gaz hydrogène carbonné. C'est par l'usage d'une Lampe de son invention que ce célèbre Physicien est parvenu à éclairer les ouvriers dans les mines de charbon, sans les exposer aux dangers de cette explosion. Mr. l'Assesseur de Collège *Hamel* envoye à l'Académie un exemplaire de cette lampe, avec sa déscription et l'histoire de son invention, en ajoutant qu'il s'est assûré lui-même, par ses propres expériences, instituées dans les mines de Holywell en Flintshire, de l'effet indubitable de cette lampe.

13°) Mr. l'Académicien *Wisnievsky* présenta un rapport concernant la vérification de la Latitude de l' Observatoire de l'Académie IMPÉRIALE des Sciences. Dans ce rapport Mr. *Wisnievski* donne la latitude de l' Observatoire de 59°, 56′, 31″, ainsi de 8, 2 secondes plus grande, qu'elle n'avoit été trouvée en 1763 par feu Mr. *Roumovski*. Ce résultat est fondé sur 46 observations de l'étoile polaire, 32 de l'étoile α d'Andromède, 42 de α de la grande Ourse et 38 de α de l'aigle, en tout sur 158 observations, faites au moyen d'un cercle repétiteur de Troughton, avec toutes les précautions que la nature de ces observations et la qualité de l'instrument exigent.

14°) Mr. *Pauker*, Professeur de Mathématiques et d'Astronomie à Mitau, communique les observations qu'il a instituées dans

la vuë de déterminer plus exactement qu'on ne l'avoit fait jusqu'ici, la position géographique du phare de Domes-Näs sur la côte de Courlande, qu'il a trouvée: la latitude = 57°, 46′, 6″,2 et la longitude = 20°, 14′, 28″,50 à l'Est de Paris.

15°) Mr. le Conseiller de Cour et Chevalier de *Korsakoff*, avantageusement connu par divers instrumens géodétiques qu'il a perfectionnés, présente à la Conférence, un étui contenant six tire-lignes de verre de son invention, chacun d'un calibre différent, et qui réunissent à l'avantage de coûter peu de Copcks, celui de pouvoir être employés à dessiner au Pantographe. Comme ce sont les premiers essais de l'inventeur, il pense que ces tirelignes pourront encore être perfectionnés et devenir un instrument très utile aux dessinateurs de plans et de cartes.

VI.

RAPPORTS PRÉSENTÉS PAR DES ACADÉMICIENS CHARGÉS DE COMMISSIONS PARTICULIÈRES.

1°) Mr. l'Académicien *Séverguine*, chargé d'examiner le mémoire de Mr. le Baron d'*Eschwègue* intitulé: *Kurzer Auszug meiner Bemerkungen über Brasilien, und besonders der Kapitanie Minas-Geraes*, en fit son rapport, contenant en substance: que ce mémoire mérite d'être traduit en Russe et inséré dans le Journal académique, parcequ'il renferme des notices très intéressantes sur le Bresil.

2°) Mr. l'Académicien *Sévastianoff*, chargé d'examiner le mémoire de Mr. le Docteur *Eschholtz*, ayant pour titre: *Decades tres Eleutheratorum novorum*, en fit son rapport contenant en substance: que l'auteur de ce mémoire convaincu de la nécessité indispensable de faire des sous-divisions dans les genres qui sont composés de beaucoup d'espèces, a établi cinq nouveaux genres: 1°. Scotodes; 2°. Mimetes; 3°. Stenodora; 4°. Anthypna; 5°. Anticheira. Mr. *Sevastianoff* dit que les raisons qui ont porté l'au-

teur à proposer ces changêmens, lui paroissent bien fondées, et qu'ayant comparé ses déscriptions avec celles de *Fabrizius*, et avec les déscriptions et dessins d'Olivier et de Yablonski, ces genres lui semblent effectivement nouveaux, et qu'on ne sauroit réfuser à l'application assidue et aux déscriptions bien faites de Mr. *Eschholtz* les éloges qui leur sont dus.

3°) Mr. l'Académicien *Fuſs* ayant été chargé d'examiner un ouvrage présenté à l'Académie par Mr. de *Maïroff*, Colonnel des Ingénieurs de la Suite de SA MAJESTÉ IMPÉRIALE, sous le titre: *Геометрія въ пространствахъ, или приложеніе алгебраическаго Анализа къ начертательной Геометріи*, il fit à la Conférence l'exposé suivant du contenu de cet ouvrage: L'Auteur, après avoir fait voir comment on détermine la position du point, de la ligne et du plan dans l'espace, passe à la recherche des équations qui résultent de la permutation des coordonnées. Ensuite, ayant traité des surfaces et lignes courbes du second degré, il démontre les propriétés de ces lignes. De là, après avoir traité des surfaces courbes en général et de la position des plans qui les touchent, il passe à la discussion des surfaces dites obliques, engendrées par le mouvement quelconque de la ligne droite, il en cherche les équations et fait voir comment on mène les plans, qui touchent ces surfaces, en appliquant ceci à l'art d'enfiler et eux regles qui en résultent pour l'Architecture navale. Cette courte Analyse de l'ouvrage de Mr. le Colonnel de *Maïroff*, fait voir que les objets qui y sont traités, sans être absolument neufs, ni présentés d'une manière nouvelle, ne se trouvent ainsi réunis dans aucun corps d'ouvrage publié jusqu'ici en langue Russe, et que sous ce point de vuë, les recherches de Mr. de *Maïroff* sont recommendables et son travail méritoire.

4°) Mr. l'Académicien *Schubert*, chargé d'examiner le Chronomètre musical de Mr. *Neukomm*, qui à été présenté à la Conférence, rapporta que cet instrument, dont Mr. *Schubert* donne une

description très claire, ainsi que de la manière de s'en servir, réunit, comme le Chronomètre musical de Mr. *Burja*, auquel il ressemble, plusieurs avantages, savoir: 1°. d'indiquer véritablement et avec précision, la juste mésure du tems, dans laquelle le Compositeur veut qu'une piece de musique de sa composition soit exécutée; 2°. de n'être pas sujet à s'arrêter ni à se déranger; 3°) d'être si simple que chacun peut se le procurer à peu de fraix, et qui plus est, le faire sans difficulté lui-même. Comme l'inventeur désintéressé, en présentant son invention à l'Académie, n'a eu d'autre désir que de la voir répandue autant que possible parmi les gens de l'art qui sont dans le cas d'en avoir besoin, la Conférence résolut d'en faire insérer la déscription de Mr. l'Académicien *Schubert*, dans les gazettes que l'Académie publie.

5°) Mr. l'Académicien extraordinaire *Schérer* présenta son rapport concernant cinquante-six espèces de pierres calcaires qu'il avoit été chargé d'examiner, conjointement avec Mr. l'Académicien *Séverguine*, à la suite de la prière adressée à l'Académie par Mr. le Général-Major *Barclay-de-Tolly*. Quelques examens préliminaires avoient prouvé que toutes ces pierres consistent en chaux carbonatée, en terre silicieuse, en terre argilleuse et en oxide de fer. Par une analyse plus soigneuse Mr. *Schérer* a déterminé les parties constituantes de chacune, et une liste annexée à son rapport fait voir, combien chaque numéro contient, sur cinquante parties, de chaux, d'acide carbonique, de silice, d'argille et d'oxyde de fer. Mr. l'Académicien *Séverguine* présenta et lut aussi son rapport, concernant les mêmes pierres à chaux, et ces deux rapports furent transmis à Mr. le Général-Major *Barclay-de-Tolly*.

6°) Mr. l'Académicien *Séverguine* présenta et lut son rapport sur les pierres prétendues météoriques, envoyées de Vilna. Ayant examiné et comparé les huit échantillons, présentés à l'Académie par Mr. l'Académicien extraordinaire *Herrmann*, avec les pierres véritablement météoriques de la collection académique, en

égard tant aux caractères extérieur et intérieur qu'à la pésanteur spécifique, Mr. *Severguine* a trouvé que ces pierres, loin d'être météoriques, sont très communes, pour la plûpart calcaires, et il présume qu'elles ont été jettées, par un ouragan, dans le Fauxbourg de Vilna, des hauteurs qui l'environnent.

7°) Mr. l'Académicien *Krug*, chargé de lire un mémoire de Mr. le Conseiller de Collèges et Chévalier *Steven:* Sur la population du Caucase et sur l'origine des Géorgiens, en fit son rapport contenant en substance: que l'auteur veut prouver que les Géorgiens ne sont pas aborigines du Caucase, mais qu'ils sont venus de l'Europe. Il tâche d'établir cette opinion sur deux raisons, dont l'une est prise de la nature du païs qu'ils habitent, et l'autre de leur langue, mais l'une et l'autre démonstration de leur origine Européenne ne satisfait pas entièrement, par des raisons que Mr. *Krug* développe dans son rapport. Il trouve que la question intéressante sur l'origine des Géorgiens n'est pas résolue par le mémoire de Mr. *Steven;* mais il ajoute qu'il seroit à désirer que ce Savant rempli de connoissances, voulut communiquer à l'Académie beaucoup de notices et observations neuves sur l'état *actuel* du Caucase et de ses habitans, sur lesquels sa position lui donne toutes les facilités d'obtenir des renseignemens intéressans.

8°) Mr. l'Académicien *Schérer*, chargé par la Conférence d'examiner un échantillon de l'alun fabriqué par Mr. Prètre à Moscou, et transmis à l'Académie par le Département des Manufactures et du Commerce intérieur, en présenta son rapport. La substance en a est: 1°. que cet alun, quant à son extérieur, est parfaitement transparent, et consiste en cristaux octaëdres tels qu'ils sont propres à cette substance; 2°. qu'il se dissout, comme cela doit ètre, dans dixhuit parties d'eau, à une température moyenne, sans montrer d'autre résidu qu'une très petite quantité de terre argilleuse ne surpassant pas $\frac{1}{240}^{me}$ de la portion soumise à l'examen; 3°. que ni

la teinture de la noix de galle, ni la solution d'amoniac, n'y produisent le moindre changement de couleur, et que lui ayant trouvé ainsi les signes, qui sont ceux de tout bon alun, de quelque païs et de quelque fabrique qu'il vienne, il n'hésite pas à déclarer que l'alun, qu'on lui a donné à examiner, est d'une bonne qualité, et propre aux usages techniques.

9°) Mr. l'Adjoint *Collins*, chargé d'examiner le mémoire de Mr. le Conseiller de Cour et Professeur *Kausler*, présenté à l'Académie sous le titre: *Nova linearum parallelarum theoria*, en fit son rapport contenant en substance: que Mr. *Kausler* n'a pas été plus heureux que tant d'autres habiles Géomètres-Logiciens qui, s'efforçant d'élever le fameux onzième axiome d'Euclide au rang des théorèmes solidement démontrés, n'ont pu, avec toute leur pénétration, éviter dans le raisonnement un cercle plus ou moins subtilement càché. Selon Mr. *Collins*, l'auteur de ce mémoire, en se servant du principe de la superposition, démontre rigoureusement huit théorèmes fondés sur la coincidence des secteurs qui dans des cercles égaux répondent à des angles au centre égaux. Mais dans le théorème neuvième il y a une pétition de principe qui rend sa démonstration vicieuse; et avec ce théorème, sur lequel se fondent presque tous les suivans, s'écroule tout l'édifice de cette nouvelle théorie des lignes paralleles.

10°) Mr. l'Académicien *Séverguine* présente son rapport sur la pétrification trouvée à Tver, dans la rivière Tverza. D'après ce rapport c'est une masse de pierre à fusil qui, frappé avec l'acier, donne des étincelles, et qui renferme les pétrifications de plusieurs crustacés qui n'existent plus ou n'existent que dans des mers éloignées. Cet artholithe, dont on a trouvé de semblables en plusieurs pais, prouve selon Mr. *Séverguine*, que l'endroit, où il a été trouvé, a été autrefois fond de la mer; sa forme extérieure est duë au hazard et aux effets des torrens d'eau. Il a été pla-

cé au Cabinet des minéraux indigènes, où se trouve déjà une pièce semblable, qui date du tems de *Pierre le Grand* (1718).

11°) Mr. l'Académicien *Séverguine* présenta et lut son rapport sur trois fragmens des roches de l'île Youssari, envoyés par le Département IMPERIAL de l'Amirauté. L'examen institué par Mr. *Séverguine* semble confirmer l'opinion du Département: que le phénomene observé sur l'aiguille de la boussole, dans le voisinage de cette île, provient de la nature de ses rochers. Car une partie de l'échantillon N°. 1, reduite en poudre, a été attirée par un aiman artificiel, et consiste en Trapp mélé de beaucoup de fer. Le second échantillon est aussi du Trapp, mais plus mélé de Quarz et de Mica. Le 3me ressemble au 2d., avec la différence qu'il est plus grénu et plus ferme, et qu'il donne des étincelles avec l'acier.

12°) Mr. l'Académicien *Pétroff* présenta et lut son rapport concernant les paratonnères des magazins à poudre à Okhta, qu'il a examineés à la suite d'une demande du Département de l'Artillerie du Ministère de la guerre. La substance en est: que ces paratonnères sont en parfaitement bon état dans toutes leurs parties visibles. Il a observé cependant que le puits, où va aboutir le conducteur du petit magazin à poudre, dit Magazin du Laboratoire, ne tient pas l'eau qu'on y verse. C'est pourquoi il propose quelques changemens à faire à ce puits.

13°) Mr. l'Académicien *Zakharoff* chargé d'examiner un mémoire de Mr. le Conseiller de Collèges *Grindel*, remit son opinion contenant en substance: que les essais faits par Mr. *Grindel*, pour tirer de la liqueur sucrée de l'amidon, obtenue par la méthode de Mr. l'Académicien extraordinaire *Kirchhoff*, un esprit de vin semblable au Rum, sont dignes d'éloges; mais que d'autres Chymistes, et nomménient *Hermbstädt* et *Lampadius*, s'en sont déjà occupés; que de plus cela se pratique ici à St. Pétersbourg depuis as-

sez longtems dans quelques Apothicaireries, lesquelles en mettant en pratique ce même procédé, préparent pour leur usage cet esprit qui, quoiqu'il soit d'un assez bon goût, diffère pourtant sensiblement du Rum, sans que pour cela on puisse nier la possibilité de tirer de l'amidon un esprit qui lui ressemble, surtout après que le tems l'a amélioré.

14°) Mr. l'Académicien *Sévastianoff* présenta un rapport contenant en substance : qu'il s'est rendu, a Sarskoye-Selo, et qu'il y a examiné et fait dessiner les animaux apportés de Lima par le vaisseau le *Souvoroff*, savoir trois paires de Lamas, dont deux femelles sont pleines de 5 mois, un Apako, une Vigogne, un bâtard femmelle, issu d'un Guanako et d'une Vigogne, et enfin deux Tortuës. Un des trois Lamas mâles, de couleur blanche, avec des tâches noires à la tête, le plus grand de tous et le plus sauvage, ressemble au Camelus Huanacus de Schreber, avec la seule difference que son col est encore plus tortueux et que son dos est plus voûté. Aussi-a-t-il de grandes défenses de couleur jaunâtre, semblables a celles du porc. Aucun de ces animaux n'a les éperons que *Buffon* leur attribue. Quant aux tortues, Mr. *Sévastianoff* les a trouvées dans un état d'engourdissement, causé per le froid, leurs yeux étoient fermés et les pattes, ainsi que la tête, retirées sous l'écaille. Les ayant fait transporter dans un appartement chauffé et approcher du feu, elles ont montré les pattes et la tête.

15°) Mrs. les Académiciens *Storch* et *Sévastianoff* ayant été chargés, a la suite d'un ordre de M[gr]. le Ministre en fonction, d'examiner un manuscrit intitulé: *Картина важнѣйшихъ перемѣнъ въ политической системѣ Европы*, et de dire leurs avis, le premier sur le mérite de l'original (Tableau des révolutions du systeme politique de l'Europe depuis la fin du 15[me] siecle, par Mr. *Ancillon*), le second sur le mérite de la traduction du premier volume de cet ouvrage, faite par Mr. *Rogoff*, ils remirent leurs opinions. La substance en est: 1°. que l'original français mérite d'être traduit en entier, etant

généralement réconnu pour un des meilleurs ouvrages sur l'histoire moderne et ayant remporté les suffrages des connoisseurs tant en France qu'en Allemagne; 2°. que la traduction du 1r Tome de cet ouvrage, faite par Mr. *Rogoff*, quoi qu'assez bonne, renferme des tournures et des expressions qui ne sont pas propres à la langue Russe, et qu'elle s'éloigne par-ci par-là du sens de l'original, mais que ces imperfections pourront aisément être corrigées par le traducteur qui est doué de talens et de connoissances.

16°) Mr. l'Académicien *Krug* présenta son rapport sur un ouvrage manuscrit de Mr. *Orloff*: *Исторія царствованія Романовыхъ или торжествующей Россіи, съ предварительнымъ изображеніемъ прежняго ея состоянія какъ внѣшняго такъ и внутренняго, сочиненная Профессоромъ Яковомъ Орловымъ. Часть* I. II. III. sur lequel Mgr. le Ministre en fonction avoit demandé l'opinion de la Conférence. La substance en est: que l'auteur a ramassé un grand nombre de matériaux, bons et mauvais, comme le hazard les lui a fournis; que beaucoup d'objets très importans sont ou traités très-brièvement ou entièrement omis, tandis que d'autres, bien moins intéressans, le sont avec une grande prolixité; que l'auteur n'est pas impartial et que son ouvrage contient des malentendus qu'il auroit pu éviter. Non obstant ces défauts Mr. *Krug* pense que l'ouvrage de Mr. *Orloff*, s'il étoit imprimé sans l'introduction, trouveroit encore assez de lecteurs, surtout parmi la classe à la quelle les livres, où l'auteur a puisé, sont inaccessibles. Quant à l'introduction, qui contient un apperçu de l'état intérieur de la Russie depuis Ruric jusqu'à l'avènement au Throne du Tsar *Michailo Fedorovitch*, Mr. *Krug* croit qu'elle ne sauroit être imprimée telle qu'elle est, parcequ'elle fourmille d'erreurs historiques, de fausses citations et d'anachronismes grossiers, ce qu'il prouve par un grand nombre d'exemples, qu'il auroit pu augmenter encore considérablement, s'il eut voulu grossir son rapport.

VII.

VOYAGE SCIENTIFIQUE EXÉCUTÉ PAR ORDRE DE L'ACADÉMIE.

Mr. l'Académicien extraordinaire *Wisnievski* fit en 1815 sa dernière excursion et acheva ainsi son voyage astronomique qui a duré huit ans, et dont le résultat sera la détermination plus exacte de la position géographique de près de quatre-cens points de la Russie Européenne, voyage entrepris dans la vue de perfectionner la Géographie de l'Empire. Le Dépot IMPERIAL des cartes en a déjà profité, pour donner plus de correction à ses travaux, et il en profitera mieux encore, lorsque tous les calculs des observations innombrables que Mr. *Wisnievski* a instituées, seront achevés.

VIII.

OUVRAGES PUBLIÉS PAR L'ACADÉMIE.

1°) Mémoires de l'Académie IMPÉRIALE des Sciences de St. Pétersbourg. Tome V, avec l'Histoire de l'Academie pour l'an 1812. St. Pétersbourg 1815. 4°.

2°) Умозрительныя Изслѣдованія Императорской Санктпетербургской Академіи Наукъ. Томъ IV. С. П. бургъ 1815. 4°.

3°) Технологическій Журналъ. Томъ XII. Часть I. II. III. IV. съ фигурами. С. П. бургъ 1815. 8°.

4°) Untersuchungen zur Erläuterung der ältern Geschichte Rufslands, von A. C. Lehrberg. Herausgegeben von der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften durch Ph. Krug. St. Petersburg 1816. 4°.

5°) Novi Commentarii Academiae Scientiarum IMPERIALIS Petropolitanae. Tom. XV. pro anno MDCCLXX. 4°. Editio secunda.

6°) Продолженіе Технологическаго Журнала состоящее изъ Ученыхъ Извѣстій и пр. Тома I-го Часть I. II. III. IV. С. П. бургъ 1816. 8°.

7°) Новая Система Минераловъ, основанная на наружныхъ отличительныхъ признакахъ; сочиненная Василіемъ Севергинымъ. С. П. бургъ 1816. 12°.

IX.

QUESTIONS PROPOSÉES PAR L'ACADÉMIE.

L'Académie avoit proposé dans son dernier programme une question astronomique, concernant la quantité précise des diamètres du soleil et de la lune, pour laquelle le terme de concours avoit été fixé au 1 Janvier 1814, et une question historique, relative à la chronologie comparée et vérifiée des Auteurs Byzantins, qui avoit eu pour terme de concours le 1 Janvier 1815. N'ayant reçu aucune réponse à ces questions, quoique l'une et l'autre eut été proposée pour la seconde fois, l'Académie a résolu de proposer deux autres questions cette année, et parmi les sujets qui ont été soumis à son choix, les problemes suivans ont obtenu la préférence.

I. *Question de Chimie.*

On ne sauroit nier que, non obstant les recherches multipliées, instituées sur le mélange des alkalis et des terres, si nous en exceptons la potasse et la soude, les autres nous laissent encore beaucoup à désirer, pour arriver à une connoissance complète des espèces de métalloides réellement existantes.

L'Académie, convaincue de l'importance de ce sujet, d'où dépendent les progrès ultérieurs des sciences physiques, propose un prix qui sera adjugé au Physicien qui lui aura communiqué la série la plus satisfaisante d'expériences propres, instituées sur les mélanges des alkalis et des terres qui jusqu'ici n'ont point encore été complètement examinées.

L'Académie désire de diriger l'attention des Physiciens principalement sur les points suivans:

1°) Faire la révision de toutes les expériences instituées sur le kali et le natron, et sur les bases métalliformes qui y

sont contenues, et examiner plus exactement les résultats qu'on en a tirés.

2°) Soumettre l'ammoniaque à un examen particulier et plus soigneux, afin de prouver d'une manière décisive laquelle des opinions émises sur son mélange est la mieux fondée, et si le prétendu métalloide qu'il contient peut être représenté isolément.

3°) Examiner, d'une manière plus complète qu'on ne l'a fait jusqu'ici, les substances métalliformes des différentes terres; voir si elles peuvent être produites dans leur état pur et isolé; connoître leurs propriétés, tant dans cet état, que dans la combinaison avec d'autres substances, et indiquer les rapports différens et déterminés dans lesquels elles peuvent être présentées.

Outre le prix, qui sera décerné à l'auteur du mémoire le plus satisfaisant, l'Académie lui promet un nombre de cent exemplaires du mémoire couronné en dédommagement des fraix que pourront occasionner les expériences a faire sur les terres rares.

II. *Question d'Economie politique et de Statistique.*

Donner un précis complet et raisonné du système d'imposition établi en Russie sous le règne du Tsar *Alexis.*

L'Académie, en proposant cette question, a en vue de préparer la comparaison de l'etat actuel des finances de l'Empire avec celui qui a précédé le regne réformateur de *Pierre le Grand.* Pour parvenir à ce but, elle desire que la question soit envisagée sous tous les points de vue qui peuvent fournir des rapprochemens entre ces deux époques. Elle s'attend d'abord à voir déterminée la valeur des especes, qui avoient cours du tems du Tsar *Alexis* et dans lesquelles se payaient les impôts. Dans cette détermination il ne s'agira pas seulement de la valeur numérique des monnaies, ou de la quantité du metal fin qu'elles contenaient, mais encore de

leur valeur réelle, ou de la quantitité de blé et de choses de première nécessité qu'elles pouvaient alors acheter. L'influence des changemens apportés au système monétaire, pendant la durée de ce règne, est encore un objet d'une grande importance et qui mérite une attention particulière. Ce n'est qu'après avoir déterminé préalablement la valeur du numéraire, qu'on pourra passer à l'objet principal de la question, savoir à l'analyse des impôts établis à cette époque. Pour mettre de l'ordre dans cette recherche, il sera convenable de classer les impôts suivant leur nature: impôts directs et impôts indirects; impôts perçus en argent et impôts prélevés en denrées. On examinera en détail ces différentes branches, la manière de les percevoir, les autorités chargées de les recueillir, les lois fiscales relatives à leur perception, la forme de la régie et des fermes, les fraix de perception, enfin le produit total de chaque espèce d'impôts, et son produit net, c'est-à-dire son produit déduction faite des fraix de perception. Si les données qu'on pourra rassembler sur ces objèts, étoient assez completes pour en tirer un résultat général, il seroit à désirer qu'il fut présenté dans une évaluation du montant total des revenus de l'État.

L'Académie croit inutile d'ajouter qu'une pareille exposition historique et statistique ne mérite de confiance qu'autant qu'elle est appuyée sur des preuves et des authorités, et qu'en conséquence elle s'attend à les voir citées dans les écrits qui lui seront présentés sur cette question.

Le prix est de cent ducats d'Hollande pour la meilleure réponse à chacune de ces deux questions, et le terme de rigueur, apres l'expiration duquel aucun mémoire ne sera plus admis au concours, est le 1 Janvier 1818.

L'Académie invite les Savans de toutes les nations, sans en exclure ses membres honoraires et ses Correspondans, à concourir pour ces prix. Les Académiciens seuls, appellés à faire la fonction de juges, sont exclus du concours.

Les auteurs n'écriront point leurs noms sur leurs ouvrages, mais seulement une sentence ou dévise, et ils ajouteront à leurs mémoires un billet cacheté, qui portera au dehors la même dévise et au dedans le nom, la qualité et la demeure de l'Auteur. On n'ouvrira que le billet de la pièce couronnée; les autres seront brûlés, sans avoir été décachetés.

Les mémoires doivent être écrits d'un caractère lisible, soit en russe, en français, en allemand ou en latin, et ils seront adressés au Secrétaire perpétuel de l'Académie, qui délivrera à la personne qui lui aura été indiquée par l'auteur anonyme, un récipissé marqué de la dévise et du numéro dont il aura cotté la pièce.

Le mémoire couronné est une propriété de l'Académie et l'auteur ne sauroit le faire imprimer nulle-part sans sa permission formelle. Les autres pièces de concours peuvent être redemandées au Secrétaire, qui les remettra, ici à St. Pétersbourg, à la personne qui se présentera chez lui avec une procuration de l'auteur.

I.
SECTION
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES.

PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE

RÉSOLU

PAR L'ANALYSE DE DIOPHANTE.

PAR

M. L. EULER.

Présenté à la Conférence le 4 Mars 1782.

§. 1.

Le sujet du problème dont il s'agit dans ce mémoire, est tiré de la Trigonométrie rationnelle. On demande les trois côtés x, y, z, d'un triangle dont les lignes tirées des angles par le centre de gravité du triangle soyent toutes trois exprimées en nombres rationnels; c'est-à-dire: on demande trois nombres x, y, z, tels que

$$2xx + 2yy - zz = \Box$$
$$2yy + 2zz - xx = \Box$$
$$2zz + 2xx - yy = \Box.$$

J'ai déjà donné, à différentes reprises, des solutions de ce problème, sans qu'aucune m'ait entièrement satisfait. Celle que je présente ici réunit, à beaucoup d'élégance, la plus grande généralité. Mais avant d'entrer en matière il sera bon de faciliter la solution par le Lemme suivant:

LEMME.

§. 2. Deux nombres de la forme :

$$A^2 + 2PAB + B^2 \text{ et } A^2 + 2QAB + B^2,$$

seront toujours quarrés, lorsque

$$A = 4(P+Q) \text{ et } B = (P-Q)^2 - 4.$$

Démonstration.

Multiplions l'une de ces formes par l'autre, et nous aurons le produit suivant :

$$A^4 + 2(P+Q)A^3B + 2(2PQ+1)A^2B^2 + 2(P+Q)AB^3 + B^4.$$

Soit la racine de cette quantité quarrée

$$A^2 + (P+Q)AB - B^2,$$

et puisque le quarré est

$$A^4 + 2(P+Q)A^3B + [(P+Q)^2 - 2]A^2B^2 - 2(P+Q)AB^3 + B^4,$$

en comparant cette forme avec la précédente on voit què, pour que l'une soit égale à l'autre, il faut que

$$((P-Q)^2 - 4)A = 4(P+Q)B,$$

donc $A = 4(P+Q)$ et $B = (P-Q)^2 - 4$.

Substituant ces valeurs dans l'une ou l'autre des deux formes du lemme, elle devient un quarré. Par exemple la premiere, en y faisant ces substitutions, deviendra :

$$16(P+Q)^2 + 2P[4(P+Q)(P-Q)^2 - 16(P+Q)] + (P-Q)^4 - 8(P-Q)^2 + 16,$$

où il faut remarquer que

$$(P-Q)^4 + 8P(P+Q)(P-Q)^2 = (P-Q)^2(3P+Q)^2,$$
$$16(P+Q)^2 + 32P(P+Q) - 8(P-Q)^2 = -8(P-Q)(3P+Q).$$

De cette façon la forme se reduit à

$$((P-Q)(3P+Q) - 4)^2.$$

Or le produit des deux formes du lemme étant un quarré et la premiere l'étant aussi, il est clair que l'autre forme doit être né-

cessairement de même un quarré. Aussi la racine se trouvera-t'elle, par des procédés semblables, être $(Q - P)(3Q + P) - 4$.

Corollaire.

§. 3. À l'égard des valeurs de A et B il faut remarquer: 1°) qu'à cause de la permutabilité évidente de ces deux quantités, on pourra aussi faire :

$$A = (P - Q)^2 - 4 \quad \text{et} \quad B = 4(P + Q);$$

2°) que ces valeurs peuvent être simplifiés dans certains cas. Car puisque $(P - Q)^2 = (P + Q)^2 - 4PQ$, en mettant cette valeur dans l'expression de B, on aura $B = (P + Q)^2 - 4(PQ + 1)$, de sorte que, toutes les fois que $PQ + 1 = n(P + Q)$, on pourra diviser A et B par le même nombre $P + Q$, et on aura $A = 4$ et $B = P + Q - 4n$. Quant aux racines des deux formes proposées, savoir

$$(P - Q)(3P + Q) - 4 \quad \text{et} \quad (Q - P)(3Q + P) - 4,$$

comme la premiere peut être représentée par

$$(P + Q)(P - Q) + 2P(P - Q) - 4,$$

et que $2P(P - Q) - 4 = 2P(P + Q) - 4(PQ + 1)$, à cause de $PQ + 1 = n(P + Q)$ on pourra diviser par $P + Q$, de sorte que la racine de la premiere forme $= 3P - Q - 4n$, et, à cause de la permutabilité de P et Q la racine de l'autre forme sera $3Q - P - 4n$.

Solution du Problème proposé.

§. 4. Soit
$$2xx + 2yy - zz = pp$$
$$2xx + 2zz - yy = qq$$
$$2yy + 2zz - xx = rr$$

et en mettant $xx + yy + zz = s$, on aura

$$pp + 3zz = qq + 3yy = rr + 3xx = 2s.$$

Ensuite on trouve aussi que

$$2pp + 2qq - rr = 9xx$$
$$2pp + 2rr - qq = 9yy$$
$$2qq + 2rr - pp = 9zz.$$

Quoique ces propriétés ne contribuent en aucune manière à la sosution du Problème, elles méritoient bien d'être remarquées ici en passant. Quant à la solution même, elle se déduit des opérations suivantes :

§. 5. Prenons la différence de la premiere et seconde de nos trois équations fondamentales, qui sera

$$pp - qq = 3(yy - zz),$$

ou bien, en facteurs on aura

$$(p + q)(p - q) = 3(y + z)(y - z).$$

Soit $p + q = \frac{3a}{b}(y - z)$

$p - q = \frac{b}{a}(y + z)$

et la somme des quarrés sera

$$(p+q)^2 + (p-q)^2 = 2pp + 2qq = \frac{9aa}{bb}(y-z)^2 + \frac{bb}{aa}(y+z)^2.$$

Or les équations fondamentales donnent

$$2pp + 2qq = 8xx + 2yy + 2zz, \text{ ou bien}$$
$$2pp + 2qq = 8xx + (y + z)^2 + (y - z)^2,$$

d'où l'on tire cette équation entre x, y, z :

$$\frac{9aa}{bb}(y - z) + \frac{bb}{aa}(y + z) = 8xx + (y + z)^2 + (y - z)^2,$$

qui peut aussi être représentée ainsi :

$$8xx = \frac{9aa - bb}{bb}(y - z)^2 + \frac{bb - aa}{aa}(y + z)^2.$$

§. 6. La troisième équation fondamentale $2yy + 2zz - xx = rr$ se transforme aisément en celle-ci :

$$(y + z)^2 + (y - z)^2 - xx = rr,$$

qui multipliée par 8 devient

$$8rr = 8(y + z)^2 + 8(y - z)^2 - 8xx$$

équation qui, si l'on met à la place de $8xx$ la valeur trouvée au précédent §, sera

$$8rr = \frac{9(bb-aa)}{bb}(y-z)^2 + \frac{9aa-bb}{aa}(y+z)^2.$$

§. 7. Mettons maintenant

$$y + z = a(c + d);$$
$$y - z = b(c - d);$$

et les deux expressions trouvés pour $8xx$ et $8rr$ prendront les formes suivantes :

$$2xx = 2aa(cc + dd) + cd(bb - 5aa);$$
$$2rr = 2bb(cc + dd) + cd(9aa - 5bb);$$

qui, divisées l'une par $2aa$ et l'autre par $2bb$, donneront :

$$\frac{xx}{aa} = cc + dd + \frac{bb-5aa}{2aa}.cd;$$
$$\frac{rr}{bb} = cc + dd + \frac{9aa-5bb}{2bb}.cd.$$

§. 8. En comparant ces deux expressions avec les formes du lemme, nous verrons que $A = c$, $B = d$,

$$P = \frac{bb-5aa}{4aa} \text{ et } Q = \frac{9aa-5bb}{4bb}.$$

De ces valeurs on déduit aisément :

$$n(P+Q) = \frac{n(b^4 - 10aabb + 9a^4)}{4aabb};$$
$$PQ + 1 = -\frac{5}{4}\frac{(b^4 - 10aabb + 9a^4)}{4aabb};$$
$$\text{donc } n = -\frac{5}{4}.$$

§. 9. Or en vertu du corollaire §. 3. il y a $A = 4$ et $B = P + Q - 4n$, donc $c = 4$ et $d = \frac{(9aa+bb)(aa+bb)}{4aabb}$, portant

$$y + z = \frac{a(16aabb + (9aa+bb)(aa+bb))}{4aabb};$$
$$y - z = \frac{b(16aabb - (9aa+bb)(aa+bb))}{4aabb};$$

Et puisque, en vertu du même corollaire,

$$\frac{x}{a} = 3P - Q - 4n \text{ et } \frac{r}{b} = 3Q - P - 4n,$$

nous aurons aussi

$$x = \frac{a((9aa + bb)(aa + bb) - 2(9a^4 - b^4))}{4aabb};$$

$$r = \frac{b[(9aa + bb)(aa + bb) + 2(9a^4 - b^4)]}{4aabb}.$$

Enfin on aura

$$p + q = \frac{3a}{b}(y - z);$$

$$p - q = \frac{b}{a}(y + z).$$

§. 10. Mettons pour abrêger

$$C = 16aabb;$$

$$D = (9aa + bb)(aa + bb);$$

$$F = 2(9a^4 - b^4);$$

et en supprimant le diviseur commun $4aabb$, nous aurons

$x = a(D - F)$	$r = b(D + F)$
$y + z = a(C + D)$	$p + q = 3a(C - D)$
$y - z = b(C - D)$	$p - q = b(C + D).$

Exemple 1.

§. 11. Soit $a = 1$ et $b = 2$, et on aura $C = 64$, $D = 65$, $F = -14$, donc

$x = 79$	$r = 102$
$y + z = 129$	$p + q = -3$
$y - z = -2$	$p - q = 258$

par consequent on aura

$x = 79$	$p = \frac{255}{2}$
$y = \frac{127}{2}$	$q = \frac{261}{2}$
$z = \frac{131}{2}$	$r = 102.$

Exemple 2.

§. 12. Soit $a = 2$ et $b = 1$, de sorte que $C = 64$, $D = 185$ et $F = 286$, donc

$x = -202$	$r = +471$
$y + z = +498$	$p + q = -726$
$y - z = -121$	$p - q = +249.$

On aura donc

$x = 202$	$p = \frac{477}{2}$
$y = \frac{377}{2}$	$q = \frac{975}{2}$
$z = \frac{619}{2}$	$r = 471.$

§. 13. Si l'on veut avoir des solutions en nombres entiers, il est évident qu'on n'a qu'à multiplier par 2 tous les six nombres de chacun des deux exemples précédens. En voila encore quelques solutions :

68	87	85
158	127	131
159	325	314
619	377	404
477	277	446
569	881	640.

DE CASIBUS QUIBUS FORMULAM

$x^4 + mxxyy + y^4$

AD

QUADRATUM REDUCERE LICET.

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhibuit die 2 Maji 1782.

§. 1. Hujus formulae jam dudum Analystis casus innotuere nonnulli, quibus eam nullo modo ad quadratum revocare licet, paucissimis casibus exceptis, quibus una vel altera litterarum x et y evanescit, vel ambae sunt inter se aequales. Priore enim casu formula proposita semper esset quadratum, quicquid fuerit m; altero casu vero, quia, posito $x = y = 1$, formula fit $m + 2$, casus idonei forent $m = ii - 2$, ex quibus autem casibus plerumque alios eruere non licet. Hic igitur ejusmodi valores pro m investigare constitui integri, sive positivi sive negativi, pro quibus innumerabiles litterarum x et y valores exhiberi queant, siquidem methodus constat ex quovis casu cognito alios eruendi. Casus autem, quibus jam demonstratum est hoc neutiquam fieri posse, sunt potissimum $m = \pm 1$ et $m = \pm 6$, quibus addere licet $m = 7$ et $m = 14$. Ceterum sponte patet, si fuerit $m = \pm 2$, formulam semper esse quadratum, quicunque valores litteris x et y tribuantur.

§. 2. Quod si jam ponamus $x^4 + mx^2y^2 + y^4 = zz$, erit $m = \frac{zz - x^4 - y^4}{xxyy}$, quae formula utique omnes valores idoneos pro m in se complectitur. Verum quia mihi propositum est in ejus

tantum valores integros inquirere, hanc expressionem a fractionibus liberari oportet, quod fit ponendo $z = axxyy - (xx \pm yy)$; tum enim fit $m = a^2xxyy - 2a(xx \pm yy) \pm 2$, quae expressio ad hanc formam reducitur: $m = (axx \mp 2)(ayy - 2) \mp 2$, unde fit $m \pm 2 = (axx \pm 2)(ayy - 2)$, quae formula jam innumerabiles valores integros pro m praebet, siquidem pro a, x, y numeri quicunque integri accipiantur.

§. 3. At vero etiam numeri integri hinc prodire possunt, etiamsi litterae a valores fracti tribuantur, quos igitur potissimum hic investigare convenit. Patet autem hoc infinitis modis evenire posse, quando x et y fuerint numeri compositi. Hunc in finem statuamus $x = pq$ et $y = rs$; tum vero ponatur $a = \frac{b}{pprr}$. Hoc enim modo obtinebimus $m \pm 2 = \frac{(bqq \mp 2rr)(bss - 2pp)}{pprr}$; ubi, quia p, q et r, s sunt numeri inter se primi, alio modo ad numeros integros pervenire non licet, nisi prior numeratoris factor divisionem admittat per pp, alter vero per rr; unde hanc expressionem ita repraesentari oportet: $m \pm 2 = \frac{bqq \mp 2rr}{pp} \times \frac{bss - 2pp}{rr}$, quarum fractionum utraque numerus integer evadere debet.

§. 4. Incipiamus a posteriore et ponamus $bss - 2pp = crr$, ita ut $bss - crr = 2pp$. Statuamus porro $bss + crr = 2n$, ut fiat $bss = n + pp$ et $crr = n - pp$, ita ut sit $bcrrss = nn - p^4$. Faciamus $bc = \lambda$, et quia $rs = y$, erit $nn - p^4 = \lambda yy$. Sumtis igitur pro lubitu numeris n et p, erit yy maximus factor quadratus formulae $nn - p^4$, et littera λ exprimet reliquum factorem.

§. 5. Quia igitur fecimus $\frac{bss - 2pp}{rr} = c$, erit nunc $m \pm 2 = \frac{bcqq \mp 2crr}{pp}$. Erat autem $crr = n - pp$, quo valore substituto, ob $bc = \lambda$, habebimus hanc formulam satis concinnam: $m \pm 2 = \frac{\lambda qq \mp 2n \pm 2pp}{pp}$, ex qua colligitur $m = \frac{\lambda qq \mp 2n}{pp}$, ubi, quia

numeros n et p, una cum λ, tanquam cognitos spectamus, pro q ejusmodi valores quaeri oportet, ut $\lambda qq \mp 2n$ divisionem admittat per pp. Interim tamen ratione numeri p evenire potest, ut hoc praestari nequeat; unde imprimis curare debemus, ut pro p ejusmodi numeros assumamus, unde valores integri pro m prodeant.

§. 6. Electis igitur pro litteris n et p numeris ad libitum, formulae $nn - p^4$ maximus factor quadratus sumatur pro yy, factor vero non quadratus pro λ, tum pro q ejusmodi investigantur valores, ut fiat $m = \frac{\lambda qq \pm 2n}{pp}$ numerus integer; quod si fuerit praestitum, habebitur $x = pq$; praeterea vero, ob $y = rs$ et $a = \frac{b}{pprr}$, formula pro z assumta evadet

$$z = axxyy - (xx \pm yy) = bqqss - ppqq \mp rrss.$$

Erat autem $bss = n + pp$, quo substituto fit

$$z = nqq \mp rrss = nqq + yy.$$

In his formulis omnes plane valores, quos quaerimus pro m, necessario erunt contenti.

§. 7. Istae autem formulae pluribus modis mutari possunt, quorum sequens potissimum ad calculum est accommodatus. Ponendo scilicet $n = 2i$, $p = 2t$, $q = 2u$, $y = 2v$, erit $x = 4tu$. Tum autem ista habebitur formula canonica: $ii - 4t^4 = \lambda vv$, fietque $m = \frac{\lambda uu \mp i}{tt}$. Facta jam substitutione reperitur $z = 8iuu \mp 4vv$. Quia igitur tantum ratio inter x et y in computum ingreditur, si eos valores ad dimidium redigantur, ut fiat $x = 2tu$ et $y = v$, tum z reducetur ad partem quartam, cum fiat $z = 2iuu \mp vv$.

§. 8. Etsi posterior solutio ex priore derivata est, tamen ea latius patet, quoniam in valore ipsius m signum ambiguum etiam numeros impares afficere potest, dum in priore tantum pares afficit, atque prior in posteriore contineatur, quando i est numerus par. Quamobrem sola solutione posteriore uti conveniet. Ac ne multitudo litterarum calculum confundat, hanc solutionem sequenti modo constituamus.

§. 9. Sumtis pro lubitu binis numeris pro n et p, fiat

$$n^2 - 4p^4 = (n + 2pp)(n - 2pp) = \lambda yy,$$

ubi yy maximum factorem quadratum denotat in hac formula contentum, λ vero factorem non quadratum, sicque statim altera variabilium x et y innotescit. Tum vero erit $m = \frac{\lambda qq \pm n}{pp}$, ubi q ita accipi debet, ut iste numerus fiat integer, quo facto habebitur $x = 2pq$, $z = 2nqq \pm yy$. Hic autem, ob rationes jam allegatas, casus excludi debent, quibus fit $x = y$, quia scilicet inde novos valores pro x et y eruere non liceret.

§. 10. Veritas hujus solutionis ex ipsa formula proposita $zz = x^4 + mxxyy + y^4$ immediate sequenti modo ostendi potest. Cum enim sit $4p^4 = nn - \lambda yy$ et $mpp = \lambda qq \pm n$, ob $x = 2pq$ habebimus $x^4 = 16p^4q^4 = 4nnq^4 - 4\lambda q^4yy$. Porro erit membrum

$$mxxyy = 4mppqqyy = 4\lambda q^4yy \pm 4nqqyy, \text{ unde}$$

$$zz = 4nnq^4 \pm 4nqqyy + y^4 = (2nqq \pm yy)^2.$$

Jam pro variis valoribus, qui pro p assumi possunt, sequentes casus evolvamus.

Evolutio casus primi, quo $p = 1$.

§. 11. Hoc igitur casu primo habebimus $nn - 4 = \lambda yy$; deinde erit in integris $m = \lambda qq \pm n$, tum vero erit $x = 2q$ et $z = 2nqq \pm yy$. Unde pro variis valoribus loco n assumtis plures solutiones nascuntur, quarum praecipuas, simpliciores quidem, in sequenti tabula ab oculos ponamus:

n	y	λ	m	x	z
0	2	-1	$-\ qq \pm 0$	$2q$	$0\,qq \pm 4$
1	1	-3	$-3\,qq \pm 1$	$2q$	$2\,qq \pm 1$
2	y	0	$+0\,qq \pm 2$	$2q$	$4\,qq \pm yy$
3	1	5	$5\,qq \pm 3$	$2q$	$6\,qq \pm 1$
4	2	3	$3\,qq \pm 4$	$2q$	$8\,qq \pm 4$
5	1	21	$21\,qq \pm 5$	$2q$	$10\,qq \pm 1$
6	4	2	$2\,qq \pm 6$	$2q$	$12\,qq \pm 16$
7	3	5	$5\,qq \pm 7$	$2q$	$14\,qq \pm 9$
8	2	15	$15\,qq \pm 8$	$2q$	$16\,qq \pm 4$
9	1	77	$77\,qq \pm 9$	$2q$	$18\,qq \pm 1$
10	4	6	$6\,qq \pm 10$	$2q$	$20\,qq \pm 16$
11	3	13	$13\,qq \pm 11$	$2q$	$22\,qq \pm 9$
12	2	35	$35\,qq \pm 12$	$2q$	$24\,qq \pm 4$

Quam tabulam, prout necessitas postulat, facile ulterius continuare licet.

§. 12. Quaelibet harum solutionum, ob numerum q arbitrio nostro relictum, innumerabiles suppeditat valores pro numero m, qui adeo, ob signum ambiguum ipsius m, duplicantur. At vero meminisse oportet, hinc casus excludi debere quibus fit $x = y$. Tota ceterum haec evolutio mira facilitate expediri potest. Quod ut exemplo ostendamus, sumamus $n = 7$ et $q = 4$, et pro signo inferiore habebimus $m = 73$, $y = 3$ et $x = 8$; tum vero $z = 215$. Erit igitur $8^4 + 73 \,.\, 9 \,.\, 64 + 81 = 215^2$, quod egregie congruit.

§. 13. Ex his formulis valores pro littera m computavi, ubi quidem tantum ad numeros positivos respexi eosque omnes infra 200 in sequenti tabula exhibeo:

Catalogus valorum litterae m *ex casu* p = 1 *desumtorum*

2, 8, 12, 13, 16, 17, 23, 24, 26, 27, 31, 33, 36, 38, 41, 42, 44, 48, 49, 52, 55, 56, 61, 63, 64, 66, 67, 68, 71, 73, 77, 78, 79, 83, 84, 86, 87, 89, 90, 91, 94, 95, 96, 100, 104, 106, 107, 112, 118, 122, 127, 128, 131, 132, 133, 134, 135, 137, 140, 143, 151, 153, 156, 159, 160, 162, 166, 168, 169, 171, 172, 173, 174, 177, 178, 183, 184, 187, 188, 191, 194, 196, 197, 198, 199, 200.

§. 14. Formulae illae, ex quibus hi numeri sunt derivati, eo magis sunt faecundae, quo minor fuerit numerus λ, atque adeo, in quibus haec littera λ majorem habet valorem, eae prorsus ad hunc finem sunt inutiles. Quamobrem plurimum intererit eas formulas, ubi λ est numerus satis parvus, hic apponere

$m = 2qq \pm (6,\ 34,\ 198,\ 1154,\ \text{etc.})$
$y = 4,\ 24,\ 140,\ 816,\ \text{etc.}$

$m = 3qq \pm (4,\ 14,\ 52,\ 194,\ 724,\ 2702,\ \text{etc.})$
$y = 2,\ 8,\ 30,\ 112,\ 418,\ 1560,\ \text{etc.}$

$m = 5qq \pm (3,\ 7,\ 18,\ 47,\ 123,\ 322,\ 843,\ \text{etc.})$
$y = 1,\ 3,\ 8,\ 21,\ 55,\ 144,\ 377,\ \text{etc.}$

$m = 6qq \pm (10,\ 98,\ 970,\ 9602,\ \text{etc.})$
$y = 4,\ 40,\ 396,\ 3920,\ \text{etc.}$

$m = 7qq \pm (16,\ 254,\ 4048,\ \text{etc.})$
$y = 6,\ 96,\ 1530,\ \text{etc.}$

$m = 10qq \pm (38,\ 1442,\ \text{etc.})$
$y = 12,\ 456,\ \text{etc.}$

$m = 11qq \pm (20,\ 398,\ \text{etc.})$
$y = 6,\ 120,\ \text{etc.}$

$m = 15qq \pm (8,\ 62,\ 488,\ \text{etc.}$
$y = 2,\ 16,\ 126,\ \text{etc.}$

Quoniam numeri supra dati ex solo casu $p = 1$ sunt deducti, nisi reliqui casus praeterea alios praebeant, omnes illos numeros, qui in catalogo non continentur, iis forent adnumerandi, de quibus demonstratum est formulam propositam nunquam quadratum reddi posse, id quod mox accuratius explorabimus.

Evolutio casus secundi, quo $p = 2$.

§. 15. Hic ergo erit $nn - 64 = \lambda yy$ et $m = \frac{\lambda qq \pm n}{4}$, $x = 4q$ et $z = 2nqq \pm yy$; ubi statim evidens est pro n nullos numeros impariter pares, seu formae $4i + 2$, accipi posse, quia alioquin m nullo modo integer fieri posset. At si pro n numerus pariter par sumeretur, etiam q par esse deberet, ac tum formula pro m data jam in casu praecedente contineretur; unde patet pro n non nisi numeros impares accipi debere. Sumto igitur $n = 1$ erit $\lambda yy = -63$, ideoque $\lambda = -7$ et $y = 3$, unde habebitur $m = \frac{-7qq \pm 1}{4}$, ubi solum signum inferius valebit; pro q vero numeros impares assumi conveniet. Posito igitur $q = 2t + 1$ reperitur $m = -7 \cdot (tt + t) - 2$, unde tantum numeri negativi resultant. Tum autem erit $x = 4(2t + 1)$ et $z = 2(2t + 1)^2 - 9$.

§. 16. Quo autem numeros positivos non nimis magnos obtineamus, sumamus $n = 17$, eritque $nn - 64 = 9 \cdot 25 = \lambda yy$; unde fit $\lambda = 1$ et $y = 15$; tum vero erit $m = \frac{qq - 17}{4}$, $x = 4q$ et $z = 34qq - 225$. Statuatur $q = 1 + 2t$, erit in integris $m = tt + t - 4$, tum vero $x = 4(1 + 2t)$ et $z = 34(1 + 2t)^2 - 225$. Hinc pro valoribus

$t = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,$ etc.
nascitur $m = 2, 2, 8, 16, 26, 38, 52, 68, 86, 106, 128, 152,$ etc.
qui autem numeri omnes, solo ultimo excepto, in superiore catalogo continentur.

§. 17. Simili ratione casus, quibus sumitur $p = 3, 4, 5, 6$, etc. tractari possent. Numeri autem qui pro m inveniuntur plerumque jam in superiore tabula reperiuntur. Hic autem adhuc adjiciam casus nonnullos, qui novos valores pro n praebent, inter quos praecipue summam attentionem meretur casus $m = 60$, qui praeter omnem expectationem se obtulit posito $p = 7$, ita ut

$nn - 4 \cdot 7^4 = (n - 98)(n + 98) = \lambda yy$ et $m = \frac{\lambda qq \pm n}{49}$;

tum vero $x = 14q$ et $z = 2nqq \pm yy$. Sumsi autem $n = 102$, ut fieret $\lambda yy = 4 \cdot 200$, unde fit $\lambda = 2$ et $y = 20$, hincque colligitur $m = \frac{2qq \pm 102}{49}$, qui numerus evadit integer, sumendo $q = 39$ et adhibendo signum inferius; prodit enim $m = 60$, ubi $x = 14 \cdot 39$ et $y = 20$, sive semisses sumendo, $x = 273$ et $y = 10$.

§. 18. Eodem modo novum valorem $m = 189$ erui ex casu $p = 8$, unde fiit $\lambda yy = (n - 128)(n + 128)$. Sumsi igitur $n = 297$, ut fieret $\lambda yy = 169 \cdot 425$, sive $\lambda yy = 17 \cdot 25 \cdot 169$, ita ut $\lambda = 17$ et $y = 5 \cdot 13 = 65$. Tum vero erit $m = \frac{17qq \pm 297}{64}$, quae expressio ad numerum integrum perducit, ponendo $q = 27$; fit enim $m = 189$, pro quo valore erit $x = 16 \cdot 27$, $y = 65$, $z = 594 \cdot 27^2 - 65^2$.

§. 19. Catalogo valorum idoneorum pro m etiam hos adnumerandos esse deprehendi: $m = 99$, $m = 145$ et $m = 155$. Priore casu fit $x = 312$, $y = 215$, $z = 676081$, secundo casu $x = 159$, $y = 40$ et tertio $x = 104$, $y = 95$. Neque tamen asseverare ausim me hoc modo omnes valores pro m infra 200 obtinuisse, cum formulae tantopere complicatae perduxerint ad novos valores infra 200. Hinc patet istam investigationem maxime esse arduam.

SUPPLEMENTUM

De valoribus numeri m, *ut haec formula* $x^4 - mxxyy + y^4$ *fiat quadratum.*

§. 20. Evidens est hoc negotium per formulas supra datas

expediri posse, si modo littera m ibi negative capiatur; hocque modo id commodi nanciscimur, ut pleraeque illarum formularum, ubi $\lambda > n$, nullum usum praestent; in quibus autem $\lambda < n$, inde certus tantum valorum numerus deduci possit. Omnes autem casus in sequentibus formulis continentur:

Casus	m	x	y
$a = 1$, $c = 2$	$2 + 15s + 15ss$	1	$4(1 + 2s)$
	$2 + 15s + 60ss$	7	$8(1 + 8s)$
	$2 + 45s + 240ss$	33	$16(1 + 32s)$
$a = 3$, $c = 2$	$2 + 7s + 7ss$	3	$4(1 + 2s)$
	$2 + 21s + 28ss$	3	$8(3 + 8s)$
	$2 + 35s + 112ss$	45	$16(5 + 32s)$
$a = 2$, $c = 2$	$2 + 16s + 18ss$	8	$6(4 + 9s)$
	$2 + 32s + 162ss$	112	$18(8 + 81s)$
$a = 4$, $c = 3$	$2 + 20s + 45ss$	8	$6(2 + 9s)$
	$2 + 80s + 405ss$	16	$18(8 + 81s)$
$a = 5$, $c = 3$	$2 + 225s + 99ss$	5	$6(1 + 9s)$
$c = 5$	$2 + 66s + 275ss$	3	$10(3 + 25s)$
	$9 + 88s + 275ss$	3	$10(4 + 25s)$
	$2 + 48s + 150ss$	8	$10(4 + 25s)$
	$4 + 36s + 150ss$	8	$10(3 + 25s)$
	$2 + 12s + 25ss$	48	$10(6 + 25s)$
	$2 + 16s + 25ss$	48	$10(8 + 25s)$
$c = 6$	$2 + 23s + 207ss$	11	$12(1 + 18s)$
$c = 7$	$2 + 48s + 147ss$	16	$14(8 + 49s)$
	$2 + 60s + 245ss$	24	$14(6 + 49s)$
	$2 + 30s + 147ss$	55	$14(5 + 49s)$
	$2 + 18s + 147ss$	39	$14(3 + 49s)$
$c = 13$	$2 + 20s + 169ss$	240	$26(10 + 169s)$
	$2 + 48s + 169ss$	240	$26(24 + 169s)$

§. 21. Ex his formulis sequentes valores ipsius m, cum suis x et y, ad terminum 200 usque computavi:

$m =$	32,	92,	182,	47,	197,	16,	44,	76,	142,	9,	72,
$x =$	1,	1,	1,	7,	33,	3,	3,	3,	3,	3,	3,
$y =$	12,	20,	28,	56,	16.29,	12,	20,	25,	36,	40,	104,

156,	189,	79,	149,	4,	36,	42,	106,	116,
3,	3,	45,	45,	8,	8,	8,	8,	8,
152,	168,	16.27,	16.37,	3,	78,	96,	120,	150,

182,	196,	79,	123,	196,	102,	198,	118,	190,
112,	112,	5,	5,	3,	8,	8,	8,	8,
18.73,	18.89,	48,	60,	210,	210,	290,	220,	280,

15,	39,	51,	78,	126,	191,	11,	43,	70,	134,
48,	48,	3,	48,	48,	48,	48,	48,	48,	48,
190,	310,	88,	440,	560,	690,	170,	330,	420,	580,

179,	101,	197,	187,	119,	179,	151,	191,	123,
48,	16,	16,	24,	55,	55,	240,	240,	240.
670,	14.41,	14.57,	14.43,	14.44,	14.54,	26.159,	26.179,	26.145,

§. 22. Huic catalogo porro superstructa est sequens tabula completa omnium valorum m infra 200, quibus formula

$$x^4 - mxxyy + y^4$$

quadratum reddi potest:

1, 2, 4, 9, 11, 13, 15, 16, 25, 26, 27, 28, 32, 36, 39, 40, 42, 43, 44, 47, 49, 51, 64, 67, 70, 72, 74, 76, 77, 78, 79, 81, 86, 89, 90, 92, 96, 100, 101, 102, 103, 106, 109, 113, 118, 119, 121, 123, 126, 134, 136, 142, 144, 146, 148, 149, 151, 156, 166, 167, 169, 179, 182, 188, 189, 190, 191, 193, 196, 197, 198; 200.

METHODUS ELEGANTIOR

inveniendi numeros m, *ut fiat* $x^4 + mxxyy + y^4 = zz$.

§. 22. Sumto pro lubitu numero α fiat $\alpha\alpha - 4 = \lambda\beta\beta$, et supra ostensum est, si capiatur $m = \lambda\zeta\zeta \pm \alpha$, fore $x = \beta$, $y = 2\zeta$ et $z = \beta\beta \pm 2\alpha\zeta\zeta$, quod autem mox denuo demonstrabitur. Jam quia praecipuum momentum in numero λ situm est, notetur innumeros dari posse pro α valores, qui idem λ producant. Ad hos valores inveniendos sequentes formentur binae series recurrentes ex scala relationes α, -1 formatae:

0,	1,	2,	3,	- - - -	n
2,	α,	$\alpha\alpha - 2$,	$\alpha^3 - 3\alpha$,	- - -	$\mathfrak{A}$
0,	β,	$\alpha\beta$,	$\alpha\alpha\beta - \beta$,	- - -	$\mathfrak{B}$

eritque $\mathfrak{A} = (\frac{\alpha + \beta\surd\lambda}{2})^n + (\frac{\alpha - \beta\surd\lambda}{2})^n$, tum vero etiam

$$\mathfrak{B}\surd\lambda = (\frac{\alpha + \beta\surd\lambda}{2})^n - (\frac{\alpha - \beta\surd\lambda}{2})^n.$$

§. 23. Jam cum sit $(\frac{\alpha + \beta\surd\lambda}{2})(\frac{\alpha - \beta\surd\lambda}{2}) = 1$, erit $\mathfrak{A}^2 - \lambda\mathfrak{B}^2 = 4$, ita ut $\mathfrak{A}^2 - 4 = \lambda\mathfrak{B}^2$, quae forma cum similis sit primae, sequitur, sumto $m = \lambda ff \pm \mathfrak{A}$, ubi f iterum ab arbitrio pendet, fore $x = \mathfrak{B}$, $y = 2f$ et $z = \mathfrak{B} \pm 2\mathfrak{A}ff$, cujus veritas immediate ex formula proposita ostenditur; fiet enim

$$z = \sqrt{x^4 + mxxyy + y^4} = \mathfrak{B} \pm 2\mathfrak{A}ff.$$

§. 24. Percurramus casus simpliciores, quibus λ non nimis magnum prodit, eosque hic exhibeamus

$\alpha = 3$	$\mathfrak{A} =$ 2, 3, 7, 18, 47, 123, 322, 843, etc.
$\beta = 1$	$\mathfrak{B} =$ 0, 1, 3, 8, 21, 55, 144, 377, etc.
$\lambda = 5$	$m = 5ff \pm \mathfrak{A}$
$\alpha = 4$	$\mathfrak{A} =$ 2, 4, 14, 52, 194, 724, 2702, etc.
$\beta = 3$	$\mathfrak{B} =$ 0, 2, 8, 30, 112, 418, 1560, etc.
$\lambda = 2$	$m = 3ff \pm \mathfrak{A}$

$\alpha = 5$	$\mathfrak{A} = 2,\ 5,\ 23,\ 110,\ 527,\ 2525,$ etc.
$\beta = 1$	$\mathfrak{B} = 0,\ 1,\ 5,\ 24,\ 115,\ 551,$ etc.
$\lambda = 21$	$m = 21\,ff \pm \mathfrak{A}$
$\alpha = 6$	$\mathfrak{A} = 2,\ 6,\ 34,\ 198,\ 1154,$ etc.
$\beta = 4$	$\mathfrak{B} = 0,\ 4,\ 24,\ 140,\ 816$ etc.
$\lambda = 2$	$m = 2\,ff \pm \mathfrak{A}$
$\alpha = 8$	$\mathfrak{A} = 2,\ 8,\ 62,\ 488,$ etc.
$\beta = 2$	$\mathfrak{B} = 0,\ 2,\ 16,\ 126,$ etc.
$\lambda = 15$	$m = 15\,ff \pm \mathfrak{A}$
$\alpha = 10$	$\mathfrak{A} = 2,\ 10,\ 98,\ 970,$ etc.
$\beta = 4$	$\mathfrak{B} = 0,\ 4,\ 40,\ 396,$ etc.
$\lambda = 6$	$m = 6\,ff \pm \mathfrak{A}$
$\alpha = 11$	$\mathfrak{A} = 2,\ 11,\ 119,\ 1298,$ etc.
$\beta = 3$	$\mathfrak{B} = 0,\ 3,\ 33,\ 352,$ etc.
$\lambda = 13$	$m = 13\,ff \pm \mathfrak{A}$
$\alpha = 16$	$\mathfrak{A} = 2,\ 16,\ 254,\ 4048,$ etc.
$\beta = 6$	$\mathfrak{B} = 0,\ 6,\ 96,\ 1530,$ etc.
$\lambda = 7$	$m = 7\,ff \pm \mathfrak{A}.$

Ex his igitur valoribus plurimos valores idoneos pro m derivari poterunt tam positivos quam negativos. Praeterea notandum est pro λ etiam numeros fractos accipi posse, ita tamen ut inde pro m numeri integri oriantur.

Solutio generalis.

§. 25. Introducendo igitur fractiones ponamus $\alpha = \frac{a}{c}$ et $\beta = \frac{b}{c}$, ita ut $aa - 4cc = \lambda bb$ et ambae series recurrentes erunt:

$$2,\ \frac{a}{c},\ \frac{aa-2cc}{cc},\ \frac{a^3-3acc}{c^3},\ \ldots\ldots\ \frac{A}{c^n}$$

$$0,\ \frac{b}{c},\ \frac{ab}{cc},\ \frac{baa-bcc}{c^3},\ \ldots\ldots\ \frac{B}{c^n}.$$

quarum denominatores secundum potestates ipsius c procedunt, numeratores vero seriem recurrentem constituunt, cujus scala relationis est a, $-cc$. Cum igitur sit $\mathfrak{A} = \frac{A}{c^n}$ et $\mathfrak{B} = \frac{B}{c^n}$, erit $A^2 - 4c^{2n} = \lambda B^2$; tum vero fiet $m = \frac{\lambda c^n ff \pm A}{c^n}$, existente $x = \frac{B}{c^n}$, $y = 2f$ et $z = \frac{B^2 \pm 2c^n Aff}{c^{2n}}$.

§. 26. Evidens autem est valorem m integrum fieri non posse, nisi fuerit denominator c^n quadratum. Statuatur ergo $n = 2\nu$ et sumatur $f = \frac{\mathfrak{f}}{c^\nu}$, eritque $m = \frac{\lambda \mathfrak{f}\mathfrak{f} \pm A}{c^{2\nu}}$, ubi $\mathfrak{f}$ ita sumi oportet, ut numerator evadat divisibilis per denominatorem. Tum autem, quia pro x, y, z, fractiones prodeunt, et tantum ratio inter x et y in calculum ingreditur, multiplicetur per $c^{2\nu}$, fietque $x = B$ et $y = 2\mathfrak{f}c^\nu$, existente $z = B^2 \pm 2A\mathfrak{f}\mathfrak{f}$.

§. 27. Hic observandum est plerumque signorum ambiguorum alterutrum tantum locum habere posse, casibus exceptis, quibus denominator $c^{2\nu}$ est summa duorum quadratorum, quibus casibus utrumque signum locum habet. Tum vero, si fuerit $a < 2c$, manifestum est valorem λ semper negativum fieri debere, unde, quia littera A signo ambiguo est affecta, pro m tam valores negativi quam possitivi oriuntur.

SOLUTIO PROBLEMATIS MECHANICI NON PARUM CURIOSI

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhibuit die 14 Martii 1782.

§. 1. Concipiatur planum inclinatum AO, quod cum horizontali HO angulum constituat $AOH = \zeta$. Huic plano primum in A incumbat discus circularis $Ta X$, cujus centrum sit C et radius $CX = a$. Manifestum autem est, loco hujus disci circularis assumi posse vel globum vel cylindrum, vel aliud quodvis corpus rotundum, si modo ejus axis perpetuo maneat horizontalis. Ponamus hujus corporis massam $= M$, momentum vero inertiae respectu axis $= Mbb$; ubi quidem assumo centrum gravitatis totius corporis incidere in centrum disci C. Tab. I. Fig. 1.

§. 2. Huic porro disco circumvolutum sit filum in sensum $ATaX$, cujus terminus extremus A in hoc ipso puncto A plano sit affixus. Hinc statim patet, filum impedire, quominus discus, volvendo super plano, descendat; sin autem radendo descensum inchoaret, filum relaxaretur. In calculo autem assumi convenit filum a disco jam evolutum manere in directum extensum. Quamobrem necesse est ut discus partim radendo partim volvendo descendere incipiat. Etiam i autem hoc motu frictio oriretur, coacti tamen sumus ab ea animum abstrahere, quandoquidem calculus nullo modo ad frictionem extendi potest.

§. 3. His praemissis primo ponamus elapso tempore t discum nostrum descendendo pervenisse in situm XaT. Tum igitur filum a disco evolutum situm tenebit AT, ita ut in T discum tangat, quamobrem perpetuo erit $AT = AX$; unde si vocemus spatium percursum $AX = x$, erit etiam longitudo fili evoluti $AT = x$. Hinc si ponatur angulus $XAT = \theta$, qui a recta CA bifariam secatur, erit $\text{tag.} \frac{1}{2}\theta = \frac{a}{x}$, ideoque $x = a \cot. \frac{1}{2}\theta$.

§. 4. Denotante nunc π angulum duobus rectis aequalem, erit angulus $XCT = \pi - \theta$. Evidens autem est labente tempore angulum θ, qui initio erat $= \pi$, continuo decrescere. Hinc jam determinari poterit locus, ubi punctum disci reperiatur, quod initio planum in A tangebat. Concipiatur enim filum TA solutum iterum disco obvolvi et abscindatur arcus Ta rectae $AT = x$ aequalis, eritque a locus puncti A, qui igitur a situ CX, ad planum nunc normali, distat angulo XCa hicque angulus metitur motum gyratorium, quo discus ab initio jam processit.

§. 5. Ponamus igitur istum angulum $XCa = \Phi$, et quia arcus $TXa = \frac{AT}{CT} = \frac{x}{a}$, ob angulum $XCT = \pi - \theta$ erit

$$\Phi = \frac{x}{a} - \pi + \theta = \cot. \tfrac{1}{2}\theta + \theta - \pi.$$

Unde patet initio, ubi $x = 0$ et $\theta = \pi$, fuisse etiam $\Phi = 0$, uti rei natura postulat. Quare si ponamus $\pi - \theta = \omega$, ut sit $\theta = \pi - \omega$ et initio fuerit $\omega = 0$, habebitur $\Phi = \text{tag.} \frac{1}{2}\omega - \omega$. Primo igitur initio, ubi angulus ω valde parvus, erat $\Phi = -\frac{1}{2}\omega$. Mox autem, aucto angulo ω, angulus Φ ad nihilum redigetur, tum vero evadet positivus.

§. 6. Quod si jam principia mechanica consulamus, sumto elemento temporis ∂t constante, ac denotante g altitudinem lapsus liberi uno minuto secundo peracti, si hoc tempore ponamus tensionem fili $AT = T$, hinc orietur vis motu progressivo contraria $T \cos. \theta$.

At vero ob gravitatem, seu pondus M, vis secundum directionem plani urgens erit M·sin. ζ, hinc vis accelerans motum progressivum ita exprimetur: $\frac{M \sin \zeta - T \cos . \theta}{M}$, cui ergo vi ipsa acceleratio $\frac{\partial \partial x}{2 g \partial t^2}$ aequalis est ponenda, unde pro hoc motu ista habebitur aequatio: $\frac{\partial \partial x}{2 g \partial t^2} = \sin . \zeta - \frac{T}{M} \cos . \theta$. At vero pro motu gyratorio habebitur momentum vis gyrantis $= Ta$, quod divisum per momentum vis inertiae Mbb aequale erit accelerationi gyratoriae $\frac{\partial \partial \Phi}{2 g \partial t^2}$, unde oritur ista aequatio: $\frac{\partial \partial \Phi}{2 g \partial t^2} = \frac{T}{M} \cdot \frac{a}{bb}$.

§. 7. His aequationibus totus corporis motus, tam progressivus quam gyratorius, perfecte determinatur. At vero hic probe notandum est, tensionem fili T adhuc prorsus esse incognitam, unde eam ex calculo eliminari conveniet. Hunc in finem ex posteriore aequatione quaeratur $\frac{T}{M} = \frac{bb}{a} \frac{\partial \partial \Phi}{2 g \partial t^2}$, hocque valore in priore substituto oritur ista aequatio $\frac{a \partial \partial x + bb \partial \partial \Phi \cos \theta}{2 a g \partial t^2} = \sin . \zeta$, ad quam resolvendam necesse est ut relatio inter binas variabiles x et Φ in computum ducatur, quas ergo variabiles ad angulum θ revocemus.

§. 8. Cum igitur sit $x = a \cot . \frac{1}{2} \theta$, erit $\partial x = \frac{-\partial \theta}{2 \sin . \frac{1}{2} \theta^2} = \frac{-a \partial \theta}{1 - \cos . \theta}$. Porro, ob $\Phi = \cot . \frac{1}{2} \theta + \theta - \pi$, erit

$$\partial \Phi = \frac{-\partial \theta}{1 - \cos . \theta} + \partial \theta = \frac{-\partial \theta \cos . \theta}{1 - \cos . \theta},$$

hincque colligitur $\partial x = \frac{a \partial \Phi}{\cos . \theta}$. Hac relatione inter differentialia ∂x et $\partial \Phi$ inventa multiplicemus aequationem differentio-differentialem postremam per $\partial x = \frac{a \partial \Phi}{\cos \theta}$, fiet $\frac{\partial x \partial \partial x + bb \partial \Phi \partial \partial \Phi}{2 g \partial t^2} = \partial x \sin . \zeta$, quae aequatio sponte est integrabilis, eaque integrata prodit:

$$\frac{\partial x^2 + bb \partial \Phi^2}{4 g \partial t^2} = x \sin . \zeta,$$

ubi nulla constantis additione est opus. Si enim faciamus $\frac{\partial x}{\partial t} = v$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = u$, erit v celeritas progressiva et u celeritas angularis seu gyratoria; utraque autem primo initio, ubi $x = 0$, evanescere debet.

Facta autem substitutione oritur aequatio $vv + bbuu = 4gx \sin. \zeta$ ex qua simul conservatio principii virium vivarum elucet.

§. 9. Loco binarum autem variabilium x et Φ introducamus angulum θ, ope valorum supra pro ∂x et $\partial \Phi$ inventorum, quibus in praecedente aequatione substitutis oritur sequens aequalitas:

$$\frac{\partial \theta^2}{(1 - \cos. \theta)^2} (aa + bb \cos. \theta^2) = 4ga\, \partial t^2 \sin. \zeta \cot. \tfrac{1}{2} \theta.$$

sive $\partial t^2 = \frac{\partial \theta^2 (aa + bb \cos. \theta^2)}{4ga \sin. \zeta \sin. \theta (1 - \cos. \theta)}$, ob $\cot. \frac{1}{2} \theta = \sqrt{\frac{1 + \cos. \theta}{1 - \cos. \theta}}$ et $\sqrt{(1 - \cos. \theta)(1 + \cos. \theta)} = \sin. \theta$. Hinc ergo colligitur tempus

$$t = \frac{1}{2\sqrt{ga \sin. \zeta}} \int \partial \theta \sqrt{\frac{aa + bb \cos \theta^2}{\sin. \theta (1 - \cos. \theta)}}.$$

Facile autem patet hanc integrationem neque ad logarithmos neque ad arcus circulares reduci posse. Concessis autem quadraturis non solum pro qnovis angulo θ tsmpus t, sed etiam ad quodvis tempus t vicissim angulus θ assignari poterit.

§. 10. Hanc formulam integralem ita integrari oportet, ut initio motus, ubi $\theta = \pi$, evanescat. Scribamus autem, ut supra, $\pi - \omega$ loco θ, quo integratio a termino $\omega = 0$ incipiat, et quia tum $\cos. \theta = - \cos. \omega$ et $\sin. \theta = \sin. \omega$, habebimus

$$t = \frac{1}{2\sqrt{ga \sin. \zeta}} \int \partial \omega \sqrt{\frac{aa + bb \cos. \omega^2}{\sin. \omega (1 + \cos \omega)}}.$$

Relatio igitur inter tempus t et angulum ω tanquam cognita spectari poterit.

§. 11. Hinc etiam ad quodvis tempus binas celeritates, progressivam $v = \frac{\partial x}{\partial t}$ et angularem $u = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$, per angulum ω commode exprimere licet: Cum enim sit

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial \omega}{\partial t} \cdot \frac{a}{1 + \cos. \omega} \text{ et } \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{-\partial \omega}{\partial t} \cdot \frac{\cos \omega}{1 + \cos. \omega}, \text{ ob}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = 2\sqrt{\frac{ga \sin. \zeta \sin. \omega (1 + \cos. \omega)}{aa + bb \cos. \omega^2}}, \text{ reperietur}$$

$$v = 2a\sqrt{\frac{ga \sin. \zeta \operatorname{tag}. \frac{1}{2}\omega}{aa + bb \cos. \omega^2}} \text{ et } u = -2 \cos. \omega \sqrt{\frac{ga \sin. \zeta \operatorname{tag}. \frac{1}{2}\omega}{aa + bb \cos. \omega^2}}.$$

Unde patet, quamdiu angulus ω recto est minor, celeritatem angularem u esse negativam sive in sensum X a T X vergere; ubi autem angulus ω est rectus, ista celeritas gyratoria prorsus evanescit; deinceps vero evadit positiva.

Investigatio tensionis.

§. 12. Tensio T immediate deducitur ex posteriore aequatione differentiali secundi gradus: $\frac{\partial\partial\Phi}{2g\partial t^2} = \frac{Ta}{Mbb}$, ex qua fit $T = \frac{Mbb\partial\partial\Phi}{2ag\partial t^2}$, ubi valor differentio - differentialis $\partial\partial\Phi$ ad differentialia primi gradus reduci debet, id quod sequenti modo praestabitur. Cum sit $\partial x = \frac{a\partial\Phi}{\cos\Phi}$ (§. 8.), erit $\partial\partial x = \frac{a\partial\partial\Phi}{\cos\theta} + \frac{a\partial\Phi\partial\theta\sin.\theta}{\cos.\theta^2}$, qui valor in aequatione differentio - differentiali §. 7. data

$$a\partial\partial x + bb\partial\partial\Phi\cos.\theta = 2ag\partial t^2\sin.\zeta,$$

substitutus praebet

$$\frac{\partial\partial\Phi(aa + bb\cos.\theta^2)}{\cos\theta} + \frac{aa\partial\Phi\partial\theta\sin.\theta}{\cos\theta^2} = 2ag\partial t^2\sin.\zeta.$$

Si jam differentialis $\partial\Phi$ loco valor supra inventus, qui erat $\partial\Phi = \frac{-\partial\theta\cos.\theta}{1-\cos.\theta}$, introducatur, aequatione in ordinem redacta prodibit ista relatio:

$$\partial\partial\Phi(aa + bb\cos.\theta^2) = \frac{\partial\theta^2(aa\cos.\theta + bb\cos.\theta^3 + 2aa\sin.\theta^2)}{2\sin.\theta(1-\cos.\theta)},$$

ubi scilicet etiam loco $2ag\partial t^2\sin.\zeta$ valorem per angulum θ, scilicet $\frac{\partial\theta^2(aa+bb\cos.\theta^2)}{2(1-\cos.\theta)\sin.\theta}$ substituimus. Ex hac autem aequatione colligimus differentiale

$$\partial\partial\Phi = \frac{\partial\theta^2(aa\cos.\theta + bb\cos.\theta^3 + 2aa\sin.\theta^2)}{2\sin.\theta(1-\cos.\theta)(aa+bb\cos\theta^2)}.$$

§. 13. Cum igitur supra §. 9. invenerimus

$$\partial t^2 = \frac{\partial\theta^2(aa+bb\cos.\theta^2)}{4ga\sin.\zeta\sin.\theta(1-\cos.\theta)},$$

per hunc valorem dividendo fit

$$\frac{\partial\partial\Phi}{\partial t^2} = \frac{2ga\sin.\zeta(aa\cos.\theta + bb\cos.\theta^3 + 2aa\sin.\theta^2)}{(aa+bb\cos.\theta^2)^2},$$

unde denique tensio $T = \frac{Mbb}{2ga} \cdot \frac{\partial\partial\Phi}{\partial t^2}$ per quantitatem mere finitam exprimitur, cum inde prodeat

$$T = \frac{Mbb \sin.\zeta\,(aa \cos.\theta + bb \cos.\theta^3 + 2aa \sin.\theta^2)}{(aa + bb \cos.\theta^2)^2},$$

sive, si loco anguli θ angulus ω introducatur, erit

$$T = Mbb \sin.\zeta \times \frac{2aa \sin.\omega^2 - aa \cos.\omega - bb \cos.\omega^3}{(aa + bb \cos.\omega^2)^2}.$$

§. 14. Hinc perspicimus, circa ipsum motus initium, ubi angulus ω est valde parvus, tensionem fili esse negativam. Erit enim, ob ω minimum:

$$T = -Mbb \sin.\zeta \times \frac{aa + bb - 2aa\omega\omega}{(aa + bb)^2},$$

haecque tensio tamdiu manet negativa, donec fiat

$$2aa \sin.\omega^2 = aa \cos.\omega + bb \cos.\omega^3,$$

quem autem terminum in genere determinare non licet, nisi per resolutionem aequationis cubicae. Dum autem tensio negativa admitti potest, necesse est fili naturam ita comparatam statuere, ut non solum extensioni sed etiam contractioni resistat. Quoniam autem revera, simulac filum relaxatur, nullam vim sese extendendi exerit, verus corporis motus circa initium penitus a calculo aberrabit, propterea quod tensio, ubi calculus eam monstrat negativam, potius ad nihilum redigi est censenda, atque ex hoc principio novo calculo opus erit, ut motus verus assignari possit.

Rectificatio calculi praecedentis. [1]

§. 15. Quia circa motus initium filum relaxatur, ideoque nullam vim in corpus exerit, propter remotam frictionem corpus solo motu progressivo, sive rependo, super plano inclinato descendet, hocque motu tamdiu progredi perget, quamdiu filum manet laxum, neque ullus motus angularis se admiscebit. Locum igitur investigari oportet ubi filum tendi incipiet.

§. 16. Quo haec clarius intelligantur teneat discus noster situm C B D super plano inclinato A O. A puncto fixo A ducatur tangens AD, quae aequalis erit spatio percurso A B $= x$; ductisque ut ante radiis CB, CD, sit ut hactenus angulus BAD $= \theta$, ejusque complementum ad duos rectos B C D $= \omega$. Cum igitur filum ab arcu BD evolutum longitudinem habeat $= a\omega$, filum erit laxum quamdiu distantia AD minor est hoc arcu; unde quaeri oportet locum nostri disci; ubi fit recta AD $=$ AB $= x$ aequalis arcui BD $= a\omega$. Cum igitur sit $x = a$ tag. $\frac{1}{2}\omega = \frac{a\, sin.\, \omega}{1 + cos.\, \omega}$, filum tum demum intendi incipiet, ubi fit tag. $\frac{1}{2}\omega = \omega$, ita ut quaeri debeat arcus cujus tangens duplo ejus sit major. Calculo autem rite instituto deprehenditur, fore hunc angulum $66°, 46', 56''$, qui si ponatur $= \frac{1}{2}\alpha$, ita ut in hoc statu $\omega = \alpha$, erit A B $= \alpha a$, sive in partibus radii A B $= 2{,}331178\ a$. Tab. I. Fig. 2.

§. 17. Ad hunc igitur locum usque B, corpus motu solo progressivo super plano inclinato descendet, qui motus ex sola formula $\frac{\partial\partial x}{2g\partial t^2} = \sin.\zeta$ derivari poterit. Haec enim aequatio per ∂x multiplicata et integrata dat $\frac{\partial x^2}{4g\partial t^2} = x \sin.\zeta$, unde colligitur $\partial t = \frac{\partial x}{2\sqrt{g\, x\, sin.\, \zeta}}$, hincque $t = \sqrt{\frac{x}{g\, sin.\, \zeta}}$. Facto igitur $x = \alpha a$ tempus descensus ab A ad B usque erit $t = \sqrt{\frac{\alpha a}{g\, sin.\, \zeta}}$, quod tempus jam in minutis secundis erit expressum. Praeterea vero hoc loco, a quo motus mixtus incipiet, percurso scilicet spatio A B $= \alpha a$, erit angulus B C D $= \alpha = 133°, 33', 52''$ et angulus B A D $= 46°, 26', 8''$.

§. 18. Pro motu sequente determinando eaedem manebunt aequationes differentiales secundi gradus, quas supra tractavimus, scilicet $\frac{\partial\partial\Phi}{2g\partial t^2} = \frac{Ta}{Mbb}$ et $\frac{\partial\partial x}{2g\partial t^2} = \sin.\zeta - \frac{T}{M}\cos.\theta$, quas autem nunc ita integrari oportet, ut posito $x = \alpha a$ fiat angulus $\Phi = 0$ atque insuper ut fiat $\frac{\partial x^2}{\partial t^2} = 4g\alpha a \sin.\zeta$.

§. 19. Cum igitur sit $\frac{T}{M} = \frac{bb\partial\partial\Phi}{2ag\partial t^2}$, hoc valore in altera aequatione substituto colligitur fore $\sin.\zeta = \frac{a\partial\partial x + bb\partial\partial\Phi\cos\theta}{2ag\partial t^2}$, quae aequatio ducta in $\partial x = \frac{a\partial\Phi}{\cos.\theta}$ et integrata sequentem subministrat:

$$\frac{\partial x^2 + bb\partial\Phi^2}{4g\partial t^2} = C + x\sin.\zeta.$$

Hic ad constantem C definiendam loco $\partial\Phi$ restituendus est ejus valor $\frac{\partial x\cos.\theta}{a}$, quo facto aequatio illa hanc induet formam:

$$\frac{\partial x^2(aa + bb\cos.\theta^2)}{4aag\partial t^2} = C + x\sin.\zeta.$$

Quoniam igitur motus initio esse debet $x = \alpha a$ et $\frac{\partial x^2}{\partial t^2} = 4g\alpha a\sin.\zeta$, his substitutis fiet constans $C = + \frac{\alpha bb\cos.\alpha^2\sin.\zeta}{a}$. Hinc igitur, posito brevitatis gratia $\frac{\alpha bb\cos.\alpha^2}{a} = f$, erit

$$\frac{\partial x^2(aa + bb\cos.\theta^2)}{4aag\partial t^2} = (x + f)\sin.\zeta.$$

§. 20. Cum hujus motus initio, quod in puncto B statuimus, sit $\frac{\partial x}{\partial t} = 2\sqrt{g\alpha a}\sin.\zeta$, ob $\partial\Phi = \frac{\partial x\cos.\theta}{a}$ et $\cos.\theta = -\cos.\alpha$ erit hoc momento celeritas angularis $\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \cos.\alpha\sqrt{\frac{4g\alpha\sin.\zeta}{a}}$, cum tamen fuisset $\Phi = 0$, id quod insigne paradoxon videtur, dum primo instanti subito celeritas angularis finita generatur, cujus rei caussa est, quod, simulae filum in directum extenditur, ne minimam quidem elongationem admittere in calculo statuitur. Totum autem hoc paradoxon diluitur, quando filo vim quandam sese quam minime expandendi tribuimus. Tum enim, quod hic calculus puncto temporis evenire ostendit, tempusculo quodam valde parvo peragetur. Similis autem saltus deprehenditur in collisione corporum, prouti vulgo proponi solet; ubi etiam in instanti maxima motus mutatio contingere deberet.

§. 21. Ex illa aequatione §. 19. inventa deducitur quadratum celeritatis progressivae, scilicet $\frac{\partial x^2}{\partial t^2} = \frac{4aag(x+f)\sin.\zeta}{aa + bb\cos.\theta^2}$, ex qua

porro concluditur $\partial t = \frac{-\partial\theta}{2\sqrt{g\,sin.\zeta}} \sqrt{\frac{aa + bb\,cos.\theta^2}{(x+f)(1-cos.\theta)^2}}$, cujus integratio a termino $\pi - \alpha$ inchoari debet, atque integrale dabit tempus descensus a loco B in minutis secundis expressum.

§. 22. Deinde ipsa tensio fili simili modo ac supra definiri poterit, dum loco $x\,sin.\,\zeta$ scribitur ratione constantis adjectae valor $(x+f)\,sin.\,\zeta$. Quia igitur est $x = \frac{a\,sin.\theta}{1-cos.\theta}$, erit

$$x + f = \frac{a\,sin.\theta + f(1-cos.\theta)}{1-cos.\theta}.$$

Unde patet, si loco x scribendum sit $x+f$, loco $a\,sin.\,\theta$ scribendum fore $a\,sin.\,\theta + f(1-cos.\,\theta)$. Expressio igitur tensionis T supra §. 13. exhibita, qua erat

$$T = Mbb\,sin.\zeta \times \frac{aa\,cos.\theta + bb\,cos.\theta^3 + 2a\,sin.\theta \,.\, a\,sin.\theta}{(aa + bb\,cos.\theta^2)^2}$$

facta substitutione pro $a\,sin.\,\theta$ pro hoc motu erit:

$$T = Mbb\,sin.\zeta \times \frac{aa\,cos.\theta + bb\,cos.\theta^3 + 2a\,sin.\theta\,(a\,sin.\theta + f(1-cos.\theta))}{(aa + bb\,cos.\theta^2)^2}.$$

§. 23. Hinc pro initio motus posterioris in loco B, ubi $\theta = \pi - \alpha$, ideoque $sin.\,\theta = sin.\,\alpha$ et $cos.\,\theta = -cos.\,\alpha$, haec tensionis expressio sequentem induit formam:

$$T = Mbb\,sin.\zeta \times \frac{2a\,sin.\alpha\,(a\,sin.\alpha + f(1+cos\,\alpha)) - aa\,cos\,\alpha - bb\,cos.\alpha^3}{(aa + bb\,cos.\alpha^2)^2}$$

quae substituto valore $f = \frac{\alpha bb\,cos.\alpha^2}{a} = \frac{bb\,sin.\alpha\,cos.\alpha^2}{a(1+cos.\alpha)}$ (ob $\alpha = tag.\frac{1}{2}\alpha = \frac{sin.\alpha}{1+cos.\alpha}$), reducitur ad hanc:

$$T = Mbb\,sin.\zeta \times \frac{2\,sin.\alpha^2 - cos.\alpha}{aa + bb\,cos.\alpha^2}.$$

§. 24. Cum autem celeritas angularis in puncto B subito finita evadat, ut supra §. 20. monuimus, ad eam generandam vi adeo infinita opus est, quod autem hic longe secus evenit; unde

novum paradoxon sese offert, quod autem facile resolvitur. Nam quia pro toto hoc motu sumsimus $\partial \Phi = \frac{\partial x \cos. \theta}{a}$, haec aequatio, quae in motu praecedente neutiquam locum habet, in posterioris motus initio nondum valere potest. Quamobrem, cum hac relatione usi simus ad tensionem T determinandam, mirum non est eam in ipso initio B a veritate aberrare. Quoties enim hujusmodi saltus occurrit, calculus nunquam congruere potest.

DE PROBLEMATE TRAJECTORIARUM ORTHOGONALIUM AD SUPERFICIES TRANSLATO.

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhibuit die 12 Augusti 1782.

§. 1. Quaestio, quam hic tractandam suscipio, ita se habet: Propositis infinitis superficiebus, una quadam aequatione inter ternas coordinatas contentis, investigare alias, quae illas ubique ad angulos rectos intersecent. Hic igitur ante omnia nobis erit in criterium inquirendum, quo normalitas illa intersectionum determinetur. Hunc in finem consideremus superficiem quamcunque ad ternos axes inter se normales relatam, qui sint OA, OB, OC, quibus parallelae statuantur ternae coordinatae $OX = x$, $XY = y$, $YZ = z$, quibus ergo positio puncti cujuscunque Z superficiei propositae determinatur. Quo jam ejus intersectio, ab alia quavis superficie facta, definiri queat, quaeramus planum, quod nostram superficiem in puncto Z tangat. Tab. I. Fig. 3.

§. 2. Pro hac autem superficie data sit aequatio differentialis $\partial z = p\partial x + q\partial y$. Ac primo concipiatur sectio plano AOC parallela et per punctum Z facta, pro qua ergo erit y constans et $\partial z = p\partial x$; unde si Zp sit tangens hujus sectionis et Yp subtangens axi OA parallela, erit $Yp = \frac{z\partial x}{\partial z} = \frac{z}{p}$. Simili modo concipiatur alia sectio plano BOC parallela, cujus tangens sit recta Zq, cujus ergo, ob x constans et $\partial z = q\partial y$, subtangens erit $Yq = \frac{z}{q}$.

Unde patet, quia ambae rectae Zp et Zq superficiem tangunt, totum planum tangens fore Zpq.

§. 3. Contemplemur nunc aliam superficiem iisdem coordinatis expressam, quae illam in puncto Z normaliter trajicere debeat, pro qua statuamus hanc aequationem differentialem:

$$\partial z = P\,\partial x + Q\,\partial y.$$

Efficiendum igitur est, ut planum hanc superficiem tangens ad planum praecedens sit perpendiculare, id quod eveniet, si recta ad hanc superficiem normalis incidat in planum, quod praecedentem superficiem tangit. Quamobrem pro hac superficie investigemus positionem rectae, quae ad eam est normalis.

Tab. I. Fig. 4. §. 4. Consideremus igitur etiam hic sectionem plano AOC parallelam et per punctum Z factam, cujus sectionis normalis sit recta ZP; et quia hic y est constans, erit $\partial z = P\,\partial x$ et subnormalis $YP = \frac{z\,\partial z}{\partial x} = zP$. Simili modo fiat sectio per Z plano BOC parallela, ita ut jam sit x constans et $\partial z = Q\,\partial y$; sitque ZQ normalis ad hanc sectionem, eritque subnormalis $YQ = \frac{z\,\partial z}{\partial y} = zQ$. Compleatur nunc parallelogrammum rectangulum YPQR, eritque recta ZR normalis ad utramque sectionem, ideoque normalis ad ipsam superficiem, sicque erit $YP = QR = zP$ et $YQ = PR = zQ$. Nunc igitur pro scopo nostro necesse est ut recta ZR cadat in planum tangens Zpq praecedentis figurae.

Fig. 3. §. 5. Transferatur igitur hoc punctum R in praecedentis figurae punctum R', unde ad rectas Yp et Yq ducantur normales $R'P'$ et $R'Q'$, quae cum hic in plagam contrariam cadant, erit $R'P' = -zQ$ et $R'Q' = -zP$. Quare cum sit $Yp = \frac{z}{p}$, erit $pP' = \frac{z}{p} + zP$, unde similitudo triangulorum $pP'R'$ et pYq dabit hanc proportionem: $\frac{1}{p} + P : -Q = \frac{1}{p} : \frac{1}{q}$, unde sequitur ista aequa-

litas: $1 + Pp + Qq = 0$, quae ergo continet criterium, quod ambae superficies in puncto Z sibi invicem sint normales.

§. 6. Cum autem terni axes assumti sint inter se permutabiles, ut nostrae formulae ad omnes tres aeque pertineant, nil aliud opus est, nisi ut loco P, Q scribatur $\frac{-p}{r}$ et $\frac{-q}{r}$ nec non $\frac{-P}{R}$ et $\frac{-Q}{R}$. Hoc enim modo aequatio differentialis pro priore superficie, quam *secandam* vocemus, erit

$$p\,\partial x + q\,\partial y + r\,\partial z = 0,$$

pro altera vero superficie, quam *secantem* appellemus, orietur haec aequatio: $P\partial x + Q\partial y + R\partial z = 0$. Et nunc ambae superficies se normaliter secabunt, si fuerit $Pp + Qq + Rr = 0$. Totum ergo negotium huc redit, ut inquiratur quemadmodum ex data aequatione pro secanda:

$$p\,\partial x + q\,\partial y + r\,\partial z = 0$$

elici oporteat aequationem pro secante:

$$P\,\partial x + Q\,\partial y + R\,\partial z = 0,$$

ita ut criterium adimpleatur $Pp + Qq + Rr = 0$.

§. 7. Hic igitur spectamus aequationem pro secanda

$$p\,\partial x + q\,\partial y + r\,\partial z = 0$$

tanquam datam, neque tamen eam pro lubitu fingere licet, quandoquidem aequationes differentiales inter ternas variabiles x, y, z prorsus non sunt possibiles, nisi in iis certus character locum obtineat, atque iste character in hoc consistit, ut debeat esse:

$$\left(\frac{p\,\partial q - q\,\partial p}{\partial z}\right) + \left(\frac{q\,\partial r - r\,\partial q}{\partial x}\right) + \left(\frac{r\,\partial p - p\,\partial r}{\partial y}\right) = 0.$$

Hoc enim nisi eveniat, aequatio in se erit absurda, neque quicquam declarat, sed potius contradictionem manifestam involvit.

§. 8. Quando autem iste character locum habet, tum aequatio semper est possibilis, atque adeo multiplicatorem assignare licebit, quo ea integrabilis reddatur. Quin etiam hoc negotium ab-

solvi poterit, dum primo una variabilium, veluti z, pro constante habeatur, ut tantum sit $p\partial x + q\partial y = 0$, quae cum duas tantum variabiles contineat, more solito est tractanda. Ponamus ergo inde reperiri integrale v, ita ut, ob z constantem assumtam, sit integrale completum $v = z$. Eodem modo, spectando y ut constantem, reperietur aequationis $p\partial x + r\partial z = 0$ integrale, quod sit u, ita ut completum statui debeat $u = Y$. Ex utroque ergo integrali colligetur $v - u = Z - Y$; ac si character locum habeat ante datus, semper licebit formulam $v - u$ in duas partes resolvere, quarum altera sit functio tantum ipsius z, altera tantum ipsius y, quo pacto ambae functiones Z et Y determinabuntur.

§. 9. Semper autem aequatio integralis completa praeterea constantem arbitrariam a involvet, cui cum infinitos valores tribuere liceat, nostra aequatio differentialis: $p\partial x + q\partial y + r\partial z = 0$ simul infinitas superficies in se complectetur, quae ergo omnes a superficie secante invenienda aeque ubique ad angulos rectos secabuntur. Quamobrem constantem illam a, quae per integrationem introducitur, appellabimus *Parametrum* variabilem, quippe cujus variatio innumerabiles praebet superficies secandas.

§. 10. Quod si ergo vicissim proponantur infinitae superficies secandae, una quadam aequatione inter ternas variabiles x, y z et parametrum variabilem a comprehensae, inde aequationem nostram differentialem formae $p\partial x + q\partial y + r\partial z = 0$ ita elici oportet, ut parameter a in eam non amplius ingrediatur. Quocirca, quaecunque proponatur aequatio finita inter ternas variabiles x, y, z et parametrum varibilem a, ex ea ante omnia valor hujus parametri a exquiri debet, qui ergo aequabitur certae functioni ipsarum x, y, z tantum, cujus demum expressionis differentiale nihilo aequatum dabit nobis aequationem differentialem $p\partial x + q\partial y + r\partial z = 0$; ex qua deinceps aequationem pro superfiebus secantibus deduci conveniet.

§. 11. Constituta igitur aequatione differentiali pro superficiebus secandis $p\partial x + q\partial y + r\partial z = 0$, in eo erit elaborandum, ut inde aequatio pro superficiebus secantibus $P\partial x + Q\partial y + R\partial z = 0$ eruatur; ubi quidem evidens est, trium litterarum P, Q, R, unam per divisionem tolli posse, deinde vero reliquarum altera ex aequatione canonica: $Pp + Qq + Rr = 0$ est determinanda, ita ut unica tantum quantitas arbitraria in calculo relinquatur, quam autem ita definiri oportet, ut aequatio possibilis evadat, id quod semper infinitis modis praestari potest, quemadmodum ex sequentibus patebit.

§. 12. Cum autem nulla ratio suadeat, cur trium litterarum P, Q, R, una potius quam reliquae ex aequatione $Pp + Qq + Rr = 0$ determinetur, plurimum juvabit casus particulares perpendere, quibus una harum litterarum nihilo aequalis statuitur. Fiat igitur primo $P = 0$, et cum esse debeat $Qq + Rr = 0$ erit $Q : R = r : -q$; unde cum ratio tantum in computum veniat, poni poterit $Q = r$ et $R = -q$ ita ut pro secantibus habeatur haec aequatio: $r\partial y - q\partial z = 0$ quae si tantum duas variabiles y et z contineat, ita ut tertia x non adsit, integratio nulla laborabit difficultate, et cum integrale novam constantem arbitrariam recipiat, simul innumerabiles superficies secantes inpetrabuntur.

§. 13. Eodem modo, si fiat $Q = 0$, debebit esse $Pp + Pr = 0$, ideoque $P = r$ et $R = -p$, ita ut aequatio habeatur $r\partial x - q\partial z = 0$, quae si tantum variabiles x et z continuerit, itidem solutionem particularem praeberet. Quod si denique sumatur $R = 0$, fieri debet $R = q$ et $Q = -p$, ita ut aequatio sit $q\partial x - p\partial y = 0$, quae saepenumero etiam solutionem praebere potest, prouti aequatio differentialis pro superficiebus secandis fuerit comparata.

§. 14. His autem casibus quasi principalibus stabilitis, eos utcunque inter se componere licebit. Introducendo scilicet litteras quascunque L, M, N, in genere statui poterit $P = Mr - Nq$,

$Q = Np - Lr$ et $R = Lq - Mp$. Hinc enim manifesto erit $Pp + Qq + Rr = 0$; sicque pro superficiebus secantibus habebitur ista aequatio differentialis generalissima:

$$\partial x (Mr - Nq) + \partial y (Np - Lr) + \partial z (Lq - Mp) = 0$$

quae, etsi videtur tres quantitates arbitrarias involvere, revera tamen unicam involvere est censenda. Multitudo autem harum litterarum hunc usum potissimum praestat, ut eas ita determinare liceat, ut inde aequatio possibilis eruatur.

§. 15. Sufficiet autem tantum aequationes particulares obtinuisse, quandoquidem ex duabus talibus solutionibus solutio completa facillime formari poterit. Quod si enim formula integrabilis fuerit inventa, veluti $\partial u = 0$, ita ut $u = b$, ubi b parametrum variabilem designat, ea jam infinitas superficies secantes continet. Ac si praeterea alia talis formula integrabilis innotescat $\partial v = 0$, ita ut $v = c$ etiam solutionem particularem exhibeat, tum utique quaestioni satisfaciet aequatio ex binis composita haec: $f\partial u + g\partial v = 0$. Hinc si pro f accipiatur functio quaecunque ipsius u et pro g functio quaecunque ipsius v, orietur aequatio generalissima quaestioni satisfaciens, scilicet: $\Phi : u = \Phi : v$, sive simplicius statui poterit $v = \Phi : u$, haecque significatio functionis latissime patet, cum non solum omnes functiones legem quandam continuam sequentes, sed etiam omnes adeo functiones discontinuas denotet.

§. 16. Haec ergo solutio longe aliam habet indolem ac solutio problematis Trajectoriarum orthogonalium, quippe quae tantum infinitas praebet curvas secantes ex variabilitate parametri oriundas, cum in praesentem solutionem adeo ingrediatur functio prorsus indeterminata, quae non solum infinitas superficies, verum adeo infinita genera superficierum complectitur.

§. 17. Plerumque autem maxime difficile est, hujusmodi casus, quibus aequatio fit possibilis, eruere, ac saepenumero negotium

hoc ingentem sagacitatem postulat; praecipue quando superficies secandae non sunt satis simplices; ubi quidem id imprimis est agendum, ut positio ternorum axium ad statum quaestionis maxime accommodata eligatur. Neque tamen praeceptis negotium confici potest; quamobrem sequentia problemata hic subjungam, ex quibus plura insignia artificia hujusmodi problemata tractandi elucescent. Ibi autem plerumque usus sum formulis initio inventis, ubi erat $r = -1$ et $R = -1$.

Problema I.

§. 18. *Si pro superficiebus secandis fuerit* $z = \alpha x + \beta y + \gamma$, *quae aequatio est pro infinitis planis inter se parallelis, invenire aequationem pro superficiebus secantibus.*

Solutio.

Cum differentiale aequationis propositae sit $\partial z = \alpha \partial x + \beta \partial y$, hoc cum aequatione $\partial z = p \partial x + q \partial y$ comparato, prodit $p = \alpha$, $q = \beta$. Pro superficiebus igitur secantibus, aequatione $\partial z = P \partial z + Q \partial y$ expressis, aequatio canonica $1 + \alpha P + \beta Q = 0$ praebet $Q = \frac{-1 - \alpha P}{\beta}$, quo valore substituto colligitur $\partial z = P \partial x - (\frac{1 + \alpha P}{\beta}) \partial y$, sive $\partial z + \frac{\partial y}{\beta} = \frac{P}{\beta} (\beta \partial x - \alpha \partial y)$. Hinc jam facile concluditur esse debere $\frac{P}{\beta}$ functionem ipsius $\beta x - \alpha y$, ipsumque integrale etiam hujusmodi functioni aequale fore, ita ut aequatio integralis completa habeatur haec: $z + \frac{y}{\beta} = F:(\beta x - \alpha y)$, quae aequatio ergo infinities infinitas superficies complectitur. Si enim tantum esset $z + \frac{y}{\beta} = C(\beta x - \alpha y)$, haec aequatio jam contineret infinitas superficies planas inter se parallelas; unde cum functio quaecunque aeque satisfaciat, manifestum est numerum solutionum infinities esse majorem.

Problema II.

§. 19. *Si pro superficiebus secandis fuerit* $zz = cc - xx - yy$, *quae aequatio infinitas sphaeras concentricas complectitur, invenire aequationem pro superficiebus secantibus.*

Solutio.

Cum hanc aequationem differentiando prodeat $z\partial z = -x\partial x - y\partial y$, sive $\partial z = \frac{-x}{z}\partial x \frac{-y}{z}\partial y$, erit $p = \frac{-x}{z}$ et $q = \frac{-y}{z}$. Si jam pro superficiebus secantibus statuatur $\partial z = P\partial x + Q\partial y$, ob $1 + Pp + Qq = 0$, fieri debet $1 - \frac{Px}{z} - \frac{Qy}{z} = 0$, unde fit $Q = \frac{z - Px}{y}$, quo valore in illa aequatione substituto colligitur haec:

$$\partial z = P\partial x + \left(\frac{z - Px}{y}\right)\partial y, \text{ sive } y\partial z - z\partial y = P(y\partial x - x\partial y).$$

Unde patet P esse debere functionem fractionis $\frac{x}{y}$ et integrale completum fore $\frac{z}{y} = F : \frac{x}{y}$, sive $z = yF : \frac{x}{y}$. At vero $F : \frac{x}{y}$ continet omnes functiones nullius dimensionis ipsarum x et y; unde z aequabitur functioni cuicunque unius dimensionis ipsarum x et y, quae aequatio exprimit omnes plane conos verticem in ipso centro sphaerarum concentricarum habentes, cujuscunque figurae fuerint bases. Omnes enim rectae ex centro in superficiem talis coni ductae manifesto sunt normales ad superficies sphaericas.

Problema III.

§. 20. *Si pro superficiebus secandis fuerit data aequatio* $zz = \alpha xx + \beta yy + \gamma$, *invenire aequationem pro superficiebus secantibus.*

Solutio.

Cum igitur sit $\partial z = \frac{\alpha x}{z}\partial x + \frac{\beta y}{z}\partial y$, habebitur $p = \frac{\alpha x}{z}$ et $q = \frac{\beta y}{z}$; unde si pro superficiebus secantibus statuatur $\partial z = P\partial x + Q\partial y$, fieri debet ex aequatione canonica: $z + \alpha Px + \beta Qy = 0$, unde

fit $Q = \frac{-z - \alpha P x}{\beta y}$, quo substituto colligitur aequatio:

$$\partial z = P \partial x - \left(\frac{z + \alpha P x}{\beta y}\right) \partial y,$$

sive $\beta y \partial z + z \partial y = P(\beta y \partial x - \alpha x \partial y)$, quae in hanc transfunditur ex parte sponte integrabilem $\frac{\beta y \partial z + z \partial y}{yz} = \frac{Px}{z}\left(\frac{\beta y \partial x - \alpha x \partial y}{xy}\right)$, unde integrando fit $\beta l z + l y = \int \frac{Px}{z} \partial . (\beta l x - \alpha l y)$, ubi ergo esse debet $\frac{Px}{z} = F : (\beta l x - \alpha l y) = F : \frac{x^\beta}{y^\alpha}$, ita ut pro superficiebus secantibus habeamus hanc aequationem integratam: $y z^\beta = F : \frac{x^\beta}{y^\alpha}$. Hinc si sumatur $\alpha = -1$ et $\beta = -1$, qui est casus praecedentis problematis, erit $\frac{y}{z} = F : \frac{y}{x}$, sive $z = \frac{y}{F : \frac{y}{x}} = y F : \frac{x}{y}$, quae solutio cum ante data prorsus congruit.

Problema IV.

§. 21. *Si pro superficiebus secandis fuerit* $z^3 = \alpha x^3 + \beta y^3 + \gamma$, *invenire aequationem pro superficiebus secantibus*

Solutio.

Differentiatio aequationis propositae praebet $\partial z = \frac{\alpha x x}{z z} \partial x + \frac{\beta y y}{z z} \partial y$, unde fit $p = \frac{\alpha x x}{z z}$ et $q = \frac{\beta y y}{z z}$. Hinc, pro superficiebus secantibus, si fuerit $\partial z = P \partial x + Q \partial y$, fieri debet $1 + \frac{\alpha P x x}{z z} + \frac{\beta Q y y}{z z} = 0$, unde colligitur $Q = \frac{-z z - \alpha P x x}{\beta y y}$, quem valorem substituendo prodit aequatio: $\beta y y \partial z + z z \partial y = P(\beta y y \partial x - \alpha x x \partial y)$, sive $\frac{\beta \partial z}{z z} + \frac{\partial y}{y y} = \frac{P x x}{z z}\left(\frac{\beta y y \partial x - \alpha x x \partial y}{x x y y}\right)$, cujus integrale est

$$\frac{\beta}{z} + \frac{1}{y} = \int \frac{P x x}{z z} \partial . \left(\frac{\beta}{x} - \frac{\alpha}{y}\right) = F : \left(\frac{\beta}{x} - \frac{\alpha}{y}\right).$$

Problema V.

§. 22. *Si pro superficiebus secandis haec habeatur aequatio:* $\int Z \partial z = \int X \partial x + \int Y \partial y + a$, *existentibus* X, Y, Z

functionibus ipsarum x, y, z *respective et* a *parametro variabili, invenire aequationem pro superficiebus secantibus.*

Solutio.

Ob $Z\partial z = X\partial x + Y\partial y$ erit $p = \frac{X}{Z}$ et $q = \frac{Y}{Z}$. Hinc si pro secantibus superficiebus sit $\partial z = P\partial x + Q\partial y$, esse debet $Z + X\partial x + QY = 0$, unde fit $Q = \frac{-Z - PX}{Y}$, quo substituto oritur aequatio: $Y\partial z + Z\partial y = P(Y\partial x - X\partial y)$, sive

$$\frac{\partial z}{Z} + \frac{\partial y}{Y} = \frac{PX}{Z}\left(\frac{\partial x}{X} - \frac{\partial y}{Y}\right),$$

unde integrando fit $\int\frac{\partial z}{Z} + \int\frac{\partial y}{Y} = F : \left(\int\frac{\partial x}{X} - \int\frac{\partial y}{Y}\right)$.

Problema VI.

§. 23. *Si aequatio pro superficiebus secandis fuerit* $Z = aXY$, *ubi* X *functio ipsius* x, Y *ipsius* y, *et* a *parameter variabilis, qui per differentiationem elidi debet, invenire aequationem pro superficiebus secantibus.*

Solutio.

Ad parametrum a elidendum sumatur differentiale logarithmicum, quod erit $\frac{\partial Z}{Z} = \frac{\partial X}{X} + \frac{\partial Y}{Y}$. Ponatur $\partial Z = Z'\partial z$, $\partial X = X'\partial x$, $\partial Y = Y'\partial y$, ita ut sit $\partial z = \frac{ZX'}{XZ'}\partial x + \frac{ZY'}{YZ'}\partial y$, unde colligitur $= p\frac{ZY'}{YZ'}$ et $q = \frac{ZY'}{YZ'}$. Fieri ergo debet $XYZ' + PYZX' + QXZY' = 0$, unde litteram Q eliminando haec prodit aequatio:

$$XZY'\partial z + XYZ'\partial y = P(XY'Z\partial x - YZX'\partial y) = 0,$$

quam dividamus per $XY'Z'$, ut habeamus istam:

$$\frac{Z\partial z}{Z'} + \frac{Y\partial y}{Y'} = PZ\left(\frac{\partial x}{Z'} - \frac{YX'\partial y}{XY'Z'}\right) = \frac{PZ}{Z'}\left(\partial x - \frac{YX'\partial y}{XY'}\right),$$

sive $\frac{Z\partial z}{Z'} + \frac{Y\partial y}{Y'} = \frac{PX'Z}{XZ'}\left(\frac{X\partial x}{X'} - \frac{Y\partial y}{Y'}\right)$. Hinc si fuerit

$$\frac{PZX'}{XZ'} = F : \left(\int\frac{X\partial x}{X'} - \int\frac{Y\partial y}{Y'}\right),$$

erit integrale completum, sive quaesita aequatio pro superficiebus secantibus: $\int\frac{Z\partial z}{Z'}+\int\frac{Y\partial y}{Y'}=F:(\int\frac{X\partial x}{X'}-\int\frac{Y\partial y}{Y'})$.

Scholion.

§. 24. Haec solutio est completa et non solum unum genus superficierum secantium, sed adeo infinita genera continet. Verum saepenumero evenit, ut non infinita genera superficierum secantium, sed tantum unicum genus exhiberi queat. Ita si propositae fuerint infinitae sphaerae planum tabulae in uno puncto tangentes, tum si radius unius cujusvis ponatur $=a$, habebitur haec aequatio: $xx+yy+zz=2az$, unde fit $a=\frac{xx+yy+zz}{2z}$. Hinc cum differentiando sit $x\partial x+y\partial y+z\partial z=a\partial z$, erit $\partial z=\frac{x\partial x+y\partial y}{a-z}$, sive, ob $a-z=\frac{xx+yy-zz}{2z}$, erit $\partial z=\frac{2z(x\partial x+y\partial y)}{xx+yy-zz}$; unde colligitur $p=\frac{2xz}{xx+yy-zz}$ et $q=\frac{2yz}{xx+yy-zz}$. Pro secantibus superficiebus haec satisfacit aequatio: $2b=\frac{xx+yy+zz}{\sqrt{xx+yy}}$, quae differentiata dat $\frac{b(x\partial x+y\partial y)}{\sqrt{xx+yy}}=x\partial x+y\partial y+z\partial z$, unde fit

$$z\partial z=(x\partial x+y\partial y)(\frac{b}{\sqrt{xx+yy}}-1),$$

sive, ob factorem $\frac{b}{\sqrt{xx+yy}}-1=-\frac{(xx+yy-zz)}{2(xx+yy)}$, habebitur

$$\partial z=-\frac{(xx+yy-zz)(x\partial x+y\partial y)}{2z(xx+yy)}=P\partial x+Q\partial y, \text{ ita ut}$$

$$P=-\frac{x(xx+yy-zz)}{2z(xx+yy)} \quad \text{et} \quad Q=-\frac{y(xx+yy-zz)}{2z(xx+yy)},$$

unde fit, uti requiritur, $1+Pp+Qq=0$. Si hunc casum, qui infinitas quidem solutiones, sed unicum tantum superficierum secantium genus admittit, per methodum praecedentem expedire vellemus, tum, eliminando litteram Q, ad aequationem prorsus intractabilem perveniremus. Sequentem casum, simili modo tractandum, haud parvo studio elicui.

Theorema.

§. 25. *Si pro superficiebus secandis fuerit* $a = -z + \sqrt{xx + yy + zz}$, *tum pro superficiebus secantibus erit* $b = z + \sqrt{xx + yy + zz}$.

Demonstratio.

Pro superficiebus secandis est differentialia sumendo

$$\partial z = \frac{x\partial x + y\partial y + z\partial z}{\sqrt{xx + yy + zz}}, \text{ sive}$$

$$\partial z(\sqrt{xx + yy + zz} - z) = x\partial x + y\partial y, \text{ sive}$$

$$a\partial z = x\partial x + y\partial y, \text{ unde fit}$$

$$p = \frac{x}{a} = \frac{x}{\sqrt{xx + yy + zz} - z} \text{ et } q = \frac{y}{a} = \frac{y}{\sqrt{xx + yy + zz} - z}.$$

Pro superficiebus secantibus fit $\partial z = \frac{-(x\partial x + y\partial y + z\partial z)}{\sqrt{xx + yy + zz}}$, sive

$$\partial z(\sqrt{xx + yy + zz} + z) = -x\partial x - y\partial y = b\partial z, \text{ hinc}$$

$$P = \frac{-x}{b} = \frac{-x}{\sqrt{xx + yy + zz} + z} \text{ et } Q = \frac{-y}{b} = \frac{-y}{\sqrt{xx + yy + zz} - z}$$

unde fit $1 + Pp + Qq = \frac{-xx - yy}{xx + yy} + 1 = 0$.

Sequentia problemata methodum indicabunt hujusmodi casus tractandi, quos divinando magis quam via directa resolvimus.

Problema VII.

§. 26. *Si pro superficiebus secandis fuerit* $a = \frac{2zz - xx - yy}{xx - yy}$, *invenire aequationem pro superficiebus secantibus.*

Solutio.

Cum sit $a(xx - yy) = 2zz - xx - yy$, erit differentiando

$$a(x\partial x - y\partial y) = 2z\partial z - x\partial x - y\partial y,$$

unde colligitur $\partial z = p\partial z + q\partial y = \frac{(a+1)}{2z} x\partial x - \frac{(a-1)}{2z} y\partial y$, ideoque $p = \frac{x(a+1)}{2z} = \frac{x(zz - yy)}{z(xx - yy)}$ et $q = -\frac{y(a-1)}{2z} = -\frac{y(zz - xx)}{z(xx - yy)}$. Jam ut fiat $1 + Pp + Qq = 0$, statuatur $P = \frac{-vz - vx}{xy + vz}$ et $Q = \frac{-xz - vy}{xy + vz}$, ubi v est nova quantitas variabilis indeterminata. Hinc pro super-

ficiebus secantibus aequatio $\partial z = P\partial x + Q\partial y$ hanc induet formam:

$$(yz + vx)\,\partial x + (xz + vy)\,\partial y + (xy + vz)\,\partial z = 0,$$

cujus integrale, uti facile perspicitur, est

$$xyz + \int v\,(x\,\partial x + y\,\partial y + z\,\partial z).$$

Hinc si statuatur v functioni cuicunque ipsius $xx + yy + zz$ aequale, erit aequatio pro superficiebus secantibus, quam quaerimus, $xyz = F:(xx + yy + zz)$, vel etiam invertendo $xx + yy + zz = F:xyz$.

Problema VIII (inversum).

§. 27. *Si pro superficiebus secandis fuerit* $xx + yy + zz = F:xyz$, *invenire aequationem pro superficiebus secantibus.*

Solutio.

Ponatur $F:xyz = v$, erit $\partial.F:xyz = v'.\partial.xyz$, ideoque

$$x\partial x + y\partial y + z\partial z = v'(yz\partial x + xz\partial y + xy\partial z),$$ sive

$$\partial x\,(x - v'yz) + \partial y\,(y - v'xz) + \partial z\,(z - v'xy) = 0,$$

hinc $p = \frac{v'yz - x}{z - v'xy}$ et $q = \frac{v'xz - y}{z - v'xy}$. His inventis aequatio canonica: $1 + Pp + Qq = 0$ ita se habebit:

$$z - v'xy + Pv'yz - Px + Qv'xz - Qy = 0,$$

quae aequatio in has duas discerpatur:

$$\text{I. } z - Px - Qy = 0; \quad \text{II. } xy - Pyz - Qxz = 0.$$

Ex priore jam colligitur $Q = \frac{z - Px}{y}$, quo valore in altera substituto reperitur $P = \frac{x(zz - yy)}{z(xx - yy)}$, ideoque $Q = -\frac{y(zz - xx)}{z(xx - yy)}$. Aequatio igitur pro superficiebus secantibus $\partial z = P\partial x + Q\partial y$ nunc erit

$$z\partial z\,(xx - yy) = x\partial x\,(zz - yy) - y\partial y(zz - xx),$$

quae ita commodius repraesentari potest:

$$z\partial z\,(xx - yy) - zz\,(x\partial x - y\partial y) = xy\,(x\partial y - y\partial x),$$

cujus aequationis, per $(xx - yy)^2$ divisae, integrale est

$$\frac{zz}{2(xx - yy)} = \int \frac{xy(x\partial y - y\partial x)}{(xx - yy)^2}.$$

Ad hanc posteriorem formam integrandam ponatur $y = tx$, eritque

$$\int \frac{xy(x\partial y - y\partial x)}{(xx - yy)^2} = \int \frac{t\partial t}{(1-tt)^2} = \frac{1}{2(1-tt)} = \frac{xx}{2(xx-yy)}.$$

Constante igitur rite introducta pro superficiebus secantibus hanc nacti sumus aequationem:

$$\frac{zz}{2(xx-yy)} = A + \frac{xx}{2(xx-yy)}, \text{ sive } A = \frac{zz - xx}{2(xx-yy)},$$

quae ab aequatione in praecedente problemate pro superficiebus secandis proposita: $a = \frac{2zz - xx - yy}{xx - yy}$, tantum quantitate constante differt. Si enim ponatur $A = \frac{a-1}{2}$, erit itidem $a = \frac{2zz - xx - yy}{xx - yy}$.

Problema IX.

§. 28. *Si pro superficiebus secandis fuerit* $az = xx + yy + nzz$, *invenire aequationem pro superficiebus secantibus.*

Solutio.

Differentiando prodit $\partial z = \frac{2x\partial x + 2y\partial y}{a - 2nz} = \frac{2z(x\partial x + y\partial y)}{xx + yy - nzz}$, unde fit $p = \frac{2xz}{xx + yy - nzz}$ et $q = \frac{2yz}{xx + yy - nzz}$. Jam ut fiat $1 + Pp + Qq = 0$, statuatur $P = -\frac{x(xx + yy - nzz) + Sy}{2z(xx + yy)}$ et $Q = -\frac{y(xx + yy - nzz) - Sy}{2z(xx + yy)}$; unde pro superficiebus secantibus oritur haec aequatio:

$$2z\partial z(xx + yy) - nzz(x\partial x + y\partial y) + (xx + yy)(x\partial x + y\partial y)$$
$$= S(y\partial x - x\partial y),$$

quae divisa per $(xx + yy)^{\frac{1}{2}n + 1}$ fit integrabilis; integrale enim, seu aequatio quaesita, ita se habebit:

$$(2 - n)zz + xx + yy = (xx + yy)^{\frac{1}{2}n} F : \frac{y}{x}.$$

Theorema.

§. 29. *Eodem modo, si generalius pro superficiebus secandis fuerit* $az^{\lambda} = xx + yy + nzz$, *tum pro superficiebus secantibus haec erit aequatio:*

$$(2 + \frac{\lambda - 2}{\lambda} n) zz + xx + yy = (xx + yy)^{\frac{2-\lambda}{2\lambda} n} F : \frac{y}{x}.$$

Demonstratio per praecedentia est manifesta, unde superfluum foret eam heic adjicere.

Problema X.

§. 30. *Si pro superficiebus secandis fuerit* $az^\lambda = \frac{yy + xx}{yy - xx}$, *invenire aequationem pro superficiebus secantibus.*

Solutio.

Hic pro aequatione $\partial z = p\partial x + q\partial y$ fit $p = \frac{4xyyz}{\lambda(y^4 - x^4)}$ et $q = \frac{-4xxyz}{\lambda(y^4 - x^4)}$. Nam $\lambda a z^{\lambda - 1} \partial z = \frac{4xy(y\partial x - x\partial y)}{(yy - xx)^2}$, ergo

$$\lambda a z^\lambda \partial z = \frac{4xyz(y\partial x - x\partial y)}{(yy - xx)^2}.$$

At $az^\lambda = \frac{yy + xx}{yy - xx}$, ideoque $\partial z = \frac{4xyz(y\partial x - x\partial y)}{\lambda(y^4 - x^4)}$. Jam, quo aequationi $1 + Pp + Qq = 0$ satisfiat, sumatur $P = \frac{\lambda(yy + xx)y + \lambda Sx}{-4xyz}$ et $Q = \frac{\lambda(yy + xx)x + \lambda Sy}{-4xyz}$, unde aequatio $\partial z = P\partial x + Q\partial y$) fit

$$4xyz\partial z + \lambda(yy + xx)(y\partial x + x\partial y) + \lambda S(x\partial x + y\partial y) = 0,$$

qua per xy divisa et integrata erit

$$2zz + \lambda(yy + xx)lxy = 2\lambda \int (y\partial y + x\partial x)lxy - \lambda \int S(x\partial x + y\partial y).$$

Statuatur $S = 2lxy - T$, et aequatio illa fiet

$$2zz + \lambda(yy + xx)lxy = \lambda \int T(x\partial x + y\partial y) = \lambda F:(xx + yy),$$

quae aequatio pro superficiebus secantibus conveniet aequationi pro superficiebus secandis: $az^\lambda = \frac{yy + xx}{yy - xx}$.

Problema XI.

§. 31. *Si pro superficiebus secandis fuerit quantitas* az *functioni homogeneae* n *dimensionum ipsarum* x *et* y *aequalis, invenire aequationem pro superficiebus secantibus.*

Solutio.

Posito $y = tx$ functio illa homogenea induet hanc formam: $x^n \Theta$, ubi Θ est functio data ipsius t, sicque erit $az = x^n \Theta$, hincque $la + lz = nlx + l\Theta$, unde fit

$$\frac{\partial z}{z} = \frac{n\partial x}{x} + \frac{\partial\Theta}{\Theta} = \frac{n\partial x}{x} + \frac{\Theta'}{\Theta}\partial t,$$

posito $\partial\Theta = \Theta'\partial t$. Jam sit $\frac{\Theta'}{\Theta} = \Pi$, ita ut etiam Π sit functio data ipsius t, et cum sit $t = \frac{y}{x}$, ideoque $\partial t = \frac{x\partial y - y\partial x}{xx}$, erit $\frac{\partial z}{z} = \frac{n\partial x}{x} + \frac{\Pi(x\partial y - y\partial x)}{xx}$, unde ob $\partial z = p\partial x + q\partial y$ fit $p = \frac{nz}{x} = \frac{\Pi yz}{xx}$ et $q = \frac{\Pi xz}{xx}$. Quo igitur aequationi canonicae $1 + Pp + Qq = 0$ satisfiat, qua fieri debet $\frac{xx}{z} + P(nx - \Pi y) + \Pi x Q = 0$, statuantur litterae $P = \frac{S\Pi x}{\Pi z}$ et $Q = \frac{-x}{\Pi z} + \frac{S(\Pi y - nx)}{\Pi z}$, quibus valoribus aequationi illi satisfit.

Nunc pro superficiebus secantibus aequatio $\partial z = P\partial x + Q\partial y$ evadet $\Pi z\partial z = S\Pi x\partial x + S\partial y(\Pi y - nx) - x\partial y$. Hinc eliminetur variabilis $x = \frac{y}{t}$, et ob $\partial x = \frac{t\partial y - y\partial t}{tt}$ aequatio illa, per Π divisa, hanc habebit formam:

$$z\partial z = Sy\partial y\left(\frac{1+tt}{tt}\right) - \frac{y\partial y}{\Pi t}(nS + 1) - \frac{Syy\partial t}{t^3}.$$

Jam fiat $S = R + T$, ubi R sit functio indefinita, T autem ita definiatur ut integratio succedat. Hoc facto erit

$$z\partial z = R\left(y\partial y\frac{(1+tt)}{tt} - \frac{ny\partial y}{\Pi t} - \frac{yy\partial t}{t^3}\right) + Ty\partial y\left(\frac{1+tt}{tt} - \frac{n}{\Pi t}\right) - \frac{yyT\partial t}{t^3} - \frac{y\partial y}{\Pi t},$$

cujus aequationis integrale sequenti modo eruitur: Incipiamus a formula per R multiplicata, quae, separatis variabilibus y et t, ad hanc formam reducitur: $R'\left(\frac{\partial y}{y} - \frac{\Pi\partial t}{\Pi t(1+tt) - ntt}\right)$. Ponatur $\frac{\Pi\partial t}{\Pi t(1+tt) - ntt} = \frac{\partial v}{v}$, ita ut v sit functio cognita ipsius t, et membrum illud erit $R'\left(\frac{\partial y}{y} - \frac{\partial v}{v}\right)$, cujus integrale fit $F : \frac{y}{v}$. Ut vero altera pars nostrae aequationis reddatur integrabilis, ponatur $\frac{1+tt}{tt} - \frac{n}{\Pi t} = M$ et $\frac{1}{\Pi t} = N$, eritque ista pars $y\partial y(MT - N) - \frac{yyT\partial t}{t^3}$, cujus integrale statuamus esse $\frac{1}{2}yy(MT - N)$, ita ut $\partial.(MT - N) = -\frac{2T\partial t}{t^3}$. Est vero $\partial.(MT - N) = M\partial T + T\partial M - \partial N$, unde colligitur

$$\partial T + \frac{T\partial M}{M} + \frac{2T\partial t}{Mt^3} = \frac{\partial N}{M}.$$ Cum vero posuerimus

$$\frac{\Pi \partial t}{\Pi t(1+tt)-ntt}=\frac{\partial t}{\left(\frac{1+tt}{tt}-\frac{n}{\Pi t}\right)t^3}=\frac{\partial t}{M t^3}=\frac{\partial v}{v},$$

habebimus $\partial T + T\left(\frac{\partial M}{M}+\frac{2\partial v}{v}\right)=\frac{\partial N}{M}$, quae aequatio, ducta in Mvv, integrabilis redditur; integrale ejus enim erit $M v v T = \int v v \partial N$, unde fit $T=\frac{\int v v \partial N}{M v v}$. His igitur valoribus collectis aequatio pro superficiebus secantibus erit $zz = 2F:\frac{y}{v}+yy(MT-N)$. Est vero $MT-N=\frac{\int v v \partial N - v v N}{v v}=-\frac{2\int N v \partial v}{v v}$, ita ut

$$zz = 2F:\frac{y}{v}-\frac{2\int N v \partial v}{v v}.$$

Corollarium.

§. 32. Si formulae $x^n\Theta$ aequalis fuerit formula az^λ, solutio non fit difficilior, atque pro hoc casu multo generaliori pro superficiebus secantibus haec habebitur aequatio: $\frac{zz}{2\lambda}=F:\frac{y}{v}-\frac{\int N v \partial v}{v v}$. Quin etiam, si loco z proposita fuerit functio quaecunque ipsius z, quae sit Z, ita ut pro superficiebus secandis hanc habeamus aequationem: $Z=x^n\Theta$; tum pro superficiebus secantibus prodibit ista aequatio: $\int\frac{Z\partial z}{Z'}=F:\frac{y}{v}-\frac{2\int N v \partial v}{v v}$, quemadmodum per calculum praecedenti similem perspicere licet.

Problema XII.

§. 33. *Si pro superficiebus secandis fuerit* a + z *functio homogenea unius dimensionis ipsarum* x *et* y, *invenire aequationem pro superficiebus secantibus.*

Solutio.

Posito $y=tx$ sit $a+z=\Theta x$, existente Θ functioni ipsius t. Hinc ergo erit $\partial z=\Theta\partial x+x\partial\Theta$, sive posito $\partial\Theta=\Theta'\partial t=\Theta'\partial\cdot\frac{y}{x}$, erit $\partial z=\Theta\partial x+\frac{\Theta'(x\partial y-y\partial x)}{x}$, unde colligitur $p=\Theta-\Theta' t$ et $q=\Theta'$, ita ut aequatio, quam canonicam supra vocavimus,

$1 + Pp + Qq = 0$ sit $1 + P(\Theta - \Theta' t) + Q\Theta' = 0$. Quo jam huic aequationi satisfiat ponatur $P = S\Theta'$ et $Q = -\frac{1}{\Theta'} + S(\Theta' t - \Theta)$, eritque pro superficiebus secantibus haec aequatio:

$$\partial z = -\frac{\partial y}{\Theta'} + S(\Theta' \partial x + (\Theta' t - \Theta)\partial y).$$

Nunc eliminetur variabilis x ope aequationis $\partial x = \frac{t\partial y - y\partial t}{tt}$, fietque

$$\partial z = -\frac{\partial y}{\Theta'} + \frac{S}{tt}(\Theta' t \partial y(1 + tt) - \Theta' y \partial t - \Theta t t \partial y),$$

quae aequatio, posito brevitatis gratia $\Theta'(1 + tt) - \Theta t = A\Theta'$, erit

$$\partial z = -\frac{\partial y}{\Theta'} + \frac{S\Theta'}{tt}(At\partial y - y\partial t) = -\frac{\partial y}{\Theta'} + S'(At\partial y - y\partial t).$$

Fiat nunc $S' = R + T$, erit aequatio nostra

$$\partial z = R(At\partial y - y\partial t) + T(At\partial y - y\partial t) - \frac{\partial y}{\Theta'};$$

sive, posito $\frac{\partial t}{At} = \frac{\partial v}{v}$, ea hanc induet formam concinniorem:

$$\partial z = R\left(\frac{\partial y}{y} - \frac{\partial v}{v}\right) + T(At\partial y - y\partial t) - \frac{\partial y}{\Theta'};$$

unde integrando colligitur pro superficiebus secantibus

$$z = F : \frac{y}{v} + \int \partial y(AtT - N) - \int Ty\partial t,$$

existente $N = \frac{1}{\Theta'}$.

Problema XIII.

§. 34. *Si pro superficiebus secandis fuerit* $a + z = x^n \Theta$, *existente* Θ *functione quacunque ipsius* $t = \frac{y}{x}$, *invenire aequationem pro superficiebus secantibus.*

Solutio.

Hic igitur erit differentiando $\partial z = nx^{n-1}\Theta\partial x + x^n\partial\Theta$, sive, posito $\partial\Theta = \Theta'\partial t = \Theta'\partial \cdot \frac{y}{x}$, habebimus

$$\partial z = nx^{n-1}\Theta\partial x + x^{n-1}\Theta'(\partial y - t\partial x),$$

unde colligitur $p = x^{n-1}(n\Theta - t\Theta')$ et $q = x^{n-1}\Theta'$. Ponatur $\frac{\Theta}{\Theta'} = \Pi$, et cum esse debeat $\frac{1}{\Theta'} + Px^{n-1}(n\Pi - t) + x^{n-1}Q = 0$, huic aequationi satisfacient sequentes valores pro P et Q:

$$P = \frac{S}{x^{n-1}\Theta'} \text{ et } Q = \frac{-S(n\Pi - t) - 1}{x^{n-1}\Theta'};$$

unde pro superficiebus secantibus haec prodit aequatio:

$$\partial z = \frac{S(\partial x - (n\Pi - t)\partial y) - \partial y)}{x^{n-1}\Theta'}, \text{ sive ob } y = tx \text{ erit}$$

$$\partial z = \frac{S(\partial x + (t - n\Pi)(t\partial x + x\partial t) - \partial y}{x^{n-1}\Theta'}, \text{ sive}$$

$$\partial z = \frac{S(\partial x(1 + t(t - n\Pi) + x\partial t(t - n\Pi) - \partial y}{x^{n-1}\Theta'}.$$

Quod si jam statuatur $S = R + T$, tum vero ponatur brevitatis gratia $\frac{\partial t(t - n\Pi)}{1 + t(t - n\Pi)} = \frac{dv}{v}$, habebimus integrale $z = F : vx + V$, existente differentiali membri secundi

$$\partial V = \frac{\partial x}{x^{n-1}}\left(\frac{T(1 + t(t - n\Pi)}{\Theta'} - \frac{t}{\Theta'}\right) + \frac{\partial t}{x^{n-2}}\left(\frac{T(t - n\Pi)}{\Theta'} - \frac{1}{\Theta'}\right).$$

Statuatur $\frac{1 + t(t - n\Pi)}{\Theta'} = M$ et $\frac{t}{\Theta'} = N$, erit $\partial V = \frac{\partial x}{x^{n-1}}(TM - N)$, cujus integrale si ponatur $V = \frac{x^{2-n}}{2-n}(TM - N)$, necesse est ut fiat

$$\frac{\partial t}{x^{n-2}}\left(\frac{T(t - n\Pi)}{\Theta'} - \frac{1}{\Theta'}\right) = \frac{x^{2-n}}{2-n}\partial\,.\,(TM - N),$$

sive $\partial\,.\,(TM - N) = (2 - n)\left(\frac{T(t - n\Pi)\partial t}{\Theta'} - \frac{\partial t}{\Theta'}\right)$. Est vero

$$\partial t\,\frac{(t - n\Pi)}{\Theta'} = \frac{M(t - n\Pi)\partial t}{1 + t(t - n\Pi)} = M\frac{\partial v}{v},$$

quo substituto erit

$$M\partial T + T\partial M - \partial N = (2 = n)\left(MT\frac{\partial v}{v} - \frac{\partial t}{\Theta'}\right),$$

quae aequatio per v^{n-2} multiplicata et integrata praebet

$$TMv^{n-2} = \int v^{n-2}\partial N - (n - 2)\int\frac{v^{n-2}\partial t}{\Theta'}.$$

Scholion.

§. 35. Simili plane modo problema adhuc generalius tractari potest, quo pro superficiebus secandis statuitur $a + Z = x_n\Theta$, existente Z functione quacunque ipsius z; tum enim pro superficiebus secantibus, hanc habebimus aequationem: $\int\frac{\partial z}{Z'} = F : xv - (xv)^{2-n}\int\frac{v^{n-3}\partial t}{\Theta'(t - n\Pi)}$, existente $t = \frac{y}{x}$, $\Pi = \frac{\Theta}{\Theta'}$ et $\frac{\partial v}{v} = \frac{\partial t(t - n\Pi)}{1 + t(t - n\Pi}$.

Problema XIV.

§. 36. *Si pro superficiebus secandis detur aequatio:*

$$axy + bxz + cyz = 0,$$

invenire aequationem pro superficiebus secantibus.

Solutio.

Cum hinc differentiando prodeat sequens aequatio:

$$ax\partial y + ay\partial x + bx\partial z + bz\partial x + cy\partial z + cz\partial y = 0,$$

pro aequatione $p\partial x + q\partial y + r\partial z = 0$ erit $p = ay + bz$, $q = ax + cz$, $r = bx + cy$. Hinc si pro secantibus statuatur aequatio $P\partial x + Q\partial y R\partial z = 0$, fieri debet $Pp + Qq + Rr = 0$, cui infinitis modis satisfieri potest, una litterarum P, Q, R, evanescente accepta. Casus simpliciores sunt:

$P = ax + cz$	$P = bx + cy$	$P = 0$
$Q = -ay - bz$	$Q = 0$	$Q = bx + cy$
$R = 0$	$R = -ay - bz$	$R = -ax - cz.$

At vero pro P, Q, R valores assumti tales esse debent, ut aequatio $P\partial x + Q\partial y + R\partial z$ fiat possibilis, hoc est ut fiat:

$$\left(\frac{P\partial Q - Q\partial P}{\partial z}\right) + \left(\frac{Q\partial R - R\partial Q}{\partial x}\right) + \left(\frac{R\partial P - P\partial R}{\partial y}\right) = 0,$$

quem in finem pro his tribus litteris P, Q, R omnes valores possibiles indagari debent, qui ex tribus principalibus componuntur. Primum igitur casum per s, secundum per t, tertium per u multiplicemus et productum in unam summam colligamus, quo facto oriuntur valores:

$$P = (as + bt)x + cty + csz;$$
$$Q = bux + (cu - as)y - bsz;$$
$$R = -aux - aty - (bt + cu)z;$$

Hinc jam pro litteris s, t, u, tales investigari debent valores, ut criterio possibilitatis satisfiat. Inde autem deducimus sequentes valores:

$$\left(\frac{P\partial Q - Q\partial P}{\partial z}\right) = - bs\,(as + bt + cu)\,x - cs\,(cu - as + bt)\,y$$
$$\left(\frac{Q\partial R - R\partial Q}{\partial x}\right) = - au(cu - as - bt)\,y + bu\,(bt + cu + as)\,z$$
$$\left(\frac{R\partial P - P\partial R}{\partial y}\right) = at\,(as + bt - cu)\,x - ct\,(bt + cu - as)\,z$$

in quibus singuli coordinatarum coëfficientes seorsim ad nihilum redigi debent, unde deducuntur sequentes aequationes:

$$cu\,(bs + at) + ab\,(ss - tt) - st\,(bb - aa) = 0$$
$$bt\,(au - cs) + ac\,(ss - uu) + us\,(aa - cc) = 0$$
$$as\,(ct + bu) + bc\,(uu - tt) + tu\,(bb - cc) = 0$$

ex quibus, eliminatis quadratis ss, tt, uu, quod fit primam in c, secundam in $-b$, tertiam in $-a$ ducendo, oritur nova: summa enim suppeditat:

$$bsu\,(cc - aa) + atu\,(cc - bb) + cst\,(bb - aa) = 0.$$

Sin autem eliminentur quadrata aa, bb, cc, prodit aequatio identica $0 = 0$; unde concludendum est, trium illarum aequationum unam in binis reliquis jam contineri, ita ut sufficiat binis satisfecisse.

In genere autem hanc quaestionem resolvere non licet. At vero talibus valoridus pro P, Q, R, inventis integratio aequationis

$$P\partial x + Q\partial y + R\partial z = 0,$$

nulla amplius laborat difficultate. Quin adeo, quia litterarum s, t, u una manet indeterminata, infinita integralia exhiberi possunt, quae autem omnia sunt particularia. At vero ex duobus hujusmodi integralibus aequatio generalis pro superficiebus secantibus formabitur, dum unum statuitur functioni cuicunque alterius aequale.

Corollarium.

§. 37. Casu quo ternae litterae a, b, c, sunt inter se aequales, solutio satis commode expediri potest. Tres enim illae aequationes hoc casu in sequentes abeunt:

$$u\,(s + t) + ss - tt = (s + t)\,(u + s - t) = 0$$
$$t\,(u - s) + ss - uu = (u - s)\,(t - s - u) = 0$$
$$s\,(t + u) + uu - tt = (t + u)\,(s + u - t) = 0$$

quibus omnibus satisfit sumendo $t = s + u$. Hoc igitur casu habebimus:

$$P = (2s + u)x + (s + u)y + sz,$$
$$Q = ux + (u - s)y - sz,$$
$$R = -ux - (s + u)y - (s + 2u)z.$$

Tum autem, posito brevitatis gratia $2s + u = 3f$, $u - s = 3g$; $-(s + 2u) = 3h$, integrale aequationis $P\partial x + Q\partial y + R\partial z = 0$ reperitur fore: $(x + y + z)(fx + gy + hz)^2 = C$, sive etiam:

$$(x + y + z)((2s + u)x + (u - s)y - (s + 2u)z)^2 = \Delta.$$

Hinc si sumatur $u = 0$ habebimus hanc aequationem:

$$\Delta = (x + y + z)(2x - y - z)^2.$$

At sumto $u = s$ erit $\Delta = (x + y + z)(x - z)^2$. Ille jam valor, functioni hujus aequatus, praebet aequationem generalissimam pro superficiebus secantibus.

Scholion.

§. 38. Quemadmodum autem postremum integrale investigari debeat hic ostendamus. Spectetur variabilis z tanquam constans et integretur aequatio $P\partial x + Q\partial y = 0$, quae ut ad homogeneitatem reducatur, statuatur: $x = X + \frac{uz}{s}$ et $y = Y - \frac{(s+u)z}{s}$; tum enim prodit

$$(2s + u)X\partial X + (s + u)Y\partial X + uX\partial Y + (u - s)Y\partial Y = 0.$$

Unde si hic loco ∂X et ∂Y scribatur X et Y formabitur denominator integrationem producens, qui erit

$$(2s + u)XX + (s - 2u)YX + (u - s)YY$$

qui resolvitur in hos factores:

$$(X + Y)((2s + u)X - (s - u)Y);$$

factaque solita resolutione reperitur integrale aequationis, scil.:

$$C = (X + Y)((2s + u)X - (s - u)Y)^2);$$

tum vero reperitur $X + Y = x + y + z$, hincque denique resultat haec aequatio finita pro superficiebus secantibus:

$$(2s + u) X + (u - s) Y = (2s + u) x + (s - u) y - (s + 2u) z.$$

Problema XV.

§. 39. *Si pro superficiebus secandis detur aequatio* $A = \frac{zz + axx + byy}{z^n}$, *invenire aequationem pro superficiebus secantibus.*

Solutio.

Cum differentiando prodeat haec aequatio:

$$2axz\partial x + 2byz\partial y + (2 - n) zz\partial z - n (axx + byy) \partial z = 0,$$

posito $2 - n = 2cn$, ita ut $c = \frac{2 - n}{2n}$, habebimus $p = 2axz$, $q = 2byz$, $r = n (2czz - axx - byy)$. Jam pro secantibus superficiebus statuatur aequatio $P\partial x + Q\partial y + R\partial z = 0$, fierique debet $Pp + Qq + Rr = 0$, cui aequationi satisfiet sequentibus valoribus pro P, Q, R assumtis: $P = \frac{x}{2z} - \frac{cz}{ax} + Sby$; $Q = \frac{y}{2z} - Sax$; $R = \frac{1}{n}$, quibus in aequatione $P\partial x + Q\partial y + R\partial z = 0$ substitutis termini littera S affecti statim dant $Sby\partial x - Sax\partial y = 0$, unde fit $\frac{b\partial x}{x} = \frac{a\partial y}{y}$, hincque $blx = aly$, seu $\frac{x^b}{y^a} = \text{Const.}$ At vero generaliter habebimus hanc aequationem differentialem:

$$\frac{x\partial x}{2z} + \frac{y\partial y}{2z} - \frac{cz\partial x}{ax} + \frac{\partial z}{n} + S (by\partial x - ax\partial y) = 0,$$

sive hanc:

$$x\partial x + y\partial y + T (by\partial x - ax\partial y) = \frac{2czz\partial x}{ax} - \frac{2z\partial z}{n}$$

existente $T = 2 S z$, quae quantitas ita definiri debet, ut aequatio reddatur divisibilis. Hunc in finem dispiciendum est qualis functio ipsarum x et y pro T assumi queat, ut integratio succedat. Dividatur aequatio per x^m, positoque $\frac{2cn}{a} = m$, aequatio differentialis hoc modo prodibit expressa:

$$\frac{mzz\partial x}{nx^{m+1}} - \frac{2z\partial z}{nx^m} = \frac{x\partial x + y\partial y + T(by\partial x - ax\partial y)}{x^m} = \partial V$$

cujus integrale est: $V = -\frac{zzx^{-m}}{n}$. Quo autem quantitas V determinetur, statuatur $T = \frac{\lambda y}{x}$, eritque

$$\partial V = \frac{\partial x}{x^{m-1}} + \frac{(1 - \lambda a) y \partial y}{x^m} + \frac{\lambda b y y \partial x}{x^{m+1}},$$

unde, sumto $\lambda = \frac{m}{ma - 2b}$, ita ut $1 - \lambda a = \frac{-2b}{ma - 2b}$, colligitur

$$\partial V = \frac{\partial x}{x^{m-1}} - \frac{2 b y \partial y}{(ma - 2b) x^m} = \frac{m b y y \partial x}{(ma - 2b) x^{m+1}},$$

cujus integrale est $V = \frac{x^{2-m}}{2-m} - \frac{byy}{(ma - 2b) x^m}$, ita ut denique habeamus

$$+ \frac{zzx^{-m}}{n} + \frac{x^{2-m}}{2-m} - \frac{byy}{(ma - 2b) x^m} = \text{Const.}$$

quae aequatio si in x^m ducatur et loco constantis scribatur $F : \frac{x^b}{y^a}$: quam supra revera constantem esse invenimus, erit

$$\frac{zz}{n} + \frac{xx}{2 - m} + \frac{byy}{2b - ma} = x^m F : \frac{x^b}{y^a}.$$

Problema XVI.

§. 40. *Si superficies secandae fuerint omnes plana tangentia superficiem coni recti, invenire omnes superficies eas normaliter secantes.*

Solutio.

Concipiatur per verticem coni planum axi normale, ad quod referantur ternae coordinatae x, y, z, erit aequatio pro omnibus istis planis $z = nx \cos.\alpha + ny \sin.\alpha$, ubi α vicem gerit parametri variabilis, unde angulus α satis perplexe definiretur; quamobrem non parametrum istum α, sed potius quantitatem z ex calculo eliminare necesse est, quem in finem etiam variabilitas ipsius α in calculum est introducenda. Differentiando igitur erit:

$$\partial z = n\partial x \cos.\alpha + n\partial y \sin.\alpha + n\partial\alpha (y \cos.\alpha - x \sin.\alpha);$$

unde si pro superficiebus secantibus statuatur ut supra $\partial z = P\partial x + Q\partial y$, fieri debet $1 + nP \cos.\alpha + nQ \sin.\alpha = 0$. Statuatur igitur $P = -\frac{1}{n} \cos.\alpha - A \sin.\alpha$; $Q = -\frac{1}{n} \sin.\alpha + A \cos.\alpha$, existente A

functione quacunque ipsius α. His jam valoribus pro P et Q substitutis prodit haec aequatio:

$$\partial z = -\frac{\partial x \cos.\alpha}{n} - \frac{\partial y \sin.\alpha}{n} + A(\partial y \cos.\alpha - \partial x \sin.\alpha),$$

quae si a priore subtrahatur, posito $n + \frac{1}{n} = m$, relinquit

$$0 = \partial x(m\cos.\alpha + A\sin.\alpha) + \partial y(m\sin.\alpha - A\cos.\alpha) + n\partial\alpha(y\cos.\alpha - x\sin.\alpha);$$

quam aequationem integrabilem fieri ponamus per multiplicatorem M, ejusque integrale habere formam:

$$Mx(m\cos.\alpha + A\sin.\alpha) + My(m\sin.\alpha - A\cos.\alpha) = \Delta;$$

cujus igitur differentiale, aequationi modo erutae aequatum, dat

$$\left\{\begin{array}{l} Mx\partial\alpha(A\cos.\alpha - m\sin.\alpha) + My\partial\alpha(m\cos.\alpha + A\sin.\alpha) \\ + x\partial M(m\cos.\alpha + A\sin.\alpha) + y\partial M(m\sin.\alpha - A\cos.\alpha) \\ + Mx\partial A\sin.\alpha \qquad - My\partial A\cos.\alpha \\ \qquad - nM\partial\alpha(y\cos.\alpha - x\sin.\alpha) \end{array}\right\} = 0$$

ubi si membra per x et per y affecta seorsim ad nihilum redigantur, prodibit duplex aequatio, scilicet:

$$0 = \frac{\partial M}{M}(m\cos.\alpha + A\sin.\alpha) + \partial\alpha(A\cos.\alpha - m\sin.\alpha) + n\partial\alpha\sin.\alpha + \partial A\sin.\alpha;$$

$$0 = \frac{\partial M}{M}(m\sin.\alpha - A\cos.\alpha) + \partial\alpha(m\cos.\alpha + A\sin.\alpha) - n\partial\alpha\cos.\alpha - \partial A\cos.\alpha.$$

Si jam harum aequationum prior in $\cos.\alpha$, altera in $\sin.\alpha$ ducatur, earum summa dabit $m\frac{\partial M}{M} + A\partial\alpha = 0$, unde colligitur $\frac{\partial M}{M} = -\frac{A\partial\alpha}{m}$. At vero si ex binis illis aequationibus quaerantur valores ipsius $\frac{\partial M}{M}$ et inter se rite aequentur, resultabit haec aequatio concinna:

$$\partial\alpha(mm + AA - mn) - m\partial A = 0,$$

sive, ob $m - n = \frac{1}{n}$, erit $\partial\alpha(\frac{m}{n} + AA) = m\partial A$, unde colligitur $\partial\alpha = \frac{mn\partial A}{m + nAA}$, cujus integrale est $\alpha = \sqrt{mn}\,.\,\text{Arc.tag.}\frac{A\sqrt{n}}{\sqrt{m}}$, hincque deducitur $A = \sqrt{\frac{m}{n}}\,.\,\text{tag.}\frac{\alpha}{\sqrt{mn}}$, quo substituto erit

$$\frac{\partial M}{M} = -\frac{1}{\sqrt{mn}}\partial\alpha\ \text{tag.}\frac{\alpha}{\sqrt{mn}},$$

atque integrando prodit $lM = l\cos.\frac{\alpha}{\sqrt{mn}}$, et in numeris: $M = \cos.\frac{\alpha}{\sqrt{mn}}$.

Hoc igitur valore pro multiplicatore M in aequationem nostram introducto habebimus pro superficiebus secantibus:

$$\Delta = m \cos. \frac{\alpha}{\sqrt{mn}} (x \cos. \alpha + y \sin. \alpha) + \sqrt{\frac{m}{n}} \sin. \frac{\alpha}{\sqrt{mn}} (x \sin. \alpha - y \cos. \alpha).$$

Hoc igitur modo nacti sumus aequationem finitam inter x, y, α; unde si ope aequationis $z = n x \cos. \alpha + n y \sin. \alpha$ angulum α eliminare vellemus, prodiret quidem aequatio inter x, y, z; at vero aequatio inventa sufficit ad superficies construendas. Pro quovis enim valore Δ, qui est parameter variabilis superficierum secantium, sumtis pro lubitu binis α et x, reperitur valor ipsius y, ac praeterea valor ipsius z, quae operatio si per omnes valores ipsius x instituatur, infinitae reperientur curvae, quae conjunctae superficiem secantem formabunt. Unde patet, omnes valores ipsius Δ infinitas suppeditare superficies secantes, quae tamen solutio unam tantum speciem continet, at vero generalius hoc modo eruetur. Cum omnes superficies secandae transeant per verticem coni, omnes sphaerae ex hoc centro descriptae omnes istas superficies normaliter secabunt, quarum aequatio cum sit $xx + yy + zz =$ const. in aequatione supra inventa loco Δ scribi poterit functio quaecunque ipsius $xx + yy + zz$, ita ut aequatio generalis pro superficiebus secantibus sit:

$$F:(xx + yy + zz) = m \cos. \frac{\alpha}{\sqrt{mn}} (x \cos. \alpha + y \sin. \alpha) + \sqrt{\frac{m}{n}} \sin. \frac{\alpha}{\sqrt{mn}} (x \sin. \alpha - y \cos. \alpha).$$

Problema XVII.

§. 41. *Data pro superficiebus secandis hac aequatione:*

$$zz + 2xy = A,$$

invenire aequationem pro superficiebus secantibus.

Solutio.

Cum hic sit differentiando $z \partial z + x \partial y + y \partial x = 0$, erit $p = y$, $q = x$, $r = z$, fierique debet $y P + x Q + z R = 0$, cui aequationi sequentibus tribus modis satisfieri potest:

I. $P = x$, $Q = y$, $R = 0$.
II. $P = 0$, $Q = z$, $R = -x$
III. $P = z$, $Q = 0$, $R = -y$.

Casus primus dat pro superficiebus secantibus aequationem $x\partial x - y\partial x = 0$, unde fit $xx - yy = C$. Tum vero combinando secundum casum in Π ductum cum tertio prodit $P = z$, $Q = \Pi z$, $R = -\Pi x - y$, unde oritur aequatio: $z\partial x + \Pi z\partial y - (\Pi x + y)\partial z = 0$, ex qua fit $\frac{\partial z}{z} = \frac{\partial x + \Pi\partial y}{\Pi x + y}$. Jam sumto $\Pi = 1$ statim fit integrando $lz = l\alpha + l(x + y)$, unde $z = \alpha(x + y)$. Hinc natum est sequens Problema novae indolis.

Problema XVIII.

§. 42. *Proposita formula differentiali hac:* $\frac{\partial x + \Pi\partial y}{\Pi x + y}$, *invenire functiones ipsarum* x *et* y, *quas loco* Π *assumi oportet, ut formula fiat possibilis.*

Solutio.

Primo ex praecedente problemate liquet, posito $\partial v = \frac{\partial x + \Pi\partial y}{\Pi x + y}$ sumi posse $\Pi = 1$, ut fiat $v = l(x + y)$. *Secundo* aeque patet, sumto $\Pi = -1$ fore $v = -l(x + y)$. *Tertio* si sumatur $\Pi = \frac{-x}{y}$, fiet $v = \int\frac{y\partial x - x\partial y}{yy - xx} = \frac{1}{2}l\frac{y + x}{y - x}$. *Quarto* sumi poterit $\Pi = \frac{\alpha x - \beta y}{\beta x - \alpha y}$; tum enim habebitur

$$v = \int\frac{\beta x\partial x - \beta y\partial y - \alpha y\partial x + \alpha x\partial y}{\alpha(xx - yy)} = \frac{1}{2}l\frac{x + y}{y - x} + \frac{\beta}{\alpha}l\sqrt{xx - yy}.$$

Ut alios casus eruamus, faciamus *quinto* $x = p + q$ et $y = p - q$, ut fiat $\partial v = \frac{(1 + \Pi)\partial p + (1 - \Pi)\partial q}{(1 + \Pi)p - (1 - \Pi)q}$. Ponatur $\frac{1 + \Pi}{1 - \Pi} = \Theta$, erit $\partial v = \frac{\Theta\partial p + \partial q}{\Theta p - q}$. Sumatur $\Theta = \frac{\alpha p^{m-1}}{\beta q^{n-1}}$, fietque $\partial v = \frac{\alpha p^{m-1}\partial p + \beta q^{n-1}\partial q}{\alpha p^m - \beta q^n}$ et $m\partial v = \frac{m\alpha p^{m-1}\partial p + m\beta q^{n-1}\partial q}{\alpha p^m - \beta q^n}$; unde patet fieri debere $n = -m$, ut habeamus $mv = l(\alpha p^m - \beta q^n)$. Sumto igitur $\Pi = \frac{\Theta - 1}{\Theta + 1}$, hoc

est $\Pi = \frac{\alpha (x+y)^{m-1} - \beta (x-y)^{n-1}}{\alpha (x+y)^{m-1} + \beta (x-y)^{n-1}}$, obtinebitur integrale

$$v = \frac{1}{m}\, l\, (\alpha (x+y)^m - \beta (x-y)^n).$$

Si *Sexto* ponatur $y = tx$, fit $\partial v = \frac{\partial x (1 + \Pi t) + \Pi x \partial t}{x (\Pi + t)}$. Ponatur $\frac{1+\Pi t}{\Pi + t} = \Theta$, erit $\partial v = \Theta \frac{\partial x}{x} + \frac{\Pi \partial t}{\Pi + t}$, existente $\Pi = \frac{t\Theta - 1}{t - \Theta}$. Hinc si statuatur $\Theta = n$, ut sit $\Pi = \frac{tn+1}{t-n}$, erit $\partial v = \frac{n \partial x}{x} + \frac{n t \partial t}{tt - 1} - \frac{\partial t}{tt - 1}$, ideoque $v = n l x + \frac{1}{2} n l (tt - 1) + \frac{1}{2} l \frac{1+t}{1-t}$, sive in x et y erit $v = n\, l \sqrt{yy - xx} + \frac{1}{2}\, l \frac{x+y}{x-y}$, quae solutio cum superiore tertia prorsus convenit. Tandem generalius posito $\sqrt{yy - xx} = u$, si U fuerit functio quaecunque ipsius u, valor $\Pi = \frac{Uy - x}{y - Ux}$ quaesito satisfaciet. Facta enim substitutione formula $\partial v = \frac{\partial x + \Pi \partial y}{\Pi x + y}$ abit in hanc: $\partial v = \frac{y \partial x - x \partial y}{yy - xx} + \frac{U (y \partial y - x \partial x)}{yy - xx}$, unde colligitur

$$v = \frac{1}{2}\, l \frac{y+x}{y-x} + \int \frac{U \partial u}{u}.$$

Scholion.

§. 43. Quaestio hic formari potest hujus indolis generalissima: Si p, q, et P, Q denotent functiones homogeneas nullius dimensionis binarum variabilium x et y datas, et proposita fuerit haec formula differentialis:

$$\partial v = \frac{p \partial x + \Pi q \partial y}{\Pi P + Q}\, x^{n-1},$$

in quam ingreditur functio indeterminata Π, eam ita determinare ut integratio succedat. Hanc autem investigationem maxime arduam in alia dissertatione suscipiam.

DE SPHAERIS OSCULANTIBUS.

AUCTORE
N. FUSS.

Conventui exhibuit die 9 Julii 1806.

§. 1. Quemadmodum per data tria puncta circulum describere licet, ita sphaera concipi potest, quae per data quatuor puncta transeat. Hinc cum circulus curvam quampiam osculans vocatur, qui per terna curvae puncta proxima transit, simili modo etiam *sphaeram osculantem* appellare licebit eam, quae per data quatuor puncta proxima cujusque curvae transit. Ubi quidem observandum est, si tota curva in eodem plano existat, tum sphaerae osculantis radium cum ipso radio circuli osculantis convenire. Sin autem curva descripta fuerit in superficie sphaerica, manifestum est hanc ipsam esse sphaeram osculantem quandoquidem per omnia curvae puncta transit. Pro qualibet autem curva non in eodem plano sita centrum et radius sphaerae osculantis sequenti modo determinari poterit.

§. 2. Sit MN curva proposita duplicis curvaturae, ejusque punctum quodcunque Z ad ternos axes principales inter se normales OA, OB, OC referatur, ope coordinatarum orthogonalium $OX = x$, $XY = y$, $YZ = z$. Ad eosdem axes referatur quoque centrum sphaerae osculantis H, pro quo sint coordinatae $OF = f$, $FG = g$, $GH = h$, radius vero sphaerae osculantis vocetur $HZ = r$, atque ex supra dictis apparet, hunc radium invariatum manere debere, etiamsi punctum Z per tria elementa contigua curvae propositae promoveatur. Unde sequitur, non solum ejus differentiale primum et secundum, quemadmodum in *radio osculi* pro curvis non Tab. I. Fig. 5.

in eodem plano sitis fieri solet, sed etiam differentiale tertium nihilo esse aequandum.

§. 3. Cum igitur sit $HZ^2 = HK^2 + KZ^2$ et $HK^2 = GY^2 = GI^2 + IY^2$, erit $HZ^2 = FX^2 + IY^2 + KZ^2$, hoc est:

$$rr = (x - f)^2 + (y - g)^2 + (z - h)^2,$$

cujus ergo expressionis differentialia primum, secundum et tertium si nihilo aequalia ponantur, orientur tres aequationes, ex quibus intervalla $x - f$, $y - g$, $z - h$, definire licebit, quibus inventis radius sphaerae osculantis erit:

$$r = \sqrt{(x - f)^2 + (y - g)^2 + (z - h)^2}.$$

Ubi statim manifestum est, pro curva in superficie sphaerae, cujus radius $= a$, descripta, si abscissae a centro computentur, fore $f = g = h = 0$, ideoque $r = a$, uti requiritur.

§. 4. Differentiemus jam ter formulam illam pro quadrato radii sphaerae osculantis inventam, et quo haec differentialia facilius exprimi queant, quoniam curva per ternas coordinatas x, y, z, ita determinatur, ut tam y quam z spectari possint tanquam functiones certae ipsius x, statuamus $\partial y = p\partial x$, $\partial z = q\partial x$; $\partial p = p'\partial x$, $\partial q = q'\partial x$; $\partial p' = p''\partial x$, $\partial q' = q''\partial x$, hocque facto differentiationes prima, secunda et tertia dabunt sequentes aequationes:

$$\text{I.} \quad x - f + p(y - g) + q(z - h) = 0;$$
$$\text{II.} \quad 1 + pp + qq + p'(y - g) + q'(z - h) = 0;$$
$$\text{III.} \quad 3pp' + 3qq' + p''(y - g) + q''(z - h) = 0;$$

ex quibus jam haud difficile erit intervalla $x - f$, $y - g$, $z - h$, eruere.

§. 5. Quo calculum magis contrahamus, ponamus brevitatis gratia

$$1 + pp + qq = ss;$$
$$pp' + qq' = ss';$$

et binae aequationes II. et III. hanc induent formam concinniorem:

$$\text{II.} \quad ss + p'(y-g) + q'(z-h) = 0;$$
$$\text{III.} \quad 3ss' + p''(y-g) + q''(z-h) = 0.$$

Instituantur cum his aequationibus sequentes combinationes:

$$\text{II. } q'' - \text{III. } q' = q''ss - 3q'ss' + (y-g)(p'q'' - q'p'') = 0$$
$$\text{II. } p'' - \text{III. } p' = p''ss - 3p'ss' + (z-h)(p''q' - q''p') = 0$$

ex quibus eliciuntur valores quaesiti:

$$y - g = \frac{3q'ss' - q''ss}{p'q'' - q'p''};$$
$$z - h = \frac{3p'ss' - p''ss}{p''q' - q''p'};$$

quibus in I substitutis nanciscimur quoque intervallum tertium:

$$x - f = \frac{p(q''ss - 3q'ss') - q(p''ss - 3p'ss')}{p'q'' - q'p'},$$

atque his ternis valoribus inventis etiam radius sphaerae osculantis innotescit.

§. 6. Hae autem expressiones formam adhuc commodiorem induunt, si ponatur

$$p'q'' - q'p'' = w;$$
$$pq' - qp' = u;$$
$$pq'' - qp'' = v;$$

tum enim habebimus:

$$x - f = \frac{s}{w}(vs - 3us');$$
$$y - g = \frac{s}{w}(3q's' - q''s);$$
$$z - h = \frac{s}{w}(3p's' - p''s);$$

quibus valoribus substitutis in expressione supra §. 3. pro quadrato radii sphaerae osculantis inventa, prodibit:

$$\bar{r}\bar{r} = \frac{ss}{ww}\left\{\begin{array}{l} + \bar{s}\bar{s}\,(p''p'' + q''q'' + u'u') \\ - 6\,ss'\,(p'p'' + q'q'' + u\,u') \\ + 9\,s's'\,(p'p' + q'q' + u\,u) \end{array}\right\}$$

ubi notandum est, posito $\partial u = u\,\partial x$, ob $u = pq' - qp'$, fore

$$u'\,\partial x = (p\,q'' - q\,p'')\,\partial x = v\,\partial x$$

ideoque $v = u'$; quem valorem in illa expressione pro $r\,r$ loco v substituimus.

§. 7. En ergo quadratum radii sphaerae osculantis curvae cujuscunque duplicis curvaturae expressum dedimus per formulam haud parum quidem complicatam, quod mirum non est, quoniam in eam non solum differentialia primi et secundi, sed adeo tertii gradus sunt ingressa. Quovis autem casu, si cui applicatio hujus expressionis generalis nimis operosa videatur, calculus pluribus casibus non mediocriter sublevabitur, si intervalla $x-f$, $y-g$, $z-h$, seorsim computentur, quorum porro quadrata in unam summam collecta exhibebunt quadratum radii sphaerae osculantis. Quin etiam centrum hujus sphaerae inotescet. Interim tamen in sequentibus applicationibus radium quaesitum immediate ex formula nostra generali derivare licebit.

Applicatio
ad helicem Archimedeam

§. 8. Quo usus hujus formulae clarius perspiciatur, applicemus eam ad aliquot curvas duplicis curvaturae, inter quas helix Ar-
Tab. I. chimedea, utpote notissima; primum tenet locum. Sit igitur A B
Fig. 6. portio axis cylindri, cujus radius AC $= a$. Sit D E Z portio helicis in superficie cylindri descriptae, pro cujus puncto Z vocentur coordinatae AX $= x$, XY $= y$, et YZ $= z$, ita ut sit $yy + zz = aa$. Vocetur porro angulus Z X Y $= \Phi$, ita ut sit $y = a$ cos. Φ et $z = a$ sin. Φ; et cum proprietas notissima hujus curvae in eo con-

sistat, quod angulus Φ proportionalis sit abscissae, ponamus $x = \frac{\Phi}{n}$;
His positis manifestum est fore:

$$p = \frac{\partial y}{\partial x} = - n a \sin. \Phi;$$
$$q = \frac{\partial z}{\partial x} = + n a \cos. \Phi;$$
$$p' = \frac{\partial p}{\partial x} = - n n a \cos. \Phi;$$
$$q' = \frac{\partial q}{\partial x} = - n n a \sin. \Phi;$$
$$p'' = \frac{\partial p'}{\partial x} = + n^3 a \sin. \Phi;$$
$$q'' = \frac{\partial q'}{\partial x} = - n^3 a \cos. \Phi.$$

Hinc porro deducuntur sequentes valores §§. 5. et 6. introducti:

$$\text{Ex §. 5.} \left\{ \begin{array}{l} s s = 1 + n n a a \\ s s' = 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{Ex §. 6.} \left\{ \begin{array}{l} u = n^3 a a \\ v = 0 \\ w = n^5 a a \end{array} \right\}$$

His autem valoribus in formula nostra generali pro quadrato radii sphaerae osculantis inventa substitutis, erit:

$$r r = \frac{(1 + n n a a)^2}{n^4 a a}$$

unde ipse radius rationaliter ita prodit expressus:

$$r = \frac{1 + n n a a}{n n a}.$$

§. 9. Singularis hic circumstantia notanda venit, scilicet, eandem hanc expressionem oriri, si quaeratur radius *circuli* osculatoris pro helice Archimedea. Si enim in genere hic radius pro curvis non in eodem plano sitis vocetur R, notum est eum hac formula exprimi:

$$R = \frac{\partial s^2}{\sqrt{\partial \partial x^2 + \partial \partial y^2 + \partial \partial z^2}}$$

denotante s arcum curvae et x, y, z ternas coordinatas. Cum igitur pro helice nostra sit:

$$\begin{array}{l|l|l} x = \frac{\Phi}{n} & \partial x = \frac{\partial \Phi}{n} & \partial\partial x = 0 \\ y = a \cos. \Phi & \partial y = - a \partial \Phi \sin. \Phi & \partial\partial y = - a \partial \Phi^2 \cos. \Phi \\ z = a \sin. \Phi & \partial z = + a \partial \Phi \cos. \Phi & \partial\partial z = - a \partial \Phi^2 \sin. \Phi \end{array}$$

ob $\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 = \frac{1 + nnaa}{nn} \partial \Phi^2$ erit radius circuli osculatoris:

$$R = \frac{1 + nnaa}{nna} = r.$$

Hic scilicet *circulus osculator* est circulus *sphaerae osculantis* maximus. Nisi autem hoc eveniat in genere notandum est quoniam circulus osculator semper existit in sphaera osculante, nisi is sit circulus maximus, ejus radium semper minorem esse radio sphaerae osculantis.

Applicatio

ad alias curvas in superficie cylindri descriptas.

§. 10. Cum pro quacunque curva in superficie cylindri descripta, servatis denominationibus supra adhibitis, sit $yy + zz = aa$, statuatur ut supra $y = a \cos. \Phi$ et $z = a \sin. \Phi$, existente angulo Φ functione quacunque abscissae, quam ponamus $\Phi = \int X \partial x$, ita ut sit $\partial \Phi = X \partial x$, $\partial X = X' \partial x$, $\partial X' = X'' \partial x$. His positis habebimus:

$$\begin{aligned} p &= - a X \sin. \Phi; \\ q &= + a X \cos. \Phi; \\ p' &= - a X' \sin. \Phi - a X X \cos. \Phi; \\ q' &= + a X' \cos. \Phi - a X X \sin. \Phi; \\ p'' &= - 3 a X X' \cos. \Phi - a X'' \sin. \Phi + a X^3 \sin. \Phi; \\ q'' &= - 3 a X X' \sin. \Phi + a X'' \cos. \Phi - a X^3 \cos. \Phi; \end{aligned}$$

Tum vero quantitates ss, ss', u, v, w, ultra expectationem, per sequentes formulas valde concinnas exprimuntur:

$$ss = 1 + aaXX;$$
$$ss' = aaXX';$$
$$u = aaX^3;$$
$$v = 3aaX\ X';$$
$$w = aaX\ (X^4 + 3X'X' - XX'');$$

quibus rite substitutis per calculum non adeo molestum ad sequentem perducimur expressionem generalem pro quadrato radii sphaerae osculantis:

$$rr = \frac{1 + aaXX}{aaX^2(X^4 + 3X'^2 - XX'')^2}\left\{\begin{array}{l}(1 + aaXX)(9X^2X'^2 + X''^2 - 2X''X^3 + X^6 \\ \qquad + 9aaX^4X'^2) \\ - 6aaXX'^2(X'' + 2X^3 + 3aaX^5) \\ + \frac{9a^4X^2X'^2}{1 + aaXX}(X'^2 + X^4 + aaX^6)\end{array}\right\}.$$

Hinc pro cochlea Archimedis, ubi $X = n$, $X' = 0$, $X'' = 0$, prodibit ut supra:

$$r = \frac{1 + nnna}{nna}.$$

§. 11. Statuamus nunc angulum Φ quadrato abscissae proportionalem, ponendo $\Phi = \frac{nxx}{n}$, erit $X = nx$, $X' = n$ et $X'' = 0$. Hinc quadratum radii sphaerae osculantis erit:

$$r^2 = \frac{1 + a^2n^2x^2}{a^2(3 + n^2x^4)^2}\left\{\begin{array}{l}(1 + an^2x^2)(9 + n^2x^4 + 9a^2n^2x^2) \\ - 6anx^2(2 + 3a^2nx^2) \\ + \frac{9a^4n^2}{1 + a^2n^2x^2}(1 + n^2x^4 + a^2n^4x^6)\end{array}\right\}.$$

Applicatio

ad curvas in superficie coni recti descriptas.

§. 12. Sit CAD conus rectus, in cujus superficie descripta sit curva MNZ, cujus punctum Z determinetur coordinatis $AX = x$, Tab. II. Fig. 1.

$XY = y$, $YZ = z$. Sit radius baseos $BC = n\,AB$, erit radius sectionis per punctum X vel Z factae $XZ = \sqrt{yy + zz} = nx$. Statui igitur poterit $y = nx \cos. \Phi$ et $z = nx \sin. \Phi$, existente angulo Φ functione quacunque abscissae, quam, ponamus $\Phi = \int X \partial x$, ita ut sit $\partial \Phi = X \partial x$, $\partial X = X' \partial x$ et $\partial X' = X'' \partial x$.

§. 13. His positis per differentiationem ter repetitam habebimus:

$$p = n \cos. \Phi - n X x \sin. \Phi;$$
$$q = n \sin. \Phi + n X x \cos. \Phi;$$
$$p' = -2nX \sin. \Phi - nxX' \sin. \Phi - nxX^2 \cos. \Phi;$$
$$q' = +2nX \cos. \Phi + nxX' \cos. \Phi - nxX^2 \sin. \Phi;$$
$$p'' = -3nX' \sin. \Phi - 3nX^2 \cos. \Phi - nxX'' \sin. \Phi$$
$$\qquad - 3nxXX' \cos. \Phi + nxX^3 \sin. \Phi;$$
$$q'' = +3nX' \cos. \Phi - 3nX^2 \sin. \Phi + nxX'' \cos. \Phi$$
$$\qquad - 3nxXX' \sin. \Phi - nxX^3 \cos. \Phi;$$

Hinc autem porro deducuntur sequentes valores:

$$ss = 1 + nn + nn\,xx\,XX$$
$$ss' = nn\,xX\,(X + xX')$$
$$u = nn\,(2X + xX' + x^2X^3)$$
$$v = nn\,(3X' + xX'' + 2xX^3 + 3x^2X^2X')$$
$$w = nnX\,(6X^2 + 6xXX' + 3x^2X'^2 - x^2XX'' + x^2X^4).$$

Quod si autem hos valores in expressione pro r^2 inventa substituere vellemus, calculus non parum foret molestus, quamobrem consultius videtur, eos pro quovis casu particulari proposito seorsim investigare et tum demum substitutionem instituere.

§. 14. Ita si verbi gratia propositus fuerit casus quo angulus Φ abscissae x est proportionalis, statuendo $\Phi = kx$, ita ut

$X = k$, $X' = 0$, $X'' = 0$, tum valores nostri sequentes formas concinniores induunt:

$$
\begin{aligned}
p &= n \cos.\Phi - n k x \sin.\Phi; \\
q &= n \sin.\Phi + n k x \cos.\Phi; \\
p' &= -2 n k \sin.\Phi - n k k x \cos.\Phi; \\
q' &= +2 n k \cos.\Phi - n k k x \sin.\Phi; \\
p'' &= -3 n k k \cos.\Phi + n k^3 x \sin.\Phi; \\
q' &= -3 n k k \sin.\Phi - n k^3 x \cos.\Phi.
\end{aligned}
$$

Ex his autem valoribus porro nascentur sequentes:

$$
\begin{aligned}
ss &= 1 + n n (1 + k k x x) \\
ss' &= n n k k x \\
u &= n n k (2 + k k x x) \\
v &= 2 n n k^3 x \\
w &= n n k^3 (6 + k k x x).
\end{aligned}
$$

Quaeramus autem quoque sequentes valores:

$$
\begin{aligned}
p''p'' + q''q'' + u'u' &= n n k^4 (9 + k^2 x^2 + 4 n^2 k^2 x^2) \\
p' p'' + q' q'' + u u' &= n n k^4 x (1 + 2 n^2 (2 + k x^2)) \\
p' p' + q' q' + u u &= n n k^2 (4 + k x + n^2 (2 + k^2 x^2)^2)
\end{aligned}
$$

quibus inventis quadratum radii sphaerae osculantis erit:

$$
rr = \frac{1 + n^2 (1 + k^2 x^2)}{n^2 k^2 (6 + k^2 x^2)^2} \left\{ \begin{array}{l} (1 + n^2 (1 + k^2 x^2)) (9 + k^2 x^2 + 4 n^2 k^2 x^2) \\ - 6 n^2 k x^2 (1 + 2 n^2 (2 + k x^2)) \\ + \frac{9 n^4 k^2 x^2}{1 + n^2 (1 + k^2 x^2)} (4 + k^2 x^2 + n (2 + k^2 x^2)^2) \end{array} \right\}
$$

quae expressio, restituendo loco $k x$ angulum Φ, aliquanto concinnius sequenti modo repraesentari potest:

$$
rr = \frac{1 + n^2 (1 + \Phi^2)^2}{n^2 k^2 (6 + \Phi^2)^2} \left\{ \begin{array}{l} (1 + n^2 (1 + \Phi^2)) (9 + \Phi^2 + 4 n^2 \Phi^2) \\ - 6 n^2 \Phi^2 (1 + 2 n (2 + \Phi^2)) \\ \frac{+ 9 n^4 \Phi^2}{1 + n^2 (1 + \Phi^2)} (4 + \Phi^2 + n^2 (2 + \Phi^2)^2 \end{array} \right\}.
$$

§. 15. Quodsi jam quaeratur radius sphaerae osculantis pro eo curvae puncto ubi abscissa x, vel angulus Φ evanescunt, reperietur:

$$r = \frac{1 + nn}{2nk}.$$

§. 16. Sin autem quaeratur iste radius pro curva in superficie coni recti, cujus diameter baseos duplo altitudinis aequetur, ob $n = 1$ erit

$$r = \frac{\sqrt{36 + 68\Phi^2 + 20\Phi^4 + 2\Phi^6}}{k(6 + \Phi^2)},$$

et pro eo curvae puncto, ubi angulus Φ evanescit, erit $r = \frac{1}{k}$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE TAYLOR.

PAR

F. T. SCHUBERT.

Présenté à la Conférence le 18 Août 1813.

Il y a peu de propositions, qui soient d'une si grande utilité et dont on fasse un usage si fréquent dans toutes les branches des mathématiques, que le célèbre théorème de *Taylor*. C'est donc rendre un service à cette science, que de donner une parfaite évidence à ce théorème, en le prouvant rigoureusement, sans avoir recours à la notion de l'infini, comme celà se fait ordinairement. Voilà ce qui m'a porté à ne pas croire tout à fait inutile la nouvelle démonstration que j'ose présentèr à l'Académie dans ce mémoire.

§. 1. Soit y la valeur que prend une fonction quelconque de x, algébraïque ou transcendante, lorsqu'on donne à celle-ci une valeur déterminée x, et Δy le changement que cette fonction éprouvé, lorsqu'on met $x + \Delta x$ à la place de x; on aura par le théorème de *Taylor*:

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x} x + \frac{\partial \partial y}{2 \partial x^2} \Delta x^2 + \frac{\partial^3 y}{2 \cdot 3 \cdot \partial x^3} \Delta x^3 + \ldots\ldots + \frac{\partial^r y}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \; r \cdot \partial x^r} \Delta x^r + \text{cet.}$$

∂x étant supposée constante dans les différentiations successives.

Pour prouver la vérité de ce théoreme, nous ne supposerons autre chose, si non que l'accroissement Δy d'une fonction quelconque de x peut toujours être développé dans une série qui ne renferme que des puissances entières et positives de l'accroissement Δx. En effèt, puisque Δy doit necessairement s'evanouir, croître, et dé-

croître, en même tems que Δx, la forme générale de chacun de ses termes ne peut être que $P\Delta x$, P étant une fonction de x et Δx; et il est clair d'abord, que $P\Delta x$ ne peut renfermer de puissances de Δx d'un exposant négatif, parcequ'alors Δy aurait une valeur infiniment grande dans le cas où Δx est nul, ce qui est une absurdité. Il est d'ailleues aisé de voir que, si y est une fonction *uniforme* de x, son accroissement Δy ne peut avoir non plus qu'une seule valeur, pour chaque valeur de Δx. Mais, dans le cas même, où y aurait plusieurs valeurs pour chaque valeur de x, nous ne considérons ici qu'une valeur déterminée de y, c'est à dire, une seule branche de la courbe; et dans cette supposition, le changement de l'ordonnée y ne peut avoir qu'une seule valeur, tant qu'on ne passe pas d'une branche à l'autre. Or, tout radical ayant autant de valeurs qu'il y a d'unités dans son exposant, il est clair que, dans la série de Δy il ne peut se trouver aucune puissance fractionnaire de Δx. Nommant donc fx une fonction quelconque de x, on a généralement : $\Delta . fx = P\Delta x + Q\Delta x^2 + R\Delta x^3 +$ cet. P, Q, R, etc. étant des fonctions de x. (*)

§. 2. Substituant dans cette équation, d'abord y, ensuite P, Q, R, etc. ou P_1, P_2, P_3, etc. au lieu de fx, on aura les séries suivantes :

$$\text{(A)}\quad \Delta y = P_1\Delta x + P_2\Delta x^2 + P_3\Delta x^3 + \ldots\ldots + P_r\Delta x^r + P_{r+1}\Delta x^{r+1} + \text{cet.}$$
$$\Delta P_1 = {}^1p_1\Delta x + {}^1p_2\Delta x^2 + {}^1p_3\Delta x^3 + \ldots\ldots + {}^1p_r\Delta x^r + \text{cet.}$$
$$\Delta P_2 = {}^2p_1\Delta x + {}^2p_2\Delta x^2 + {}^2p_3\Delta x^3 + \ldots\ldots + {}^2p_r\Delta x^r + \text{cet.}$$
$$\Delta P_3 = {}^3p_1\Delta x + {}^3p_2\Delta x^2 + {}^3p_3\Delta x^3 + \ldots\ldots + {}^3p_r\Delta x^r + \text{cet.}$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$\Delta P_r = {}^rp_1\Delta x + {}^rp_2\Delta x^2 + {}^rp_3\Delta x^3 + \ldots\ldots + {}^rp_r\Delta x^r + \text{cet.}$$

où l'on voit que le nombre qui se trouve à droite du pied de chaque lettre P ou p, se rapporte à la puissance de Δx dont

(*) Voy. *Théorie des fonct. anal. par Lagrange*, pag. 7. suiv.

elle est le coëfficient, au lieu que le nombre qui se trouve en haut et à gauche de chaque lettre p, désigne le coëfficient P de la série Δy, à la différence duquel la fonction p appartient comme coëfficient, de sorte que ${}^r p_n$ est la fonction de x, qui est le coëfficient de Δx^n dans la différence de P_r ou du coëfficient de Δx_r dans la série Δy. Cette manière de marquer les coëfficiens, nous sera très-utile dans la démonstration que nous allons donner. Au reste, on voit que $\Delta y = P_1 \Delta x +$ cet. a la même forme que la série de *Taylor*, de sorte qu'il ne reste à prouver, si non que les coëfficiens sont aussi les mêmes, savoir $P_1 = \frac{\partial y}{\partial x}$, et en général,

$$P_r = \frac{\partial^r y}{2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots r \cdot \partial x^r}.$$

§. 3. Soit y' la valeur de y, y'' celle de y', lorsqu'on substitue dans l'une et l'autre $x + \Delta x$ à la place de x, de sorte que

$$y' = y + \Delta y, \text{ et } y'' = y' + \Delta y' = y + 2\Delta y + \Delta^2 y,$$
$$\text{ou } y'' - y = 2\Delta y + \Delta\Delta y.$$

Or, y'' est la valeur que y a prise, après qu'on a substitué deux fois $x + \Delta x$ au lieu de x, ou après qu'on a ajouté deux fois Δx à x: donc, y se transforme en y'', quand on met $x + 2\Delta x$ à la place de x. Nommant donc $\Delta_2 y$ la valeur de Δy, lorsque dans celle-ci $2\Delta x$ est substitué au lieu de Δx, on a $y'' - y = \Delta_2 y$, ce qui étant comparé à l'équation

$$y' - y = 2\Delta y + \Delta\Delta y, \text{ donne}$$
$$\text{(B)} \quad 0 = \Delta_2 y - 2\Delta y - \Delta\Delta y.$$

Or, on a $\Delta\Delta y = \Delta(\Delta y)$, Δx étant supposée constante, ce qui donne, en prenant les différences de (A) (§. 2.).

$$\Delta\Delta y = \Delta P_1 \Delta x + \Delta P_2 \Delta x^2 + \Delta P_3 \Delta x^3 + \ldots\ldots + \Delta P_r \Delta x^r + \text{cet.} =$$
$${}^1p_1 \Delta x^2 + {}^1p_2 \Delta x^3 + \ldots + {}^1p_r \Delta x^{r+1} + \text{cet.} + {}^2p_1 \Delta x^3 + {}^2p_2 \Delta x^4$$
$$+ \ldots + {}^2p_r \Delta x^{r+2} + \text{cet.}$$
$$+ \ldots\ldots + {}^{r-1}p_1 \Delta x^r + {}^{r-1}p_2 \Delta x^{r+1} + \text{cet.} + {}^r p_1 \Delta x^{r+1} + {}^r p_2 \Delta x^{r+2} + \text{cet.}$$

Puis, substituant $2\Delta x$ au lieu de Δx en (A), on trouve

$$\Delta_2 y = 2P_1\Delta x + 2^2P_2\Delta x^2 + 2^3P_3\Delta x^3 + \ldots + 2^rP_r\Delta x^r + \text{cet.}$$

ce qui étant substitué en (B), nous donne l'équation

$$\begin{array}{llll}(C)\ 0 = (2 - 2)\,P_1\Delta x & & & \\ +(2^2 - 2)P_2\Delta x^2 & +(2^3 - 2)P_3.\Delta x^3 & +(2^4 - 2)P_4.\Delta x^4 & +\text{cet.} \\ \quad - {}^1p_1 & \quad - {}^1p_2 & \quad - {}^1p_3 & -\text{cet.} \\ & \quad - {}^2p_1 & \quad - {}^2p_2 & -\text{cet.} \\ & & \quad - {}^3p_1 & -\text{cet.}\end{array}$$

et les coëfficiens généraux de Δx^r et de Δx^{r+1} seront

$$(2^r - 2)P_r - {}^1p_{r-1} - {}^2p_{r-2} - {}^3p_{r-3} - \ldots - {}^{r-2}p_2 - {}^{r-1}p_1,$$

et $(2^{r+1} - 2)P_{r+1} - {}^1p_r - {}^2p_{r-1} - {}^3p_{r-2} - \ldots - {}^{r-1}p_2 - {}^rp_1$.

§. 4. Comme Δx est une quantité tout à fait arbitraire et indepéndante de x, il faut que le coëfficient de chaque puissance de Δx soit séparément égal à zéro: ce qui nous donne les équations suivantes :

$$(1),\ {}^1p_1 = (2^2 - 2)P_2;\quad (2),\ {}^1p_2 + {}^2p_1 = (2^3 - 2)P_3;$$
$$(3),\ {}^1p_3 + {}^2p_2 + {}^3p_1 = (2^4 - 2)P_4,\ \text{etc.}$$

et en général,

$$(r),\ {}^1p_{r-1} + {}^2p_{r-2} + {}^3p_{r-3} + \ldots + {}^{r-2}p_2 + {}^{r-1}p_1 = (2^r - 2)P_r,$$

et $(r+1)$, ${}^1p_r + {}^2p_{r-1} + {}^3p_{r-2} + \ldots + {}^{r-1}p_2 + {}^rp_1 = (2^{r+1} - 2)P_{r+1}$.

§. 5. Maintenant, pour introduire les rapports différentiels, on n'a pas besoin de recourir à la notion de l'infini, ni d'examiner la solidité des raisonnemens, sur lesquels le calcul différentiel est fondé; il suffit de se rappeler que ces rapports $\frac{\partial y}{\partial x}$, etc. ne sont autre chose que des abbréviations qui désignent les coëfficiens des premiers termes des séries du §. 2, de manière que $\frac{\partial y}{\partial x} = P_1$, $\frac{\partial P_1}{\partial x} = {}^1p_1$, $\frac{\partial P_2}{\partial x} = {}^2p_1$, et en général, $\frac{\partial P_r}{\partial x} = {}^rp_1$. On a donc (§. 4. (1)) $P_2 = \frac{\partial P_1}{2\partial x} = \frac{\partial\partial y}{2\partial x^2}$. Cette équation $P_2 = \frac{\partial P_1}{2\partial x}$, trou-

vée pour la série (A), donne également pour toutes les séries suivantes : ${}^1p_2 = \frac{\partial\,{}^1p_1}{2\partial x} = \frac{\partial\partial P_1}{2\partial x^2} = \frac{\partial P_2}{\partial x} = {}^2p_1$, et généralement ${}^rp_2 = \frac{\partial\,{}^rp_1}{2\partial x} = \frac{\partial\partial P_r}{2\partial x^2}$.

§. 6. L'équation (§. 4. (2)), en y substituant ${}^1p_2 = {}^2p_1$ (§. 5.), deviendra $P_3 = \frac{{}^2p_1}{3}$, d'où, à cause de ${}^2p_1 = \frac{\partial\partial P_1}{2\partial x^2} = \frac{\partial^3 y}{2\partial x^3}$ et ${}^2p_1 = \frac{\partial P_2}{\partial x}$ (§. 5.), on tire $P_3 = \frac{\partial^3 y}{2.3.\partial x^3}$, et $P_3 = \frac{\partial P_2}{3\partial x}$. Ceci donne, pour les séries suivantes, ${}^1p_3 = \frac{\partial.{}^1p_2}{3\partial x}$, et généralement ${}^rp_3 = \frac{\partial.{}^rp_2}{3\partial x}$, d'où, en substituant ${}^rp_2 = \frac{\partial\partial P_r}{2\partial x^2}$ et ${}^1p_2 = \frac{\partial P_2}{\partial x} = \frac{\partial\partial P_1}{2\partial x^2}$ (§. 5.), on a

$$ {}^1p_3 = \frac{\partial\partial P_2}{3\partial x^2} = \frac{\partial^3 P_1}{2.3.\partial x^3} = \frac{\partial P_3}{\partial x}, \text{ et } {}^rp_3 = \frac{\partial^3 P_r}{2.3.\partial x^3}. $$

§. 7. Substituant $r = 3$ dans l'équation ${}^rp_1 = \frac{\partial P_r}{\partial x}$, et $r = 2$ dans ${}^rp_2 = \frac{\partial\partial P_r}{2\partial x^2}$ (§. 5.), on a ${}^3p_1 = \frac{\partial P_3}{\partial x} = \frac{\partial\partial P_2}{3\partial x^2}$ (§. 6.), et ${}^2p_2 = \frac{\partial\partial P_2}{2\partial x^2}$: ce qui donne, en vertu de ${}^1p_3 = \frac{\partial\partial P_2}{3\partial x^2}$ (§. 6.), ${}^1p_3 + {}^2p_2 + {}^3p_1 = \frac{7\partial\partial P_2}{2.3.\partial x^2} = \frac{7}{2}\,{}^3p_1$. Nous avons donc (§. 4. (3)) $P_4 = \frac{7\partial\partial P_2}{2.3.14.\partial x^2} = \frac{\partial\partial P_2}{3.4.\partial x^2}$; où substituant $P_2 = \frac{\partial\partial y}{2\partial x^2}$ (§. 5.), l'on obtient $P_4 = \frac{\partial^4 y}{2.3.4.\partial x^4}$, ce qui donne aussi $P_4 = \frac{\partial P_3}{4\partial x}$ (§. 6.).

§. 8. Cette dernière équation donne également, pour les séries suivantes (§. 2.), ${}^1p_4 = \frac{\partial.{}^1p_3}{4\partial x} = \frac{\partial\partial.P_3}{4\partial x^2}$ (§. 6.) $= \frac{\partial.P_4}{\partial x}$ (§. 7.), et généralement ${}^rp_4 = \frac{\partial.{}^rp_3}{4\partial x}$, où substituant ${}^rp_3 = \frac{\partial^3 P_r}{2.3.\partial x^3}$ (§. 6.), on a ${}^rp_4 = \frac{\partial^4 P_r}{2.3.4\partial x^4}$, et à cause de $\frac{\partial P_r}{\partial x} = {}^rp_1$ (§. 5.), ${}^rp_4 = \frac{\partial^3\,{}^rp_1}{2.3.4\,\partial x^3}$.

Ayant maintenant développé l'équation (C) jusqu'à la quatrième puissance de Δx, rassemblons sous une forme générale, toutes les relations que nous venons de trouver, pour les valeurs de r depuis $r = 1$ jusqu'à $r = 4$.

§. 9. D'abord nous avons prouvé la vérité du théorème de *Taylor* jusqu'à la quatrième puissance de Δx, savoir, $P_1 = \frac{\partial y}{\partial x}$,

$P_2 = \frac{\partial\partial y}{2\partial x^2}$ (§. 5.), $P_3 = \frac{\partial^3 y}{2.3.\partial x^3}$ (§. 6.), $P_4 = \frac{\partial^4 y}{2.3.4.\partial x^4}$ (§. 7.), donc

$$\text{(I)} \quad P_r = \frac{\partial^r y}{2.3.4\ldots r.\partial x^r};$$

et substituant cette valeur de P_r dans l'équation ${}^r p_1 = \frac{\partial P_r}{\partial x}$ (§. 5.).

$$\text{(II)} \quad {}^r p_1 = \frac{\partial^{r+1} y}{2.3.4\ldots r.\partial x^{r+1}}.$$

Puis, nous avons ${}^r p_2 = \frac{\partial.{}^r p_1}{2\,\partial x}$ (§. 5.), ${}^r p_3 = \frac{\partial.{}^r p_2}{3\,\partial x}$ (§. 6.), et ${}^r p_3 = \frac{\partial^3 P_r}{2.3.\partial x^3}$ (§. 6.) $= \frac{\partial\partial.{}^r p_1}{2.3.\partial x^2}$ (§. 5.), ${}^r p_4 = \frac{\partial.{}^r p_3}{4\partial x}$, et ${}^r p_4 = \frac{\partial^3.{}^r p_1}{2.3.4.\partial x^3}$ (§. 8.); donc, généralement, prenant deux nombres m, n, pas plus grands que $r = 4$,

$$\text{(III)} \quad {}^n p_m = \frac{\partial.{}^n p_{m-1}}{m\,\partial x}, \quad \text{et (IV)} \quad {}^n p_m = \frac{\partial^{m-1}\,{}^n p_1}{2.3\ldots m\partial x^{m-1}}.$$

D'ailleurs, nous avons trouvé ${}^1 p_1 = \frac{\partial P_1}{\partial x}$, ${}^1 p_2 = \frac{\partial P_2}{\partial x}$ (§. 5.), ${}^1 p_3 = \frac{\partial P_3}{\partial x}$ (§. 6.), ${}^1 p_4 = \frac{\partial P_4}{\partial x}$ (§. 8.); donc généralement ${}^1 p_r = \frac{\partial P_r}{\partial x}$; ce qui étant comparé à ${}^r p_1 = \frac{\partial P_r}{\partial x}$ (§. 5.), donne ${}^1 p_r = {}^r p_1$. En général, nous avons (§. 5.) ${}^n p_1 = \frac{\partial P_n}{\partial x} = \frac{\partial^{n+1} y}{2.3\ldots n\partial x^{n+1}}$ (I), ce qui étant substitué en (IV) donne ${}^n p_m = \frac{\partial^{m+n} y}{2.3\ldots n \times 2.3\ldots m.\partial x^{m+n}}$. Supposant donc $m + n = r + 1$, ou $m = r - n + 1$, on obtient

$${}^n p_{r-n+1} = \frac{\partial^{r+1} y}{2.3\ldots n \times 2.3\ldots(r-n+1)\partial x^{r+1}};$$

or (II) $\frac{\partial^{r+1} y}{\partial x^{r+1}} = 2.3\ldots(r-n+1)(r-n+2)\ldots\ldots(r-1)r.{}^r p_1$, donne $\frac{\partial^{r+1} y}{2.3\ldots(r-n+1)\partial x^{r+1}} = r(r-1)\ldots\ldots(r-n+2).{}^r p_1$, ce qui étant substitué donne

$$\text{(V)} \quad {}^n p_{r-n+1} = \frac{r(r-1)\ldots\ldots(r-n+2)}{2.3\ldots\ldots n}.{}^r p_1.$$

Les suppositions de $n = 1$ et de $n = r$, donnent également le facteur $\frac{r(r-1)\ldots(r-n+2)}{2.3\ldots n} = 1$, et ${}^1 p_r = {}^r p_1$, comme nous avons trouvé plus haut. La substitution de $m = r - n + 1$ en (III) fait ${}^n p_{r-n+1} = \frac{\partial.{}^n p_{r-n}}{(r-n+1)\partial x}$, ce qui étant comparé à (V) donne

$$\text{(VI)} \quad \frac{\partial.{}^n p_{r-n}}{\partial x} = \frac{r(r-1)\ldots(r-n+2)(r-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)n}.{}^r p_1;$$

d'où, en substituant $n=1$ ou $n=r-1$, on tire également $\frac{\partial.{}^1p_{r-1}}{\partial x}=\frac{\partial.{}^{r-1}p_1}{\partial x}=\frac{r}{1}.{}^rp_1$, vû que le facteur $\frac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{1.2.3\ldots n}$, dans l'un et l'autre cas, devient égal à $\frac{r}{1}$ ou r.

§. 10. Maintenant nous allons prouver, à l'aide de ces équations, supposées valables jusqu'à une certaine valeur de r, que le théorème de *Taylor*, ou notre équation (I) a aussi lieu pour $r+1$. Pour cet effèt, nous tirerons des équations (V), (VI), deux autres. Après avoir substitué successivement au lieu de n, 1, 2, 3 ... r, dans l'équation (V), et 1, 2, 3 ... $r-1$, en (VI), la première donne

$$
{}^1p_r+{}^2p_{r-1}+{}^3p_{r-2}+\ldots\ldots+{}^{r-1}p_2+{}^rp_1=
$$
$$
{}^rp_1\left[1+\frac{r}{2}+\frac{r(r-1)}{2.3}+\ldots\ldots+\frac{r(r-1)\ldots.5.4}{2.3\ldots(r-3)(r-2)}+\frac{r(r-1)\ldots.4.3}{2.3\ldots(r-2)(r-1)}+\frac{r(r-1)\ldots3.2}{2.3\ldots.(r-1)r}\right];
$$

et la seconde $\frac{\partial.{}^1p_{r-1}+\partial.{}^2p_{r-2}+\partial.{}^3p_{r-3}+\ldots+\partial.{}^{r-2}p_2+\partial.{}^{r-1}p_1}{\partial x}=$

$$
{}^rp_1\left[\frac{r}{1}+\frac{r(r-1)}{1.2}+\frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}+\ldots\ldots+\frac{r(r-1)\ldots.5.4}{1.2\ldots(r-4)(r-3)}+\frac{r(r-1)\ldots.4.3}{1.2\ldots.(r-3)(r-2)}+\frac{r(r-1)\ldots3.2}{1.2\ldots(r-2)(r-1)}\right],
$$

ou bien

$$
\text{(D)}\quad {}^1p_r+{}^2p_{r-1}+\ldots+{}^rp_1={}^rp_1\left[1+\frac{r}{2}+\frac{r(r-1)}{2.3}+\ldots+\frac{r(r-1)}{2.3}+\frac{r}{2}+1\right]={}^rp_1.\mathrm{S};
$$

$$
\text{(E)}\quad \frac{\partial.{}^1p_{r-1}+\partial.{}^2p_{r-2}+\ldots.+\partial.{}^{r-1}p_1}{\partial x}=
$$
$$
{}^rp_1\left[\frac{r}{1}+\frac{r(r-1)}{1.2}+\frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}+\ldots+\frac{r(r-1)}{1.2}+\frac{r}{1}\right]={}^rp_1.\mathrm{T}.
$$

§. 11. Quand on regarde les séries S et T avec un peu d'attention, on s'apperçoit aisément de la conformité de leurs termes avec les coëfficiens d'un binome élevé aux puissances r et $r+1$. En effèt, on a

$$
(1+a)^r=1+\frac{r}{1}a+\frac{r(r-1)}{1.2}a^2+\ldots\ldots+\frac{r(r-1)}{1.2}a^{r-2}+\frac{r}{1}a^{r-1}+a^r,
$$

par conséquent

$$(1+1)^r = 1 + \frac{r}{1} + \frac{r(r-1)}{1.2} + \ldots\ldots + \frac{r(r-1)}{1.2} + \frac{r}{1} + 1, \text{ et}$$

$$(1+1)^{r+1} = 1 + \frac{r+1}{1} + \frac{(r+1)r}{1.2} + \ldots\ldots + \frac{(r+1)r}{1.2} + \frac{r+1}{1} + 1,$$

d'où l'on tire

$$(1+1)^{r+1} - 2 = (r+1)\left(1 + \frac{r}{2} + \frac{r(r-1)}{2.3} + \ldots + \frac{r}{2} + 1\right) = (r+1)\,S, \text{ et}$$

$$(1+1)^r - 2 = \frac{r}{1} + \frac{r(r-1)}{1.2} + \ldots + \frac{r(r-1)}{1.2} + \frac{r}{1} = T, \text{ ou}$$

$$(r+1)\,S = 2^{r+1} - 2, \text{ et } T = 2^r - 2.$$

§. 12. Reprenons maintenant les coëfficiens généraux de l'équation (C) (§. 3.), dont le $(r+1)$me, y ayant substitué (D)(§. 10.), nous donne (§. 4. $(r+1)$), $P_{r+1} = \frac{{}^r p_1 S}{2^{r+1}-2}$, et la différentiation du $(r)^{me}$, après y avoir substitué (E) (§. 10.), ${}^r p_1 T = \frac{(2^r-2)\partial P_r}{\partial x}$, ou $\frac{\partial P_r}{\partial x} = \frac{{}^r p_1 T}{2^r-2}$. Or, nous venons de trouver (§. 11.) que $\frac{S}{2^{r+1}-2} = \frac{1}{r+1}$, et $\frac{T}{2^r-2} = 1$; donc $P_{r+1} = \frac{{}^r p_1}{r+1}$ et $\frac{\partial P_r}{\partial x} = {}^r p_1$; par conséquent $P_{r+1} = \frac{\partial P_r}{(r+1)\partial x}$.

§. 13. La différentielle de l'équation (I) (§. 9.) étant $\frac{\partial P_r}{\partial x} = \frac{\partial^{r+1} y}{2.3.4\ldots r.\partial x^{r+1}}$, on a enfin

$$P_{r+1} = \frac{\partial^{r+1}.y}{2.3.4\ldots r.(r+1)\partial x^{r+1}},$$

ce qu'il fallait démontrer. Nous avons donc prouvé que, si le théorème de *Taylor* est vrai jusqu'au (r)me terme, il s'en suit qu'il a aussi lieu dans le terme suivant $(r+1)$. Or, comme nous avons prouvé ce théorème pour les cas particuliers $r=1, r=2, r=3, r=4$, il a aussi lieu pour le cas $r=5$; d'où l'on tire la même conséquence pour le cas $r=6$, et par la même raison pour tous les nombres suivans, $r=7$, $r=8$, etc. à l'infini, parceque ce raisonnement a toujours lieu de r à $r+1$. Le théorème de *Taylor* est donc vrai dans toute son étendue jusqu'au dernier terme; c'est à dire que, lui donnant la forme

$$\Delta y = P_1 \Delta x + P_2 \Delta x^2 + P_3 \Delta x^3 + \ldots\ldots + P_r \Delta x^r,$$

on a $P_1 = \frac{\partial y}{\partial x}$, $P_2 = \frac{\partial \partial y}{2 \partial x^2}$, et en général $P_r = \frac{\partial^r y}{2 . 3 . 4 \ldots r . \partial x^r}$, quelle quė soit la valeur du nombre entier r.

Il ne faut pas oublier que les expressions, $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^r y}{\partial x^r}$, qui ne sont employées que pour désigner d'une manière abrégée les premiers termes des séries données ci-dessus, signifient de simples opérations d'arithmétique, et que la notion de l'infiniment petit, ou la théorie du calcul différentiel, n'entre nullement dans les raisonnemens dont nous nous sommes servis, pour démontrer le théorème de *Taylor*.

DISQUISITIONES AD THEORIAM EPICYCLORUM PERTINENTES.

AUCTORE

LITTROW.

Conventui exhibuit die 8 Junii 1814.

Cum non ita pridem, longe aliud quoddam quaeritans, commentarios Acad. Paris. lustrarem, forte fortuna in notam istam de epicyclis dissertationem Godinianam (ad an. 1733 p. 285) delapsus sum, quae, quamvis longe abfuit, quin satisfecisset animum, attamen ad majora quaedam de his rebus quaerenda incitabat. Missis proinde praedis prioribus, quibus potiundis haud magna omnino spes fuerat, hanc aliam semitam ingressus sum, majori utique spe, haud meliori eventu. Quis enim non persuasum habebit, integram epicyclorum theoriam, quae ab antiquis recepta per tantum saeculorum cursum primas astronomiae vices tenebat, hodiernis etiam diebus analysi nostrae perfectiori jam dudum subjectam et ita tractatam excultamque esse, ut jam, quod addere posset, nemo haberet? Nihilominus, nostra saltem librorum penuria, quod investigationes veterum Graecorum satis superque notas excedat, non habet, excepto opere perfectissimo ill. D^ni^ *Schubert* (*Theoretische Astronomie*) in quo ea hujus theoriae pars, quae ad rem ibi tractatam facit, ea et praestantia et claritate absoluta est, ut jam nihil desiderandum superesse videatur. Exoptandum profecto, ut et ceterae hujus doctrinae partes, hodiedum in medio relictae, eodem modo absolverentur, negotium haud omnino negligendum, si vel dignitatem gravitatemque rei ipsius vel etiam historiam astronomiae antiquae spectare velis. Mihi

autem, quae his de rebus horis aliquot subsecivis investigavi, liceat proponere iisdemque ad alia meliora viam sternere.

1. Ac primo quidem, ut a facillimis ordiamur sit α radius epicycli, cujus centrum in peripheria circuli incedit, cujus radius unitati aequalis, siquidem hic nonnisi de proportionibus radiorum sermo est. Sit dato temporis momento b angulus radii i cum recta positione data per centrum circuli transeunte et b' angulus radiorum i et α. Posita deinde r distantia puncti extremi radii α a centro circuli et Φ angulo inter distantiam r et rectam positione datam contento, erit $Aa = i$, $aa' = \alpha$, $BAa = b$, $Aaa' = b'$, $Aa' = r$, $BAa' = \Phi$ Tab. II. Fig. 4.
unde nullo negotio habebimus

$$\text{cotg.}\ \Phi = \frac{\cos.\ b - \alpha \cos\ (b + b')}{\sin\ b - \alpha \sin\ (b + b')} \quad \text{et}$$

$$r = \sqrt{1 + \alpha^2 - 2\,\alpha\ \cos.\ b'}.$$

Quodsi angulum rectarum i et r in centro circuli factum designemus per Δ, erit $a'Aa = \Delta = b - \Phi$, unde, sumta tangente quantitatis $b - \Phi$, substitutoque ipsius tang. Φ valore invento erit

$$\text{tang.}\ \Delta = \frac{\alpha\ \sin.\ b'}{1 - \alpha\ \cos.\ b'}$$

quae aequationes totam unius epicycli theoriam continent.

Valores quantitatum r et Δ per series simplicissimas exhiberi possunt, quem in finem ponamus log. nat. $e = i$ unde aequatio ultima sequentem induit formam

$$e^{2\Delta\sqrt{-1}} = \frac{1 - \alpha\ \ e^{-b'\sqrt{-1}}}{1 - \alpha\ .\ e^{b'\sqrt{-1}}}$$

et hinc sumtis logarithmis

$$\Delta = \alpha\ \sin.\ b' + \tfrac{1}{2}\alpha^2 \sin.\ 2b' + \tfrac{1}{3}\alpha^3 \sin.\ 3b' + \tfrac{1}{4}\alpha^4 \sin.\ 4b' + \ldots\ \text{(I)}.$$

Eadem ratione aequatio penultima est

$$r^2 = (1 - \alpha\ .\ e^{b\sqrt{-1}})\ .\ (1 - \alpha\ .\ e^{-b\sqrt{-1}})$$

unde sumtis logarithmis

$$\log.\ r = -\alpha \cos.\ b - \tfrac{1}{2}\alpha^2\ \cos.\ 2\,b - \tfrac{1}{3}\alpha^3\ \cos.\ 3b\ \ldots\ \text{(II)}.$$

2. Videamus jam, quo modo planetarum a motu uniformi deviationes, veteribus nomine inaequalitatis primae et secundae insignitas, quarum una, ut constat, motui planetae elliptico, altera loco telluris excentrico respondet, ope unius epicycli repraesentare possimus.

Posita ε ratione excentricitatis ad dimidium axem majorem ellipseos, r' distantia planetae a solis centro, m et ω anomalia media et vera, quarum computum more veterum ab aphelio incipimus, erit pro motu planetae elliptico ad tertiam duntaxat excentricitatis potestatem progredientes, aequatio centri

$$\Delta' = m - \omega = (2\,\varepsilon - \tfrac{\varepsilon^3}{4}) \sin. m - \tfrac{5}{4}\,\varepsilon^2 \sin. 2\,m + \tfrac{13}{12}\,\varepsilon^3 \sin. 3\,m$$

et radius vector

$$r' = 1 + \varepsilon \cos. m - \tfrac{\varepsilon^2}{2} (\cos. 2\,m - 1) + \tfrac{3\varepsilon^3}{8} (\cos. 3\,m - \cos. m).$$

Posito autem in his, quae praecedunt, $b = m$ et $b' = 180 - m$, erit pro motu epicyclico

$$\Delta = \alpha \sin. m - \tfrac{1}{2}\,\alpha^2 \sin. 2m + \tfrac{1}{3}\,\alpha^3 \sin. 3m - \tfrac{1}{4}\,\alpha^4 \sin. 4m +$$

et ex aequatione (II), cum sit

$$r = 1 + (\log. r) + \tfrac{1}{2} (\log. r)^2 + \tfrac{1}{2\,.\,3} (\log. r)^3 +$$

$$r = 1 + \alpha \cos. m - \tfrac{\alpha^2}{4} (\cos. 2\,m - 1) + \tfrac{\alpha^3}{8} (\cos. 3m - \cos. m).$$

Hinc sponte sequitur, *primo*, ope epicycli unius non nisi primum terminum ipsius Δ vel $(r - 1)$ repraesentari posse et *secundo* easdem determinationes inter se contradictorias esse, ita quidem ut, si epicyclus longitudinem ω exhibeat, quo casu $\alpha = 2\varepsilon$, tunc distantiam r simul exhibere non possit, utpote quo casu $\alpha = \varepsilon$ et vice versa.

Contradictio haec maximi est momenti eaquae sóla veteribus suffecisset ad detruendam epicyclorum hypothesin. Quod ut clarius reddamus, sint R et R′ diametri apparentes planetae in duobus orbitae punctis, quibus respondeant radii vectores r et r' ideoque $R\,.\,r = R'\,.\,r'$. Sumtis autem differentialibus erit pro motu elliptico

$$\frac{\partial \omega}{\partial m} = 1 - 2\,\varepsilon \cos. m = \frac{1}{r^2} = h\,.\,R^2$$

ubi h quantitas constans. Ratio proinde motus horarii in duobus orbitae punctis erit $\frac{\partial \omega}{\partial \omega'} = (\frac{R}{R'})^2$.

Pro epicyclo autem habebimus, posito $\alpha = 2\varepsilon$

$$\frac{\partial \omega}{\partial m} = 1 - 2\varepsilon \cos. m = \frac{1}{r} = h' \cdot R \text{ unde } \frac{\partial \omega}{\partial \omega'} = \frac{R}{R'}.$$

Variatio autem diametri apparentis lunae in perigaeo et apogaeo tanta est, ut ne instrumentis veterum quidem effugere potuerit, nimirum $R = 33'.518$ et $R' = 29'.366$. Motus autem horarius lunae in iisdem punctis $\partial \omega = 38'.366$, $\partial \omega' = 29.447$ unde

$$\frac{\partial \omega}{\partial \omega'} = 1.3028 \text{ et } \frac{R}{R'} = 1.1414$$

quarum quantitatum differentiam 0.16 omnino animadvertere potuissent. Valor autem $(\frac{R}{R'})^2 = 1.3027$ cum valore quantitatis $\frac{\partial \omega}{\partial \omega'}$ prorsus consentit.

Revera quidem Ptolemaeus ad repraesentandas inaequalitates lunares duobus epicyclis usus est: infra autem videbimus, eandem difficultatem etiam pluribus epicyclis in auxilium vocatis nequaquam tolli posse.

3. Aliter autem res se habet pro secunda inaequalitate, ubi unicus epicyclus sufficit ad eam penitus exprimendam. Quodsi insuper excentricitatis inclinationisque planetae et telluris rationem habere animus est, radium motumque ejus certa lege variabilem ponere necesse est, ut statim videbimus.

Sit l et L longitudo heliocentrica planetae et terrae, λ longitudo planetae geocentrica r et R radii vectores planetae tellurisque in planum eclipticae projecti, quibus factis erit

$$\text{tg.}\,\lambda = \frac{R \sin. L - r \sin. l}{R \cos. L - r \cos. l} = \frac{r \sin. l - R \sin. L}{r \cos. l - R \cos. L}.$$

Comparata autem hac aequatione cum prima §. 1. erit

$$a = \frac{r}{R}, \quad b = L, \quad b' = l - L, \quad \Phi = \lambda \ldots (I).$$

Radius proinde circuli erit R, radiusque epicycli r, et motus planetae in peripheria epicycli ita erit comparatus, ut angulus ab eo descriptus aequalis sit angulo *commutationis* nomine insignito.

Eodem modo per eundem epicyclum distantia planetae a terra exacte designatur, utpote quae distantia D in planum eccliptícae projecta est $\frac{D}{R} = \sqrt{1 + \frac{r^2}{R^2} - 2\frac{r}{R}\cos.(l - L)}$ quod cum secunda §. 1. aequatione prorsus consentit.

Hac autem ratione Ptolemaeus non nisi inaequalitates planetarum *inferiorum* exhibere arbitratus est. *Il faisoit mouvoir chaque planète inférieure sur un epicycle, dont le centre avoit un mouvement égal au mouvement solaire et la planète parcourait son épicycle pendant un temps qui est celui de sa révolution autour du soleil. Au contraire chacune des planètes supérieures était mue sur un epicycle, dont le centre avoit un mouvement égal à celui de la révolution de la planète et la période du mouvement de la planète dans l'épicycle étoit celle d'une révolution solaire. (Laplace Expos. du syst. du monde).*

Mihi autem altera pro planetis superioribus suppositio cum priori pro inferioribus prorsus identica esse videtur, ita ut quaevis earum omnibus planetis promiscue inservire possit. Quod si enim aequationem praecedentem cum aequatione prima §. 1. conferimus, priori ita proposita

$$\mathrm{tg.}\lambda = \frac{\sin. l - \frac{R}{r}\sin. L}{\cos. l - \frac{R}{r}\cos. L}, \quad \text{erit}$$

$$a = \frac{R}{r}, \quad b = l, \quad b' = L - l, \quad \phi = \lambda \ldots\ldots (II).$$

Quae ambae suppositiones (I) et (II), cum ex una eademque aequatione derivatae sint, necessario etiam eundem quantitatis λ valorem producere censendae sunt, id quod etiam considerationibus geometricis, sed paulo uberius, demonstrari potest.

Quamprimum autem valor quantitatis λ per seriem exprimendus sit, binae hypotheses probe secernendae sunt, siquidem, ut rei natura postulat, series divergentes excludendae sint. Nullo enim negotio ex prima hujus §. aequatione invenitur vel

$$\text{tg.}(\lambda - l) = \frac{\frac{R}{r}\sin.(l-L)}{1-\frac{R}{r}\cos.(l-L)} \quad \text{vel} \quad \text{tg.}(\lambda - L) = \frac{\frac{r}{R}\sin.(l-L)}{\frac{r}{R}\cos.(l-L)-1}$$

quae expressiones cum tertia § 1 aequatione comparatae sequentes series subministrant

$$\lambda - l = \frac{R}{r}\sin.(l-L) + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2\sin.2(l-L) + \frac{1}{3}\left(\frac{R}{r}\right)^3\sin.3(l-L) +$$

pro planetis superioribus et

$$L - \lambda = \frac{r}{R}\sin.(l-L) + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2\sin.2(l-L) + \frac{1}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^3\sin.3(l-L) +$$

pro inferioribus.

4. Sufficiant haec de uno epicyclo jam *numero quocunque* epicyclorum eodem quo antea modo valores quantitatum Φ, r et Δ quaerendi sunt, quam investigationem, cum in ea totus negotii cardo vertatur, omni qua par est industria suscipiamus.

Sit $Aa = i$ radius circuli primi, $aa' = \alpha$ secundi, $a'a'' = \beta$ tertii etc. Anguli autem his radiis intercepti sint $A a a' = b'$, $aa'a'' = b''$, $a'a''a''' = b'''$ etc. Ducatur per centrum A circuli primi linea recta AB, quae cum radio i constituit angulum $BAa = m$. Tandem per idem centrum A ad centrum epicycli ultimi vel ad centrum ipsius planetae ducatur recta r, quae cum recta data AB facit angulum Φ et cum radio primo Aa angulum Δ, ita ut $m = \Phi + \Delta$. His positis sint coordinatae rectangulae Tab. II. Fig. 5.

puncti	a,	hoc est	$Ac = x$	$ca = y$
- -	a'	— —	$Ac' = x'$	$c'a' = y'$
- -	a''	— —	$Ac'' = x''$	$c''a'' = y''$ etc.

Brevitatis denique causa sit $a = 2 \cdot 90^\circ - b'$

$b = 4 \cdot 90^\circ - b' - b''$

$c = 6 \cdot 90^\circ - b' - b'' - b'''$

$d = 8 \cdot 90^\circ - b' - b'' - b'' - b^{IV}$ etc.

Totum autem negotium optime absolvitur praevia determinatione coordinatarum x, x' .. et y, y' ... quarum valores sequenti modo inveniri possunt.

Pro *primis* nullo negotio habemus $x = \cos. m$ et $y = \sin. m$.

Pro *secundis* erit $b'aa' = b' - Aac - 90^\circ = b + b' - 2 . 90$ unde

$$x' = \cos. m + \alpha \cos. (m - a)$$
$$y' = \sin. m + \alpha \sin. (m - a).$$

Pro *tertiis* $b'a'a = 90 - baa' = 3 . 90 - b - b'$ et $b''a'a'' = b' - b'a'a - 90$ unde $b'a'a'' = b + b' + b'' - 4 . 90$ et hinc

$$x'' = \cos. m + \alpha \cos. (m - a) + \beta \cos. (m - b)$$
$$y' = \sin. m + \alpha \sin. (m - a) + \beta \sin. (m - b)$$

unde jam in genere pro centro epicycli ultimi concludimus

$$X = \cos. m + \alpha \cos. (m - a) + \beta \cos. (m - b) + \gamma \cos. (m - c) + \delta \cos. (m - d) +$$
$$Y = \sin. m + \alpha \sin. (m - a) + \beta \sin. (m - b) + \gamma \sin. (m - c) + \delta \sin. (m - d) +$$

vel quantitatibus b' b'' b''' .. restitutis

$$X = \cos. m - \alpha \cos. (m + b') + \beta \cos. (m + b' + b'') - \gamma \cos. (m + b' + b'' + b''') +$$
$$Y = \sin. m - \alpha \sin. (m + b') + \beta \sin. (m + b' + b'') - \gamma \sin. (m + b' + b'' + b''') +$$

Inventis autem quantitatibus X et Y facile obtinentur valores quantitatum Φ, Δ et r virtute aequationum sequentium

$$\text{tg.}\Phi = \frac{Y}{X}, \quad \text{tg.}\Delta = \frac{Xy - Yx}{Xx + Yy} \text{ et } r = \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{X}{\cos.\Phi} = \frac{Y}{\sin.\Phi}.$$

5. Evolvamus primo valores quantitatis Φ et Δ.

Aequatio praecedens $\text{tg.}\Phi = \frac{Y}{X}$ confestim praebebit

$$\text{tg.}\Phi = \frac{\sin m + \alpha \sin (m - a) + \beta \sin (m - b) + \gamma \sin (m - c) +}{\cos m + \alpha \cos. (m - a) + \beta \cos. (m - b) + \gamma \cos. (m - c) +} \quad \ldots (I).$$

Aequatio autem $\text{tg.}\Delta = \frac{Xy - Yx}{Xx + Yy}$ quae etiam per $\text{tg.}\Delta = \frac{\text{tg.}m - \text{tg}\,\Phi}{1 + \text{tg}\, m\, \text{tg.}\Phi}$ exprimi potest, si tang. Φ ex I substituitur, in sequentem abibit

$$\text{tg.}\Delta = \frac{(\text{tg.}m \cos.m - \sin.m) + \alpha(\text{tg}\, m \cos (m-a) - \sin (m-a)) + \beta(\text{tg}\, m \cos.(m-b) - \sin (m-b)) +}{(\text{tg.}m \sin.m + \cos.m) + \alpha(\text{tg.}m \sin (m-a) + \cos.(m-a)) + \beta(\text{tg.}m \sin.(m-b) + \cos (m-b)) +}$$

unde multiplicato nominatore et denominatore per $\cos. m$ colligitur

$$\text{tang.}\Delta = \frac{\alpha \sin a + \beta \sin. b + \gamma \sin. c + \delta \sin d +}{1 + \alpha \cos. a + \beta \cos. b + \gamma \cos. c + \delta \cos. d +} \quad \ldots (II)$$

quae aequatio etiam per sequentem dari poterit

$$\text{tg.}\Delta = \frac{\alpha \sin\, b' - \beta \sin\,(b'+b'') + \gamma \sin\,(b'+b''+b''') - \delta \sin.(b'+b''+b'''+b^{IV}) + \cdot}{1 - \alpha \cos\, b' + \beta \cos\,(b'+b'') - \gamma \cos.(b'+b''+b''') + \delta \cos.(b'+b''+b'''+b^{IV}) - \cdot}$$

6. Substitutis denique valoribus inventis ipsarum X et Y in aequatione $r^2 = X^2 + Y^2$ erit

$$\begin{aligned} r^2 = {} & 1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \ldots + \alpha_n^2 \\ & + 2(\alpha\cos.a + \beta\cos.b + \gamma\cos.c + \ldots\ldots + \alpha_n\cos.a_n) \\ & + 2\alpha(\beta\cos.(b-a) + \gamma\cos.(c-a) + \delta\cos.(d-a) + \ldots + \alpha_n\cos.(a_n - a)) \\ & + 2\beta(\gamma\cos.(c-b) + \delta\cos.(d-b) + \varepsilon\cos.(e-b) + \ldots + \alpha_n\cos.(a_n - b)) \\ & + 2\alpha_{n-1}(\alpha_n\cos.(a_n - a_{n-1})) \end{aligned}$$

ubi lex progressionis aperta est.

7. Antequam ulterius progrediamur, investigemus valores angulorum singulorum aAa', $a'Aa''$ etc., ex quibus Δ congestus est, qui anguli sunt magnitudines apparentes radiorum primi, secundi, tertii epicycli et oculo in centro A circuli primi fixo. Sit $aAa' = \Delta^{0\cdot 1}$, $a'Aa'' = \Delta^{1\cdot 2}$, $a''Aa''' = \Delta^{2\cdot 3}$.. unde $\Delta = \Delta^{0\cdot 1} + \Delta^{1\cdot 2} + \Delta^{2\cdot 3} + \Delta^{3\cdot 4} + \ldots$ et quaeratur valor quantitatis $\Delta^{n\cdot n+1}$ sive magnitudo apparens semidiametri $(n+1)^{ti}$ epicycli.

Posito numero epicyclorum n, erit

$$\text{tg.}\ \Delta = \frac{\alpha \sin.a + \beta \sin.b + \gamma \sin.c \ldots + \alpha_n \sin.a_n}{1 + \alpha \cos.a + \beta \cos.b + \gamma \cos.c \ldots + \alpha_n \cos.a_n}$$

ubi $a_n = 2 \cdot n \cdot 90^\circ - b' - b'' - b''' \ldots - b_n$ et

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \alpha = \beta = \gamma \quad \text{pro} \quad n = 1 = 2 = 3 \\ b_n &= b' = b'' = b''' \\ a_n &= a = b = c. \end{aligned}$$

Hinc etiam, si numerus epicyclorum est $n + 1$

$$\text{tg.}\ \Delta' = \frac{\alpha \sin.a + \beta \sin.b + \ldots + \alpha_n \sin.a_n + \alpha_{n+1} \sin.a_{n+1}}{1 + \alpha \cos.a + \beta \cos.b \ldots + \alpha_{n+1} \cos.a_{n+1}}.$$

Ast $\text{tg.}\ (\Delta' - \Delta) = \dfrac{\text{tg.}\Delta' - \text{tg.}\Delta}{1 + \text{tg}\ \Delta'\, \text{tg.}\Delta}$ et $\Delta' - \Delta = \Delta^{n\cdot n+1}$

unde, substitutione facta, post rite peractam reductionem, habebimus

$$\text{tang.}\ \Delta^{n\cdot n+1} = \frac{\alpha_{n+1}\cdot[f \sin.a_{n+1} + g \cos.a_{n+1}]}{f^2 + g^2 + \alpha_{n+1}[f \cos.a_{n+1} + g \sin.a_{n+1}]}$$

ubi $f = 1 + \alpha \cos. a + \beta \cos. b \,..+ \alpha_n \cos. a_n$
$g = \alpha \sin. a + \beta \sin. b \,..+ \alpha_n \sin. a_n$.

Posito proinde $n = 0, \; 1, \; 2, \; 3 \,..$ habebimus

$$\text{tg.}\,\Delta^{0 \cdot 1} = \frac{\alpha \sin. a}{1 + \alpha \cos a}$$

$$\text{tg.}\,\Delta^{1 \cdot 2} = \frac{\beta \sin b + \alpha\beta \sin.(b - a)}{1 + \alpha^2 + \beta \cos b + \alpha\beta \cos.(b - a) + 2\alpha \cos. a}$$

$$\text{tg.}\,\Delta^{2 \cdot 3} = \frac{\gamma \sin. c + \beta\gamma \sin(c - a) + \beta\gamma \sin.(c - b)}{1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma \cos. c + \alpha\gamma \cos.(c - a) + \beta\gamma \cos.(c - b) + 2\alpha \cos a + 2\beta \cos. b + 2\alpha\beta \cos.(b - a)}$$

$$\text{tg.}\,\Delta^{3 \cdot 4} = \frac{\delta\,[\sin. d + \alpha \sin(d - a) + \beta \sin(d - b) + \gamma \sin(d - c)]}{\left(\begin{array}{l} 1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2[\alpha \cos. a + \beta \cos. b + \gamma \cos c] + 2\alpha[\beta \cos.(a - b) + \gamma \cos(a - c)] \\ \quad + 2\beta[\gamma \cos.(b - c)] + \delta[\cos. d + \alpha \cos.(d - a) + \beta \cos.(d - b) + \gamma \cos.(d - c)] \end{array}\right)}$$

et in genere pro quovis numero epicyclorum

$$\text{tang.}\,\Delta^{n \cdot n+1} = \frac{A_n}{B_n} \quad \text{ubi}$$

$$A_n = \alpha_{n+1} \left[\begin{array}{l} \sin. a_{n+1} + \alpha \sin.(a_{n+1} - a) + \beta \sin.(a_{n+1} - b) \\ \quad + \gamma \sin.(a_{n+1} - c) \,..+ \alpha_n \sin.(a_{n+1} - a_n) \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} B_n = 1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \,..+ \alpha_n^2 + \alpha_{n+1} \cdot [\cos. a_{n+1} + \alpha \cos.(a_{n+1} - a) \\ \qquad + \beta \cos.(a_{n+1} - b) \,..+ \alpha_n \cos.(a_{n+1} - a_n)] \\ \quad + 2\,(\alpha \cos. a + \beta \cos. b + \gamma \cos. c \,..+ \alpha_n \cos. a_n) \\ \quad + 2\,(\beta \cos.(a - b) + \gamma \cos.(a - c) + \delta \cos.(a - d) \,..+ \alpha_n \cos.(a - a_n)) \\ \quad + 2\beta(\gamma \cos.(b - c) + \delta \cos.(b - d) + \varepsilon \cos.(b - e) \,..+ \alpha_n \cos.(b - a_n)) \\ \quad + 2\gamma(\delta \cos.(c - d) + \varepsilon \cos.(c - e) + \zeta \cos.(c - f) \,..+ \alpha_n \cos.(c - a_n)). \end{array}$$

8. Oritur hinc demonstratio facillima theorematis sequentis.

Si quantitates $C_0\; C_1\; C_2\; C_3$ ita sese habeant, ut, retentis valoribus quantitatum $A_0\; A_1\; A_2 \,..$ et $B_0\; B_1\; B_2 \,..$ quibus in §. 7. usi sumus, aequationes sequentes simul locum obtineant

$$\text{tg.}\,C_0 = \frac{A_0}{B_0}, \quad \text{tg.}\,C_1 = \frac{A_1}{B_1}, \quad \text{tg.}\,C_2 = \frac{A_2}{B_2} \,...\, \text{tg.}\,C_n = \frac{A_n}{B_n}$$

erit $C = C_0 + C_1 + C_2 + C_3 \,...+ C_n$
ubi

$$\text{tang.}\,C = \frac{\alpha \sin. b' - \beta \sin.(b' + b'') + \gamma \sin(b' + b'' + b''') \,...\pm \alpha_n \sin(b' + b'' \,..+ b^n)}{1 - \alpha \cos. b' + \beta \cos.(b' + b'') - \gamma \cos.(b' + b'' + b''') \,...\pm \alpha_n \cos(b' + b'' \,..+ b^n)}.$$

Pro casu singulari e. g. ubi $a = b = c = d \,..$ erit

$$\text{tg.}\, C_0 = \frac{\alpha \sin. a}{1 + \alpha \cos. a}$$

$$\text{tg.}\, C_1 = \frac{\beta \sin. a}{1 + \alpha^2 + \beta \cos. a + \alpha\beta + 2\alpha \cos a}$$

$$\text{tg.}\, C_2 = \frac{\gamma \sin. a}{1 + \alpha^2 + \beta^2 + 2(\alpha + \beta) \cos. a + 2\alpha\beta + \gamma(\cos. a + \alpha + \beta)}$$

$$\text{tg.}\, C_3 = \frac{\delta \sin. a}{1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha+\beta+\gamma) \cos. a + 2\alpha(\beta+\gamma) + 2\beta\gamma + \delta(\cos. a + \alpha + \beta + \gamma)},$$

ubi lex progressionis aperta est. Facto proinde

$$\text{tg.}\, C = \frac{(\alpha + \beta + \gamma + \delta \ldots) \sin. a}{1 + (\alpha + \beta + \gamma + \delta \ldots) \cos a}$$ habebimus ut supra

$$C = C_0 + C_1 + C_2 + C_3 \ldots$$

Quodsi majoris simplicitatis causa in aequationibus antecedentibus ponatur $\alpha = \beta = \gamma \ldots = 1$ obtinebimus

$$\text{tg.}\, C_0 = \frac{\sin. a}{1 + \cos. a}$$

$$\text{tg.}\, C_1 = \frac{\sin. a}{3 + 3 \cos. a}$$

$$\text{tg.}\, C_2 = \frac{\sin a}{7 + 5 \cos. a}$$

$$\text{tg.}\, C_3 = \frac{\sin. a}{13 + 7 \cos. a}$$

$$\text{tg.}\, C_4 = \frac{\sin. a}{21 + 9 \cos. a}$$ et

$$\text{tg.}\, C_n = \frac{\sin. a}{n(n + 1) + 1 + (2n + 1) \cos. a}.$$

Posito insuper $\text{tg.}\, C = \frac{n \sin. a}{1 + n \cos. a}$ habebimus ut supra

$$C = C_0 + C_1 + C_2 \ldots + C_n.$$

Calculi probandi causa substituamus in aequatione

$$\text{tg.}\,(C_0 + C_1 + C_2) = \frac{\text{tg.}\, C_0 + \text{tg.}\, C_1 + \text{tg.}\, C_2 - \text{tg.}\, C_0\, \text{tg.}\, C_1\, \text{tg.}\, C_2}{1 - \text{tg.}\, C_0\, \text{tg.}\, C_1 - \text{tg}\, C_0\, \text{tg.}\, C_2 - \text{tg.}\, C_1\, \text{tg.}\, C_2}$$

valores datos quantitatum $\text{tg.}\, C_0$, $\text{tg.}\, C_1$, $\text{tg.}\, C_2$, habebimus omnibus terminis ad nominatorem $3\,(1 + \cos.\, a)^2\,(7 + 5 \cos.\, a)$ reductis

$$\text{tg.}\,(C_0 + C_1 + C_2) = \frac{3 \sin a(7 + 5\cos a) + \sin. a(7 + 5 \cos. a) + 3 \sin. a(1 + \cos. a - \sin. a(1 - \cos. a)}{3(1 + \cos. a)(7 + 5 \cos. a) - (1 - \cos. a)(7 + 5 \cos. a) - 4 \sin.^2 a}$$

quae aequatio omnibus rite contractis in sequentem abit

$$\text{tg.}\,(C_0 + C_1 + C_2) = \frac{3 \sin a}{1 + 3 \cos. a},$$

quae formula utique cum expressione generali tg. $C = \frac{n \sin. a}{1 + n \cos. a}$ pro $n = 3$ identica est.

Ponendo denique $a = 90^\circ$ prodit casus omnium simplicissimus, quo si sumatur

$$\text{tg.} C_0 = 1 \quad \text{tg.} C_1 = \frac{1}{3} \quad \text{tg.} C_2 = \frac{1}{7} \quad \text{tg.} C_3 = \frac{1}{13} \ldots \text{tg.} C_n = \frac{T}{n^2 + n + 1}$$

et tang. $C = n$, habebimus ut antea

$$C = C_0 + C_1 + C_2 + C_3 \ldots + C_n.$$

Theorema hoc multis et quidem elegantissimis disquisitionibus evolvendis occasionem suppeditat, quibus hic, ut a fine proposito prorsus alienis, supersedendum est.

9. Jam ut ad epicyclorum theoriam redeamus, praeprimis adnotandum est valorem inventum quantitatis Δ per tangentem hujus anguli expressum omnium quidem simplicissimum, comparationi autem cum aliis expressionibus e. g. aequationis centri, nequaquam idoneum esse. Quem proinde in finem expressio data in aliam transmutetur, quae valorem anguli Δ per sinus angulorum multiplorum a, b, c.. exhibet.

Ponamus primo, ne prolixitate calculi nimis obruamur,

$$b' = b'' = b''' \ldots = 2 \cdot 90 - m$$

vel quod eodem redit $a = m$, $b = 2m$, $c = 3m$, $d = 4m$ etc. quo facto erit aequatio (II) §. 5.

$$\text{tang.} \Delta = \frac{\alpha \sin. m + \beta \sin. 2m + \gamma \sin. 3m + \delta \sin. 4m +}{1 + \alpha \cos. m + \beta \cos. 2m + \gamma \cos. 3m + \delta \cos. 4m +}.$$

Ponatur primo $A = \alpha \sin. m + \beta \sin. 2m +$
$B = \alpha \cos. m + \beta \cos. 2m +$ unde

$\text{tang.} \Delta = \frac{A}{1+B}$ et hinc

$$\Delta = \frac{A}{1+B} - \frac{1}{3} \cdot \frac{A^3}{(1+B)^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{A^5}{(1+B)^5} - \frac{1}{7} \cdot \frac{A^7}{(1+B)^7} +$$

Habemus autem

$$\frac{1}{(1+B)^n} = 1 - nB + \frac{n.n+1}{1.2} B^2 - \frac{n.n+1.n+2}{1.2.3} C^3 + \frac{n.n+1.n+2.n+3}{1.2.3.4} B^4 -$$

unde aequatio penultima in sequentem abit

$$\Delta = A\,(1 - B + B^2 + B^3 +)$$
$$- \frac{A^3}{3}\,(1 - 3B + 6B^2 - 10B^3 +)$$
$$+ \frac{A^5}{5}\,(1 - 5B + 15B^2 - 35B^3 +)$$
$$- \frac{A^7}{7}\,(1 - 7B + 28B^2 - 84B^3 +) +$$

quae aequatio, omnibus productis rite evolutis, praebebit

$$\Delta = \alpha \sin. m$$
$$- \tfrac{1}{2}(\alpha^2 - 2\beta) \sin. 2m$$
$$+ \tfrac{1}{3}(\alpha^3 - 3\alpha\beta + 3\gamma) \sin. 3m$$
$$- \tfrac{1}{4}(\alpha^4 - 4\alpha^2\beta + 2\beta^2 + 4\alpha\gamma - 4\delta) \sin. 4m +$$

Posito ergo brevitatis causa

$$\Delta = A \sin. m - \tfrac{1}{2} B \sin. 2m + \tfrac{1}{3} C \sin. 3m - \tfrac{1}{4} D \sin. 4m + \quad \text{erit}$$
$$A = \alpha$$
$$-\frac{B}{2} = \beta - \tfrac{1}{2}\alpha^2$$
$$\frac{C}{3} = \gamma - \tfrac{1}{2}\cdot 2\alpha\beta + \tfrac{1}{3}\alpha^3$$
$$-\frac{D}{4} = -\tfrac{1}{2}(2\alpha\gamma + \beta^2) + \tfrac{1}{3}\cdot 3\alpha^2\beta - \tfrac{1}{4}\alpha^4$$
$$\frac{E}{5} = \varepsilon - \tfrac{1}{2}(2\alpha\delta + 2\beta\gamma) + \tfrac{1}{3}(3\alpha^2\gamma + 3\alpha\beta^2) - \tfrac{1}{4}\cdot 4\alpha^3\beta + \tfrac{1}{5}\cdot\alpha^5.$$

Quoad legem progressionis horum terminorum, quivis eorum ut differentiale termini praecedentis spectari poterit, siquidem β ut differentiale ipsius α, et γ ipsius β etc. consideretur, hac cum limitatione, ut sola ultima cujusvis factoris litera mutetur in proxime sequentem, si litera penultima in ordine alphabetico $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ non occupet locum penultimum et ut duae postremae literae simul mutentur, si illae etiam in ordine alphabetico sibi proxime sequantur. E. G. si ex quarto termino D quintus E eliciendus est dabit differentiale quantitatis δ in quarto . . quantitatem ε in quinto

. . . . $2\alpha\gamma$ . . . . $2\alpha\delta$

. . . . . β^2 . . . . $2\beta\gamma$

. . . . $3\alpha^2\beta$ . . . . $3\alpha^2\gamma + 3\cdot\frac{2\alpha\beta^2}{2}$ etc.

ubi notandum, post differentiationem literae penultimae productum per novum sequentis literae exponentem dividendum esse. Hac ratione ex quinto termino invenietur sextus

$$-\frac{F}{6} = \zeta - \frac{1}{2}(2\alpha\varepsilon + 2\beta\delta + \gamma^2) + \frac{1}{3}(3\alpha^2\delta + 6\alpha\beta\gamma + \beta^3)$$
$$- \frac{1}{4}(4\alpha^3\gamma + 6\alpha^2\beta^2) + \frac{1}{5}\cdot 5\alpha^4\beta - \frac{1}{6}\cdot\alpha^6$$

et inde septimus

$$\frac{G}{7} = \eta - \frac{1}{2}(2\alpha\zeta + 2\beta\varepsilon + 2\gamma\delta) + \frac{1}{3}(3\alpha^2\varepsilon + 6\alpha\beta\delta + 3\alpha\gamma^2 + 3\beta^2\gamma)$$
$$- \frac{1}{4}(4\alpha^3\delta + 12\alpha^2\beta\gamma + 4\alpha\beta^3) + \frac{1}{5}(5\alpha^4\gamma + 10\alpha^3\beta^2) - \frac{1}{6}\cdot 6\alpha^5\beta + \frac{1}{7}\cdot\alpha^7$$

et eodem modo sequentes termini, quorum proinde evolutio nullis jam difficultatibus obnoxia erit.

Quod si quis easdem quantitates A, B, C .. forma seriernm recurrentium exprimere amet, facili negotio inveniet

$$A = \alpha$$
$$B = A\alpha - 2\beta$$
$$C = B\alpha - A\beta + 3\gamma$$
$$D = C\alpha - B\beta + A\gamma - 4\delta$$
$$E = D\alpha - C\beta + B\gamma - A\delta + 5\varepsilon$$
$$F = E\alpha - D\beta + C\gamma - B\delta + A\varepsilon - 6\zeta \text{ etc.}$$

10. I. Posito $\beta = \gamma \ldots = 0$ erit $A = \alpha$, $B = \alpha^2$, $C = \alpha^3 \ldots$ et $\Delta = \frac{\alpha \sin. m}{1 + \alpha \cos. m}$

$$\Delta = \alpha \sin. m - \frac{\alpha^2}{2}\sin. 2m + \frac{\alpha^3}{3}\sin. 3m - \frac{\alpha^4}{4}\sin. 4m + $$

prorsus ut in aeq. (I.) §. 1.

II. Quodsi autem $\alpha = \sqrt[2]{\beta} = \sqrt[3]{\gamma} = \sqrt[4]{\delta} \ldots$ vel, quod eodem redit $A = \alpha$, $B = -\alpha^2$, $C = \alpha^3$, $D = -\alpha^4 \ldots$ habebimus

$$\text{tg.}\,\Delta = \frac{\alpha \sin. m + \alpha^2 \sin. 2m + \alpha^3 \sin. 3m +}{1 + \alpha \cos m + \alpha^2 \cos. 2m + \alpha^3 \cos. 3m +} \quad \text{et}$$

$$\Delta = \alpha \sin. m + \frac{\alpha^2}{2}\sin. 2m + \frac{\alpha^3}{3}\sin. 3m + \frac{\alpha^4}{4}\sin. 4m + \ldots$$

III. Posita autem in I. quantitate $\alpha = -\alpha$, comparatisque valoribus quantitatis Δ in I. et II., erit

$$\frac{\sin. m + \alpha \sin. 2m + \alpha^2 \sin. 3m + \alpha^3 \sin. 4m + ..}{1 + \alpha \cos. m + \alpha^2 \cos. 2m + \alpha^3 \cos. 3m + ..} = \frac{\sin. m}{1 - \alpha \cos. m}$$

cujus aequationis veritas facile a posteriori probatur. Hinc autem sequitur, angulum Δ per aequationem tang. $\Delta = \frac{\alpha \sin. m}{1 - \alpha \cos. m}$ datum pari modo vel per unicum epicyclum vel per innumerabiles exhiberi posse.

IV. Ponamus $B = C = D .. = 0$ hoc est $2\beta = \alpha^2$, $3\gamma = \alpha\beta$, $4\delta = \alpha\gamma$, $5\varepsilon = \alpha\delta$ .., quo facto habebitur

$$\text{tang.}\,\Delta = \frac{\alpha \sin. m + \frac{\alpha^2}{1.2}\sin. 2m + \frac{\alpha^3}{1.2.3}\sin. 3m + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4}\sin. 4m +}{1 + \alpha \cos. m + \frac{\alpha^2}{1.2}\cos. 2m + \frac{\alpha^3}{1.2.3}\cos. 3m + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4}\cos. 4m +}$$

et $\Delta = \alpha \sin. m$.

V. Denique si $\beta = -\alpha^2$, $\gamma = \alpha^3$, $\delta = -\alpha^4$ .. vel $A = \alpha$, $B = 3\alpha^2$, $C = 7\alpha^3$, $D = 15\alpha^4$ erit

$$\text{tang.}\,\Delta = \frac{\alpha \sin. m - \alpha^2 \sin. 2m + \alpha^3 \sin. 3m -}{1 + \alpha \cos. m - \alpha^2 \cos. 2m + \alpha^3 \cos. 3m -} \quad \text{et}$$

$$\Delta = \alpha \sin. m - \tfrac{3}{2}\alpha^2 \sin. 2m + \tfrac{7}{3}\alpha^3 \sin. 3m - \tfrac{15}{4}\alpha^4 \sin. 4m \, ... \pm \frac{(2^n - 1)}{n}\alpha^n \sin. nm$$

quas series, una cum aliis ex aequatione generali data facili negotio deducendis, utpote memoratu haud indignis, alias accuratius perquiram.

11. Supposuimus hucusque in investigatione quantitatis Δ, angulos a, b, c .. esse quantitates inter se commensurabiles et quidem $m = a = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{d}{4}$ .. unde sequitur, ope aequationum praecedentium non nisi series hujus formae

$$\alpha_1 \sin. x + \alpha_2 \sin. 2x + \alpha_3 \sin. 3x + \alpha_4 \sin. 4x +$$

per epicyclos exprimi posse. Restat igitur adplicatio theoriae epicyclorum ad series generalissimas sub hac forma contentas

$$\alpha_1 \sin. x_1 + \alpha_2 \sin. x_2 + \alpha_3 \sin. x_3 +$$

ubi quantitates α_1 α_2 α_3 .. et x_1 x_2 x_3 .. arbitrariae et inter se independentes assumuntur. Hucusque nimirum totum negotium non nisi in determinatione radiorum epicyclorum versabatur, nunc autem etiam motum cuivis radio proprium vel, quod eodem redit, revolutiones epicyclorum singulas in auxilium vocabimus. Ad inveniendam hanc solutionem si quis methodo §. 9. explicata uti vellet, confestim sese ad inextricabiles fere calculos perductum videret. Solutio autem sequens, quam pluribus aliis rejectis in medium adfero quamque eadem facilitate ad casum simplicem §. 9. tractatum adplicare possumus, quoad calculi commoditatem nihil amplius desiderandum relinquere mihi videtur.

Problema.

Sit $\text{tang.}\,\Delta = \frac{\alpha\,\sin.a + \beta\,\sin.b + \gamma\,\sin.c + \delta\,\sin.d + }{1 + \alpha\cos.a + \beta\cos.b + \gamma\cos.c + \delta\cos.d + }$,

quae est expressio maxime generalis quantitatis tang. Δ § 7 inventa. Quaeratur valor quantitatis Δ per seriem secundum sinus angulorum a, b, c.. eorumque multiplorum procedentem.

Jam ponatur log. nat. $e = 1$ et brevitatis causa

$$\Phi^a = e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}$$
$$\psi^a = e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}$$

quo pacto aequatio data abit in sequentem

$$\frac{e^{2\Delta\sqrt{-1}} - 1}{e^{2\Delta\sqrt{-1}} + 1} = \frac{\alpha\psi^a + \beta\psi^b + \gamma\psi^c + \delta\psi^d + }{2 + \alpha\Phi^a + \beta\Phi^b + \gamma\Phi^c + \delta\Phi^d + }$$

unde facile concluditur

$$e^{2\Delta\sqrt{-1}} = \frac{2 + \alpha(\Phi^a + \psi^a) + \beta(\Phi^b + \psi^b) + \gamma(\Phi^c + \psi^c) + }{2 + \alpha(\Phi^a - \psi^a) + \beta(\Phi^b - \psi^b) + \gamma(\Phi^c - \psi^c) + }$$

et hinc substitutis valoribus quantitatum Φ et ψ erit

$$e^{2\Delta\sqrt{-1}} = \frac{1 + \alpha e^{a\sqrt{-1}} + \beta e^{b\sqrt{-1}} + \gamma e^{c\sqrt{-1}} + }{1 + \alpha e^{-a\sqrt{-1}} + \beta e^{-b\sqrt{-1}} + \gamma e^{-c\sqrt{-1}} + }.$$

Sumtis proinde logarithmis, erit

$$2\Delta\sqrt{-1} = \log.\left(1 + \alpha e^{a\sqrt{-1}} + \beta e^{b\sqrt{-1}} + \gamma e^{c\sqrt{-1}} + \right)$$
$$- \log.\left(1 + \alpha e^{-a\sqrt{-1}} + \beta e^{-b\sqrt{-1}} + \gamma e^{-c\sqrt{-1}} + \right).$$

Iam si α, β, γ . . sunt quantitates datae et

$$\log.(1 + \alpha + \beta + \gamma + \ldots +) = A - \tfrac{B}{2} + \tfrac{C}{3} - \tfrac{D}{4} + \tfrac{E}{5} -$$

ubi A, B, C . . sunt quantitates quaerendae, facili negotio invenitur

$$\left.\begin{array}{l} 0 = A - \alpha \\ 0 = B - A\alpha + 2\beta \\ 0 = C - B\alpha + A\beta - 3\gamma \\ 0 = D - C\alpha + B\beta - A\gamma + 4\delta \\ 0 = E - D\alpha + C\beta - B\gamma + A\delta - 5\varepsilon \text{ etc.} \end{array}\right\} \text{I.}$$

Substitutis ergo pro α, β, γ . . nostris quantitatibus $\alpha e^{a\sqrt{-1}}$, $\beta e^{b\sqrt{-1}}$, $\gamma e^{c\sqrt{-1}}$ evolutisque valoribus A, B, C . . ope aequationum conditionalium I, vocetur summa

$$A - \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{3}C - \tfrac{1}{4}D + \ldots = S.$$

Substitutis deinde eodem modo pro α, β . . quantitatibus $\alpha e^{-a\sqrt{-1}}$, $\beta e^{-b\sqrt{-1}}$, . . sit summa

$$A' - \tfrac{1}{2}B' + \tfrac{1}{3}C' - \ldots = S'.$$

Quibus expeditis confestim habemus

$$\Delta = \frac{S - S'}{2\sqrt{-1}}.$$

His proinde substitutionibus rite peractis omnibusque ope aequationis

$$\sin. x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

reductis, invenietur

$$\begin{array}{rl} \Delta = & \alpha \sin. a \\ & + \beta \sin. b - \tfrac{1}{2}\alpha^2 \sin. 2a \\ & + \gamma \sin. c - \tfrac{1}{2}\,.\, 2\alpha\beta \sin.(a + b) + \tfrac{1}{3}\,.\,\alpha^3 \sin. 3a \\ & + \delta \sin. d - \tfrac{1}{2}\left(2\alpha\gamma \sin.(a + c) + \beta^2 \sin. 2b\right) \\ & \qquad + \tfrac{1}{3}\,.\,3\alpha^2\beta \sin.(2a + b) - \tfrac{1}{4}\alpha^4 \sin. 4a \\ & + \varepsilon \sin. e - \tfrac{1}{2}\left(2\alpha\delta \sin.(a + d) + 2\beta\gamma \sin.(b + c)\right) \\ & \qquad + \tfrac{1}{3}\left(3\alpha^2\gamma \sin.(2a + c) + 3\alpha\beta^2 \sin.(a + 2b)\right) \\ & \qquad - \tfrac{1}{4}\,.\,4\alpha^3\beta \sin.(3a + b) + \tfrac{1}{5}\alpha^5 \sin. 5a \end{array}$$

$$+ \zeta \sin. f - \tfrac{1}{2}(2\alpha\varepsilon \sin.(a+e) + 2\beta\delta \sin.(b+d) + \gamma^2 \sin. 2c)$$
$$+ \tfrac{1}{3}(3\alpha^2\delta \sin.(2a+d) + 6\alpha\beta\gamma \sin.(a+b+c) + \beta^3 \sin. 3b)$$
$$- \tfrac{1}{4}(4\alpha^3\gamma \sin.(3a+c) + 6\alpha^2\beta^2 \sin. 2(a+b))$$
$$+ \tfrac{1}{5} . 5\alpha^4\beta \sin.(4a+b) - \tfrac{1}{6}\alpha^6 \sin. 6a \ldots .$$

ubi lex progressionis sinuum in aprico est, lex autem coëfficientium α β γ eadem prorsus, quae jam § 9 observata et explicata est. Posito $a = m$, $b = 2m$, $c = 3m$ series data in illam § 9 inventam abit.

12. Jam forma ipsa expressionis maxime generalis quantitatis Δ docet, quantitatem

$$\Delta = \alpha_1 \sin. x_1 + \alpha_2 \sin. x_2 + \alpha_3 \sin. x_3 +$$

in genere per epicyclos exprimi non posse, ni anguli x_1 x_2 .. factoresque α_1 α_2 .. certae legi adstringantur, cujus legis forma per ultimam § 11 aequationem data est, quae aequatio ex generalissima ipsius tg. Δ expressione (§. 5. Aequat. II.) deducta est. Hinc e. g. perturbationes telluris ab excentricitate independentes, quae Tom. III. *Mécanique céleste* pag. 104. continentur, quoad ab actione Veneris, Martisve, Jovis vel Saturni dependent separatim per epicyclos exprimi possunt, cum perturbationes cujusvis planetae per seriem hujus formae exprimuntur

$$\alpha_1 \sin. x + \alpha_2 \sin. 2x + \alpha_3 \sin. 3x + \alpha_4 \sin. 4x +$$

omnes autem horum planetarum actiones *simul sumtae* per epicyclos repraesentari non possunt, cum eae per seriem dantur, quae in ultima §. 11. aequatione non continetur, supposita nimirum dispositione situum epicyclorum, quae initio §. 4 explicata est. Hac de causa praecipuae inaequalitates lunares in longitudine

$-$ 6° 18′ 15″ sin. med. anom. ☾ $+$ 13′ 0″ sin. 2 med. anom. ☾	. . Aequatio centri
$-$ 1° 20′ 28″ sin. (2 ☾☉ $-$ med. anom. ☾) . .	Evectio
$+$ 35′ 41″ sin. 2 ☾☉	Variatio
$+$ 11′ 9″ sin. med. anom. ☉	aequatio ann.

ope quantumvis epicyclorum exprimi non possunt, quamvis hucusque suppositum sit, quamlibet novam inaequalitatem per novum quoque epicyclum prioribus adjunctum absolvi posse: *chaque inégalité nouvelle que l'art d'observer faisait découvrir, surchargeait le systéme d'un nouvel epicycle. (Expos. du syst. du Monde. 3. édit.)*

13. Absoluta jam theoria generali epicyclorum ad applicationem aequationum inventarum progrediamur.

Problema.

Invenire systema epicyclorum, quo motus planetae ellipticus exacte repraesentatur.

Conditioni hujus problematis pluribus modis satisfieri potest. Diametri enim epicyclorum vel revolutiones centrorum eorum in expressione ulima §. 11. varias suppeditant quantitates incognitas, quas in finem propositum apte determinare possumus. Ne autem prolixitate calculi nimis obruamur, revolutiones omnium centrorum inter se aequales assumamus, ita quidem, ut sola diametrorum determinatio restet.

Sit jam t revolutio puncti a vel centri epicycli primi, t' revolutio centri a' epicycli secundi, t'' tertii etc. unde facile concluduntur aequationes sequentes

$$t' = \frac{m \cdot t}{180 - b'} = \frac{m}{a} t, \quad t'' = \frac{m\, t}{18\ \ - b''} = \frac{m\, t}{b - a}; \quad t''' = \frac{m\, t}{180 - b'''} = \frac{m\, t}{c - b} \text{ etc.}$$

Quodsi ponatur $b'' = b''' = b^{IV} \;.\;. = 0$ et $\alpha - \beta + \gamma - \delta + = 0$ erit $\Delta = 0$ vel motus planetae medius non immutabitur, quantumvis etiam epicyclorum numerum in auxilium vocaveris.

Quodsi autem assumatur $t = nt' = n't'' = n''t''' \;.\;.$ erit $b' = 180 - n \,.\, m$, $b'' = 180 - n' \,.\, m$, $b''' = 180 - n'' \,.\, m$ unde (§. 5)

$$\text{tg.}\, \Delta = \frac{\alpha \sin.\, n\, m + \beta \sin.\, (n + n')\, m + \gamma \sin.\, (n + n' + n'')\, m +}{1 + \alpha \cos.\, n\, m + \beta \cos.\, (n + n')\, m + \gamma \cos.\, (n + n' + n'')\, m +}$$

Ponamus jam, ut ad solutionem problematis nostri redeamus, $a = m$, $b = 2m$, $c = 3m$ quo facto ultima aequatio §. 11. in eam transit, quae §. 9. evoluta est. Aequatio autem centri elliptica est, m denotante anomaliam mediam ab aphelio computatam,

$$-(2\varepsilon - \tfrac{1}{4}\varepsilon^3 + \tfrac{5}{96}\varepsilon^5 +) \text{ sin. } m + (\tfrac{5}{4}\varepsilon^2 - \tfrac{11}{24}\varepsilon^4) \text{ sin. } 2m -$$

ubi ε excentricitatem designat, semiaxe majori unitati aequale posito. Indicata nunc anomalia vera per ω positoque $\Delta = m - \omega$, habebimus aequationes conditionales pro determinandis radiis α β γ epicyclorum sequentes

$$\alpha = 2\varepsilon - \tfrac{1}{4}\varepsilon^3 + \tfrac{5}{96}\varepsilon^5$$

$$\frac{\alpha^2}{2} - \beta = \tfrac{5}{4}\varepsilon^2 - \tfrac{11}{24}\varepsilon^4 + \tfrac{17}{192}\varepsilon^6$$

$$\frac{\alpha^3}{3} - \alpha\beta + \gamma = \tfrac{13}{12}\varepsilon^3 - \tfrac{43}{64}\varepsilon^5$$

$$\frac{\alpha^4}{4} - \alpha^2\beta + \tfrac{1}{2}\beta^2 + \alpha\gamma - \delta = \tfrac{103}{96}\varepsilon^4 - \tfrac{451}{480}\varepsilon^6$$

$$\frac{\alpha^5}{5} - \alpha^3\beta + \alpha^2\gamma + \alpha\beta^2 - \alpha\delta - \beta\gamma + \varepsilon = \tfrac{1097}{960}\varepsilon^5 \text{ etc. etc.}$$

quae aequationes, si lubet, etiam ad altiores excentricitatis potestates produci possunt. Hinc demum valores quantitatum α, β . . facili negotio eliminantur. Ad quartam usque excentricitatis potestatem progredientes habebimus

radium circuli primi $= 1$

. . . . . secundi . . $\alpha = 2\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{4}$

. . . . . tertii . . $\beta = \frac{3}{4}\varepsilon^2 - \frac{\varepsilon^4}{24}$

. . . . . quarti . . $\gamma = -\frac{\varepsilon^3}{12}$

. . . . . quinti . . $\delta = \frac{\varepsilon^4}{24}$

ita quidem, ut motus ellipticus ad quartam usque excentricitatis potestatem per quatuor epicyclos exacte repraesentetur.

Exemplum.

Sit $\varepsilon = 0.01$ ideoque aequatio centri elliptica

$$m - \omega = 4125'35 \text{ sin. } m - 25\ 78 \text{ sin. } 2m + 0''22 \text{ sin. } 3m$$

quae pro $m = 45^\circ$ exhibet $\omega = 44^\circ\ 11'\ 48''\ 6$

I. Aequatio tg. $\Delta = \frac{\alpha \sin. m + \beta \sin. 2m +}{1 + \alpha \cos. m + \beta \cos. 2m +}$ (§. 9.) praebet

$\log. \alpha = 8 . 3010235$

$\log. \beta = 5 . 8750613$

$\log. \gamma = 3 . 0000000$ unde tang. $\Delta = \frac{0.0142168}{1.0141420}$,

$\Delta = 0^\circ\, 48'\, 11''4$ et inde $\omega = 44^\circ\, 11'\, 48''6$.

II. Aequatio

$\Delta = \alpha \sin. m + (\beta - \frac{1}{2}\alpha^2) \sin. 2m + (\gamma - \alpha\beta + \frac{\alpha^3}{3}) \sin. 3m +$

suppeditat

$\log. \alpha = 8 . 3010235$

$\log. (\frac{\alpha^2}{2} - \beta) = 6 . 0969100$

$\log. (\frac{\alpha^3}{3} - \alpha \quad + \gamma) = 4 . 0413927$ unde

$\Delta = 2916''981 - 25''783 + 0''160 = 0^\circ\, 48'\, 11''4$.

III. Aequatio denique (I) §. 5. praebet

$$\text{tang.} \Phi = \frac{(1 - \beta) \sin. m - \gamma \sin. 2m - \delta \sin. 3m -}{\alpha + (1 + \beta) \cos. m + \gamma \cos. 2m + \delta \cos. 3m +}$$

unde positis $\gamma = \delta = 0$ quod omnino licitum est

$$\text{tang.} \Phi = \frac{0 . 9999250 \sin m}{0 . 0199997 + 1 . 0000750 \cos. m}$$

log. nominatoris $= 9 . 8494525$

log. denom. . $= 9 . 8616297$

log. tang. $\Phi = 9 . 9878228$, $\Phi = 44^\circ\, 11'\, 48''6$ prorsus us supra.

Hac proinde ratione determinatio radiorum epicyclorum ad repraesentandam longitudinem ellipticam in orbita nullis jam difficultatibus obnoxia est simulque patet, si aequatio centri ad n^{tam} usque excentricitatis potestatem exacte determinanda sit, etiam n epicyclos in auxilium vocandos esse, si quidem, ut supposuimus, revolutiones omnes inter se aequales assumantur.

Progrediamur jam ad determinationem distantiarum planetae a sole.

14. In hunc finem evolvamus primo coordinatas rectangulas $x\,y$ puncti cujusque ellipseos, supposito foco pro initio et distantia maxima pro axe abscissarum x. Jam si per e designemus excentricam anomaliam, habebimus

$$\frac{x}{a} = \frac{r}{a}\cos.\omega = \frac{\frac{r}{a} - 1 + \varepsilon^2}{\varepsilon} = \varepsilon + \cos.e$$

$$\frac{y}{a} = \frac{r}{a}\sin.\omega = (1 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}.\sin.e$$

ubi a axem dimidium majorem designat.

Ut autem valores quantitatum $\cos.e$ et $\sin.e$ per anomaliam mediam m exprimantur, erit virtute aequationis notissimae $m = e + \varepsilon\sin.e$ secundum problema D^ni^ *Lagrange*

$$\cos.e = \cos.m + \varepsilon\sin.^2 m - \frac{\varepsilon^2}{1.2}.\frac{\partial.\sin 3m}{\partial m} + \frac{\varepsilon^3}{1.2.3}.\frac{\partial^2.\sin.4m}{\partial m^2} - \ldots$$

et eodem modo

$$\sin.e = \sin.m - \varepsilon\sin.m\cos.m + \frac{\varepsilon^2}{1.2.\partial m}.\partial(\sin.^2 m\cos.m)$$
$$- \frac{\varepsilon^3}{1.2.3.\partial m^2}.\partial^2(\sin.^3 m\cos.m) + \ldots$$

quarum serierum termini generales sunt

$$\frac{\varepsilon^{n-1}}{1.2.3\ldots n-1}.\frac{\partial^{n-2}.\sin.^n m}{\partial m^{n-2}} \quad \text{et} \quad \frac{\varepsilon^n}{1.2.3\ldots n}.\frac{\partial^{n-1}.(\sin^n m\cos.m)}{\partial m^{n-1}}.$$

Ad evolvendam primam expressionem habemus

$$2^n\cos.^n x = \cos.nx + n\cos.(n-2)x + \frac{n.n-1}{1.2}\cos.(n-4)x + \ldots$$

unde sequitur, si $(n-2)$ est numerus par

$$\pm 2^n.\frac{\partial^{n-2}.\cos.^n x}{\partial x^{n-2}} = n^{n-2}\cos.nx + \frac{n}{1}(n-2)^{n-2}\cos.(n-2)x$$
$$+ \frac{n.n-1}{1.2}(n-4)^{n-2}\cos.(n-4)x + \ldots$$

signum superius, si $(n-2)$ formam $2(2p)$ et inferius, si $(n-2)$ formam $2(2p+1)$ induit. Si autem $(n-2)$ est numerus impar, habebitur

$$\pm 2^n.\frac{\partial^{n-2}.\cos.^n x}{\partial x^{n-2}} = n^{n-2}\sin.nx + \frac{n}{1}(n-2)^{n-2}\sin.(n-2)x$$
$$+ \frac{n.n-1}{1.2}(n-4)^{n-2}\sin.(n-4)x + \ldots$$

signum superius vel inferius, prout $(n-2)$ erit $2(2p+1)+1$ vel $2(2p)+1$.

Posito jam $x = 90^\circ - m$ assumtaque pro libitu quacumque harum quatuor expressionum e. g. tertia, ubi $(n-2) = 2(2p+1)+1$, erit

$$\frac{2^n \cdot \partial^{n-2} \cdot \cos^n x}{\partial x^{n-2}} = - \frac{2^n \partial^{n-2} \sin.^n m}{\partial m^{n-2}}$$

$$= n^{n-2} \sin. n(90-m) + \frac{n}{1}(n-2)^{n-2} \sin.(n-2)(90-m) + \ldots$$

cum autem $(n-2) = 2(2p+1)+1$ vel $= 3$ vel 7 vel 11 et erit n vel 5 vel 9 vel 13 unde facile concluditur

$$\sin. n (90 - m) = \cos. nm$$

$$\sin. (n-2)(90-m) = -\cos. (n-2) m$$

$$\sin. (n-4)(90-m) = \cos. (n-4) m \text{ et quocirca}$$

$$\frac{\varepsilon^{n-1}}{1.2.3..n-1} \cdot \frac{\partial^{n-2}.\sin.^n m}{\partial m^{n-2}} = \frac{-\varepsilon^{n-1}}{1.2.3..n-1.2^n} \cdot \left\{ \begin{array}{l} n^{n-2}\cos. nm - \frac{n}{1}(n-2)^{n-2}\cos.(n-2)m \\ + \frac{n.n-1}{1.2}(n-4)^{n-2}\cos.(n-4)m - \end{array} \right\}$$

hinc absque negotio invenitur

$$\frac{x}{r} = \varepsilon + \cos. e = \cos. m - \frac{\varepsilon}{1.2} (\cos. 2m - 3)$$
$$+ \frac{\varepsilon^2}{1.2.2^2} (3 \cos. 3m - 3 \cos. m)$$
$$- \frac{\varepsilon^3}{1.2.3\,2^3} (4^2 \cos. 4m - 4 \,.\, 2^2 \cos. 2m)$$
$$+ \frac{\varepsilon^4}{1.2.3\,4.2^4} (5^3 \cos. 5m - 5 \,.\, 3^3 \cos. 3m + 10 \cos. m) -$$

ubi lex progressionis aperta est.

Eadem ratione pro expressione altera y inveniemus

$$2^{n+1} \sin.^n m \cos. m = [\sin.(n+1)m + \sin.(n-1)m]$$
$$- \frac{n}{1} [\sin.(n-1)m + \sin.(n-3)m]$$
$$+ \frac{n.n-1}{1.2} [\sin.(n-3)m + \sin.(n-5)m] - .$$

Comparatis autem quartis, vel octavis vel duodecimis differentialibus hujus expressionis, erit

$$2^{n+1} \cdot \frac{\partial^{n-1} . \sin.^n m \cos m}{\partial m^{n-1}} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} [(n+1)^{n-1} \sin.(n+1)m + (n-1)^{n-1}\sin.(n-1)m] \\ - \frac{n}{1} [(n-1)^{n-1}\sin.(n-1)m + (n-3)^{n-1}\sin.(n-3)m] \\ + \frac{n.n-1}{1.2} [(n-3)^{n-1}\sin.(n-3)m + (n-5)^{n-1}\sin.(n-5)m] - \end{array} \right\}$$

unde facile concluditur

$$\sin. e = \sin. m - \frac{\varepsilon}{2} \sin. 2m + \frac{\varepsilon^2}{1.2.2^2} (3 \sin. 3m - \sin. m)$$
$$- \frac{\varepsilon^3}{1.2.3.2^3} (4^2 \sin. 4m - 8 \sin. 2m)$$
$$+ \frac{\varepsilon^4}{1.2.3.4.2^4} (5^3 \sin. 5m - 3^4 \sin. 3m + 2 \sin. m) -$$

cujus seriei lex ope expressionis praecedentis generalis aperta est. Invento autem valore sin. e, confestim habebitur

$$\frac{y}{a} = (1 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} . \sin. e = \sin. m - \frac{\varepsilon}{2} \sin. 2m$$
$$+ \frac{\varepsilon^2}{2^3} (3 \sin. 3m - 5 \sin. m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (4 \sin. 4m - 5 \sin. 2m)$$
$$+ \frac{\varepsilon^4}{3.2^7} (5^3 \sin. 5m - 153 \sin. 3m - 22 \sin. m) -$$

Quaeramus nunc valores quantitatum X, Y (§. 4.) pro epicylis.

Posito, ut supra, $a = m$, $b = 2m$, $c = 3m$ vel quod eodem redit $b' = b'' = b''' \ldots = 180 - m$ erit (§. 4.)

$$X = \alpha + (1 + \beta) \cos. m + \gamma \cos. 2m + \delta \cos. 3m$$
$$Y = \sin. m - \beta \sin. m - \gamma \sin. 2m - \delta \sin. 3m -$$

Posito jam $\frac{x}{a} = X$ erit $\alpha = -\frac{3}{2}\varepsilon$

$\beta = -\frac{3}{8}\varepsilon^2 +$

$\gamma = -\frac{\varepsilon}{2} \quad +$

et posito $\frac{y}{a} = Y$ erit $\beta = \frac{5}{8}\varepsilon^2$

$\gamma = \frac{\varepsilon}{2} +$

qui valores sibi invicem contradicunt, unde sequitur, coordinatas x y ellipticas per epicyclorum hypothesin exprimi non posse, prorsus eodem modo, ut jam supra pro unico epicyclo inventum fuerat.

15. Supra inventus fuerat valor quantitatis r^2 § 6, qui posito $a = m$, $b = 2m$, $c = 3m$ abit in sequentem expressionem simplicissimam

$$r^2 = 1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 + \\ + 2(\alpha + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\varepsilon +) \cos. m \\ + 2(\beta + \alpha\gamma + \beta\delta + \gamma\varepsilon +) \cos. 2m \\ + 2(\gamma + \alpha\delta + \beta\varepsilon +) \cos. 3m \\ + 2(\delta + \alpha\varepsilon +) \cos. 4m \\ + 2(\varepsilon +) \cos. 5m \,.$$

Jam si quis amat loco coordinatarum comparationem ipsorum radiorum in medium afferc, habebit pro motu eliptico

$$r^2 = 1 + \tfrac{\varepsilon^2}{2} + 2\,\varepsilon \cos. e + \tfrac{\varepsilon^2}{2} \cos. 2\,e$$

Supra autem habuimus

$$\cos. e = \cos. m - \frac{\varepsilon}{1\,.\,2}(\cos. 2m - 1) + \frac{\varepsilon^2}{1\,.\,2\,.\,2^2}(3\cos. 3m - 3\cos. m) -$$

cujus seriei terminus generalis est secundum ea quae praecedunt,

$$\frac{\pm\,\varepsilon^n}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,n\,.\,2^{n+1}}\left\{\begin{array}{l}(n+1)^{n-1}\cos.(n+1)m - \frac{n+1}{1}(n-1)^{n-1}\cos.(n-1)m \\ \qquad + \frac{n+1\,.\,n}{1\,.\,2}(n-3)^{n-1}\cos.(n-3)m - \end{array}\right\}$$

ubi $n = 1, 2, 3\,.\,.$

Pro determinando autem valore quantitatis $\cos. 2e$ habebimus

$$\cos. 2\,e = \cos. 2m + 2\,\varepsilon \sin. 2m \sin. m - \frac{\varepsilon}{1\,.\,\partial m}\,\partial\,.(2 \sin. 2m \sin.^2 m) \\ + \frac{\varepsilon^3}{1\,.\,2\,.\,3\,\partial m^2}\,\partial^2\,.\,(2 \sin. 2m \sin.^3 m) - \text{etc.}$$

cujus seriei terminus generalis est

$$\pm \frac{4\,\varepsilon^n}{1\,.\,2\,.\,3 \quad n}\;.\;\frac{\partial^{n-1}\,.\,(\sin.^{n+1} m\,.\,\cos\, m)}{\partial m^{n-1}}\,.$$

Ex his autem, quae §. 14 allata sunt, facile concludimus fore.

$$-\,2^{n+2}\,.\,\frac{\partial^{n+2}\,.\,\sin.^{n+1} m \cos. m}{\partial m^{n+2}} = \\ = \left\{\begin{array}{l}[(n+2)^{n+2}\sin.(n+2)m + n^{n+2}\sin. nm] \\ -\frac{n+1}{1}[n^{n+2}\sin. nm + (n-2)^{n+2}\sin.(n-2)m] \\ + \frac{n+1\,.\,n}{1\,.\,2}[(n-2)^{n+2}\sin.(n-2)m + (n-4)^{n+2}\sin.(n-4)m +\end{array}\right\}$$

unde triplici integratione adhibita sequitur

$$-2^{n+2}\iiint\frac{\partial^{n+2}.(\sin.^{n+1}m.\cos.m)}{\partial m^{n+2}}=-2^{n+2}.\frac{\partial^{n-1}.(\sin.^{n+1}m.\cos.m)}{\partial m^{n-1}}$$

$$=[(n+2)^{n-1}\cos.(n+2)m+n^{n-1}\cos.nm]$$

$$-\frac{n+1}{1}[n^{n-1}\cos.nm+(n-2)^{n-1}\cos.(n-2)m]$$

$$+\frac{n+1.n}{1.2}[(n-2)^{n-1}\cos.(n-2)m+(n-4)^{n-1}\cos.(n-4)m]$$

unde nullo negotio derivatur cos. $2e$. Substitutis nunc valoribus inventis cos. e et cos. $2e$ in aequatione data

$$r^2=1+\frac{\varepsilon^2}{2}+2\varepsilon\cos.e+\frac{\varepsilon^2}{2}\cos.2e,$$

habebimus

$$r^2=1+2\varepsilon\cos.m+\frac{\varepsilon^2}{2}(1-\cos.2m)$$

$$\pm\frac{\varepsilon^{n+1}}{1.2.3\,..\,n.2^n}\left\{\begin{array}{l}(n+1)^{n-1}\cos.(n+1)m-\frac{n+1}{1}(n-1)^{n-1}\cos.(n-1)m\\ \quad+\frac{n+1.n}{1.2}(n-3)^{n-1}\cos.(n-3)m-\end{array}\right\}$$

$$\pm\frac{\varepsilon^{n+2}}{1.2.3\,..\,n.2^{n+1}}\left\{\begin{array}{l}n^{n-1}\cos.nm-\frac{n+1}{1}(n-2)^{n-1}\cos.(n-2)m\\ \quad+\frac{n+1.n}{1.2}(n-4)^{n-1}\cos.(n-4)m-\end{array}\right\}$$

$$\pm\frac{\varepsilon^{n+2}}{1.2.3\,..\,n.2^{n+1}}\left\{\begin{array}{l}(n+2)^{n-1}\cos.(n+2)m-\frac{n+1}{1}(n)^{n-1}\cos.nm\\ \quad+\frac{n+1.n}{1.2}(n-2)^{n-1}\cos.(n-2)m-\end{array}\right\}$$

ubi $n=1,\ 2,\ 3\,..$

Evolutis revera primis hujus expressionis terminis, ponendo $n=1,\ 2\ ..$ habebimus

$$r^2=1+2\varepsilon\cos.m-\frac{\varepsilon^2}{2}(\cos.2m-3)+\frac{\varepsilon^3}{4}(\cos.3m-\cos.m)$$

$$-\frac{\varepsilon^4}{6}(\cos.4m-\cos.2m)+$$

quae eadem aequatio obtinebitur sumendo quadratum expressionis notissimae ipsius r.

Comparatis jam his binis valoribus quantitatis r^2, habemus aequationes sequentes

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{3\varepsilon^2}{2}$$
$$\alpha + \alpha\beta = \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{8}$$
$$\beta + \alpha\gamma = -\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^4}{12}$$
$$\gamma = \frac{\varepsilon^3}{8}$$
$$\delta = -\frac{\varepsilon^4}{12}$$

quae aequationes longe absunt, quin eosdem ut in §. 13 valores quantitatum α, β, γ . . producant, imo jam ita comparatae sunt, ut ne solae quidem, sine respectu ad priores consideratae, simul consistere possint. Distantias proinde ellipticas ope quantumvis epicyclorum exhibere non valemus.

16. Coordinatae ellipticae §. 14. inventae, cum maximis variationibus sint obnoxiae, si ε quantitatem non prorsus minimam designat, ad alium axem transferri possunt, ubi multo minores mutationes patiantur.

Accepto nimirum novo abscissarum axe in ea linea recta, quae centrum solis cum centro planetae *mediae* conjungit vocatisque novis coordinatis ξ et v, confestim colligimus

$$\xi = x \cos. m + y \sin. m$$
$$v = y \cos. m - x \sin. m.$$

Substitutis autem valoribus antea inventis quantitatum x et y, habebitur

$$\xi = 1 + \varepsilon \cos. m + \frac{\varepsilon^2}{2}(\cos. 2m - 1) - \frac{3\varepsilon^3}{8}(\cos. 3m - \cos. m)$$
$$+ \frac{\varepsilon^4}{3 \cdot 2^6}(67 \cos. 4m - 64 \cos. 2m - 3)$$
$$v = -2\varepsilon \sin. m + \frac{\varepsilon^2}{4} \sin. 2m - \frac{\varepsilon^3}{24}(7 \sin. 3m - 9 \sin. m)$$
$$+ \frac{\varepsilon^4}{3 \cdot 2^5}\left(29 \sin. 4m - 40 \sin. 2m\right).$$

Easdem quantitates, sed via prorsus diversa, deducit ill. Euler (Acta Acad. Sc. Petrop. ann. 1778 pars II.) per integrationem aequationum differentialium secundi gradus. Cum autem valores

quantitatum ξ et v ibi inventi a nostris jam in termino tertio diversi, nostrique duplici calculo probati sint, formulas citatas iterato examini subjiciendas esse putamus, id quod ill. auctori eo minus est vitio vertendum, cum in disquisitione sua non tam veros harum coordinatarum valores, quam novam eamque revera acutissimam methodum aequationes mechanicas secundi gradus per approximationem integrandi docere voluerit.

17. Pro loco *aequationis centri maximae* erit $\partial . (m - \omega) = 0$ vel $\partial . \text{tang.} \Delta = 0$

Posito proinde differentiali aequationis primae (§. 9) $= 0$ habebitur.

$$
\begin{aligned}
0 = \alpha^2 &+ 2\beta^2 + 3\gamma^2 + 4\delta^2 + 5\varepsilon^2 + \\
&+ (\alpha + 3\alpha\beta + 5\beta\gamma + 7\gamma\delta + 9\delta\varepsilon +) \cos. m \\
&+ (2\beta + 4\alpha\gamma + 6\beta\delta + 8\gamma\varepsilon +) \cos. 2m \\
&+ (3\gamma + 5\alpha\delta + 7\beta\varepsilon + 9\gamma\zeta +) \cos. 3m \\
&+ (4\delta + 6\alpha\varepsilon + 8\beta\zeta +) \cos. 4m +
\end{aligned}
$$

ubi lex seriei perspicua est.

18. Simili ratione pro loco planetae in orbita, in quo longitudo ejus stationaria est erit $\partial . \text{tang.} \Phi = 0$ unde absque negotio colligitur

$$
\begin{aligned}
1 = \beta^2 &+ 2\gamma^2 + 3\delta^2 + 4\varepsilon^2 + \\
&- (\alpha - \alpha\beta - 3\beta\gamma - 5\gamma\delta - 7\delta\varepsilon - 9\varepsilon\zeta -) \cos. m. \\
&+ (2\alpha\gamma + 4\beta\delta + 6\gamma\varepsilon + 8\delta\zeta +) \cos. 2m \\
&+ (\gamma + 3\alpha\delta + 5\beta\varepsilon + 7\gamma\zeta +) \cos. 3m \\
&+ (2\delta + 4\alpha\varepsilon + 6\beta\zeta +) \cos. 4m \\
&+ (3\varepsilon + 5\alpha\zeta +) \cos. 5m +
\end{aligned}
$$

Ex qua aequatione omnia, quae hucusque de statione et retrogradatione a diversis auctoribus prolata sunt, deducuntur. Assumto e. g. unico epicyclo erit $\beta = \gamma \ldots = 0$ et pro loco stationis $\cos. m = -\frac{1}{\alpha}$; unde patet, radium epicycli majorem esse debere radio circuli primi, ut statio locum habere possit. Assumtis autem

duobus epicyclis erit $\gamma = \delta = 0$ unde ope aequationis praecedentis invenitur pro statione

$$\cos. m = - \frac{(1+\beta)}{\alpha}.$$

Eodem modo pro tribus epicyclis

$$1 - \beta^2 - 2\gamma^2 + (\alpha - \alpha\beta - 3\beta\gamma)\cos. m - 2\alpha\gamma \cos. 2m - \gamma \cos. 3m = 0$$

et ita porro pro quovis epicyclorum numero, revolutionibus omnium aequalibus assumtis. Si autem, ut in §. 13. $t = nt' = n't'' = n''t''' \ldots$ habebimus pro uno epicyclo

$$0 = 1 + (1-n)\alpha^2 + (2-n)\alpha \cos. nm \text{ unde } \cos. nm = \frac{1-(n-1)\alpha^2}{(n-2)\alpha}.$$

Pro duobus epicyclis

$$0 = 1 + (1-n)\alpha^2 + (1-n-n')\beta + (2-n)\alpha \cos. nm$$
$$+ (2-n-n')\beta \cos.(n+n')m + (2-2n-n')\alpha\beta \cos. n'm$$

pro tribus

$$0 = 1 + (1-n)\alpha^2 + (1-n-n')\beta^2 + (1-n-n'-n'')\gamma^2$$
$$+ (2-n)\alpha \cos. nm \qquad + (2-2n-n')\alpha\beta \cos. n'm$$
$$+ (2-n-n')\beta \cos.(n+n')m \ldots \qquad + (2-2n-n'-n'')\alpha\gamma \cos.(n'+n'')m$$
$$+ (2-n-n'-n'')\gamma \cos.(n+n'+n'')m \qquad + (2-2n-2n'-n'')\beta\gamma \cos.(n''m)$$

quae aequationes, posito $n = n' = n'' \ldots$ in praecedentes abibunt.

19. Superest, ut de curvis a centro epicycli ultimi descriptis agamus, quas autem, cum jam saepius ab aliis consideratae sint, hic consultius praetereundas esse censeo, ne, quod initio paucis absolvere animus fuerat calamo currente praescriptos fines longe excedat.

Cornidis loco quaeramus superficiem rotatione circuli ortam, cujus centrum in peripheria secundi circuli movetur. Aequationem hujus superficiei duplici modo assequi possumus.

Patet enim *primo*, eam tanquam revolutione ortam considerari posse. Vocatis proinde $x = Az$, $y = Bz$ aequationibus axis rotationis, habebimus (vide Monge appl. de l'analyse)

$$\left.\begin{array}{l} Ax + By + z = \alpha \\ x^2 + y^2 + z^2 = \Phi\alpha \end{array}\right\}$$

ubi $\Phi\,\alpha$ functionem quantitatis arbitrariae α designat.

Quae aequationes, si cum binis illis, quae curvam rotantem exprimunt, conjungantur, sufficiunt ad problematis solutionem. Sit jam, ut rem nostram paulo generalius consideremus, curva rotans ellipsis in plano xz sita, cujus semiaxes a et b et distantia centri ab initio coordinatarum c, unde aequationes ellipseos

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ a^2 b^2 = b^2 z^2 + a^2 (x - c)^2 \end{array}\right\}$$

Positis autem $A = B = 0$ h. e. axe rotationis coincidente cum axe ordinatae z, erit eliminandis quanitatibus x, y, z

$$a^2 b^2 = b^2 \alpha^2 + a^2 (\sqrt{\Phi\,\alpha - \alpha^2} - c)^2.$$

Substitutis autem in ultima aequatione pro α et $\Phi\alpha$ valoribus datis z et $x^2 + y^2 + z^2$ erit aequatio superficiei quaesita

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - c)^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} z^2 \;\; . \; . \; (I).$$

Methodus secunda. Aequatio superficiei, rotatione ellipseos circa axem ipsius z ortae est $a^2 (x^2 + y^2) + b^2 z^2 = a^2 b^2$, quae, si centrum corporis in curva data horizontali, cujus coordinatae sunt $x' = u$ et $y' = fu$, incedit, pro situ quovis centri moti in hanc abit

$$a^2 (x - u)^2 + a^2 (y - fu)^2 + b^2 z^2 = a^2 b^2 \;\; . \; . \; (A).$$

Jam si corpus motum, quoad formam externam, invariatum maneat, centrum corporis autem in curva data quantitate $\sqrt{\partial u^2 + (\partial \,.\, fu)^2}$ translatum supponamus, erit pro novo centri loco aequatio superficiei

$$x - u + (y - fu) \,.\, \frac{\partial \,.\, fu}{\partial u} = 0 \;\; . \; . \; (B).$$

Eliminata autem quantitate u ex aequationibus A et B aequatio resultans non nisi superficiem ipsam a corpore moto in omnibus centri punctis descriptam exprimere potest. Posita peoinde curvae ho-

rizontalis aequatione $y^2 + x^2 = c^2$ erit $(fu)^2 + u^2 = c^2$ et $\frac{\partial . fu}{\partial u} = \frac{-u}{\sqrt{c^2 - u^2}}$ quibus in aequationibus A, B substitutis eliminataque quantitate u, habebitur

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - c)^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} z^2$$ prorsus ut antea.

Superficies ista, hucusque nondum considerata, pluribus notatu dignis proprietatibus gaudet. Cum e. g. pro illa habeatur

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) . \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2,$$

superficies nostra in earum numerum est referenda, quas Galli vocant *des surfaces développables*, id quod a priori haud quisquam expectasset.

DE SUMMATIONE SERIERUM.

AUCTORE

LITTROW.

Conventui exhibuit die 7 Augusti 1814.

Quamprimum anteriora tantum aliquis analyseos limina salutaverit, nullo fere negotio ipsoque currente, ut dicunt, calamo ad novas easdemque subinde elegantissimas series deduci solet, ut quivis vel tantillum his in rebus versatus propria edoctus experientia satis superque notum habebit. Hae autem argumento tractando fere semper alienae digressiones, quamvis et amoenitate et etiam facilitate, qua inveniuntur, animum auctoris lectorisque delectant, ita ut nonnunquam difficile sit iis non diutius inhaerere, tamen, quod omnino dolendum, usu practico plerumque carere solent, cum saepissime non nisi casus perquam singulares tractant, quorum in aliis occupationibus applicatio rarissime tantum occurrere solet. Quo autem hujus generis disquisitiones utiliores reddantur, necesse est, ut maxima qua fieri potest generalitate instituantur, non unam aliamve progressionem singularem tractando, sed totas serierum, si ita loqui fas est, familias simul complectendo. Exempla hujus rei multifaria nostri commentarii suppeditant, in quibus a primo statim initio serierum doctrina feliciter exculta atque adaucta est, ita quidem, ut, qualem serierum theoria progressum eorum auctoribus, praeprimis autem illustr. *Eulero Fussioque* debeat, nemo jam ignorare possit. Hic autem meminisse sufficiet commentationis perfectissimae *Euleri* (Calc. differ. Pars II. cap. 5. 6. 7. 8), qua summas serierum hac forma generali

$$1 \pm 2^r \pm 3^r \pm 4^r \pm$$

contentarum exhibuit, designante r numerum quemcunque integrum

vel positivum vel negativum. Observavit autem ill. auctor §. 152, summas harum serierum dari non posse, si r numerum integrum negativum imparem denotat easque a nova hucusque incognita quantitate transcendente dependere. Quae adnotatio hanc quantitatem transcendentem incognitam alia prorsus via quaerendi simulque totius commentationis sequentis ulterius exarandae occasionem praebuit.

Majoris commoditatis causa totum negotium duabus sectionibus eo quo inventae sunt ordine absolvam, in quarum *prima* investigabitur, qua ratione angulus quicunque datus per ejusdem sinus exprimi possit, ubi videbimus, innumerabiles series quamvis non omnes convergentes huic problemati satisfacturas, quarum una simplicissima omnium viam sternit ad disquisitiones sectionis *secundae*, in qua summae serierum formae sequentis

$$\begin{matrix}\sin.\\ \cos.\end{matrix}\Big\rangle\, a \pm 2^r \begin{matrix}\sin.\\ \cos.\end{matrix}\Big\rangle\, 2a \pm 3^r \begin{matrix}\sin.\\ \cos.\end{matrix}\Big\rangle\, 3a \pm 4^r \begin{matrix}\sin.\\ \cos.\end{matrix}\Big\rangle\, 4a \pm$$

exhibentur, quae series priores *Eulerianas* tanquam casus singulares continent methodumque perfacilem suppeditant quantitatis istius transcendentis exprimendae.

His demum coronidis loco in sectione *tertia* series quasdam maxime memorabiles addam, quae ex generalibus sectionum praecedentium expressionibus sponte fluunt.

Sectio prima.

Expressio anguli cujuslibet per ejusdem sinus.

1. Simplicissima methodus hujus problematis solvendi, quaeque primo statim intuitu sese ultro offert, ex integratione aequationis

$$\partial a = \frac{\partial . \sin a}{\sqrt{1 - \sin.^2 a}}$$

petitur. Evoluta nimirum quantitate $(1 - \sin.^2 a)^{-\frac{1}{2}}$ riteque peractis partium singularum integrationibus habebitur

$$a = \sin. a + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sin.^3 a + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 2^2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \sin.^5 a + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^3} \cdot \frac{1}{7} \cdot \sin.^7 a +$$

vel etiam, sinus angulorum multiplorum adhibendo.

$$a = \sin. a$$
$$+ \frac{1}{1 \cdot 2^3 \cdot 3} (3 \sin. a - \sin. 3a)$$
$$+ \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 2^6 \cdot 5} \left(\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \sin. a - \frac{5}{1} \sin. 3a + \sin. 5a\right)$$
$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^9 \cdot 7} \left(\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin. a - \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} \sin. 3a + \frac{7}{1} \sin. 5a - \sin. 7a\right)$$
$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^{12} \cdot 9} \left(\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin. 3a + \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} \sin. 5a - \frac{9}{1} \sin. 7a + \sin. 9a\right) + \ldots$$

quibus ut notissimis non inhaerebo.

2. Jam, ut rem nostram alia via aggrediamur, ponatur

$$\text{tang. } x = \frac{\sin. a}{1 + \cos. a}$$

quaeraturque valor quantitatis x.

Posito log. nat. $e = 1$, aequatio nostra sequentem induit formam

$$\frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{e^{2x\sqrt{-1}} + 1} = \frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{2 + e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}}$$

unde habebitur

$$e^{2x\sqrt{-1}} = \frac{1 + e^{a\sqrt{-1}}}{1 + e^{-a\sqrt{-1}}}$$

et hinc, sumtis logarithmis,

$$2x\sqrt{-1} = e^{a\sqrt{-1}} - \frac{1}{2} e^{2a\sqrt{-1}} + \frac{1}{3} e^{3a\sqrt{-1}} - \ldots$$
$$- e^{-a\sqrt{-1}} + \frac{1}{2} e^{-2a\sqrt{-1}} - \frac{1}{3} e^{-3a\sqrt{-1}} + \ldots$$

unde statim colligitur

$$x = \sin a - \frac{1}{2} \sin. 2a + \frac{1}{3} \sin. 3a - \frac{1}{4} \sin. 4a + \ldots$$

Ast cum sit $\frac{\sin. a}{1 + \cos. a} = \text{tg.} \frac{a}{2}$ erit $x = \frac{a}{2}$ et hinc

$$\frac{a}{2} = \sin. a - \frac{1}{2} \sin. 2a + \frac{1}{3} \sin. 3a - \frac{1}{4} \sin. 4a + \ldots \quad \text{(I)}$$

quae est altera problematis nostri solutio.

I. Posito $a = 90^\circ$, aequatio (I) inventa praebet sequentem

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - {}^{1} +$$

series notissima Leibnitii.

Pro $a = 60^\circ$ erit

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \quad \text{vel}$$

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{10 \cdot 11} + .$$

quam seriem ill. *Euler* (Introd. in anal. infinitorum Lib. I. cap. X) protulit.

Pro $a = 45^\circ$ est

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \right] - \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \right].$$

Invenit autem *Euler* loc. cit. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} +$ quod cum $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} -$ conjunctum, seriem nostram producit.

3. Methodus in §. praecedenti adhibita in problemate nostro solvendo quam maximi est momenti moxque videbimus, eam multo latius patere et paucis tantum adhibitis mutationibus etiam ad formulam quam maxime generalem

$$\text{tang.}\, x = \frac{\alpha \sin. a + \beta \sin. b + \gamma \sin. c + \delta \sin. d + \text{etc.}}{1 + \alpha \cos. a + \beta \cos. b + \gamma \cos. c + \delta \cos. d + \text{etc.}}$$

applicari posse. Quod quo clarius demonstretur, necesse est duo lemmata alioquin inventa non difficilia in auxilium vocare.

Lemma I.

4. Sit $\log. \text{nat.} (1 + \alpha x + \beta x^2) = A + \frac{B}{2}x + \frac{C}{4}x^2 + \frac{D}{6}x^3 +$ quaerantur valores quantitatum A, B, C . .

Solutio.

Differentiando aequationem datam obtinemus

$$\frac{2(\alpha + 2\beta x)}{1 + \alpha x + \beta x^2} = B + Cx + Dx^2 + Ex^3 +$$

unde, multiplicata altera hujus expressionis parte per $1 + \alpha x + \beta x^2$ habebuntur aequationes conditionales sequentes

$$\begin{aligned} B &= 2\alpha \\ -C &= \alpha B - 4\beta \\ -D &= \alpha C + \beta B \\ -E &= \alpha D + \beta C \\ -F &= \alpha E + \beta D \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

vel denique iteratis substitutionibus

$$B = 2\alpha$$
$$C = -2\alpha^2 + 4\beta$$
$$D = 2\;{}^3 - 6\alpha\beta$$
$$E = -2\alpha^4 + 8\alpha^2\beta - 4\beta^2$$
$$F = 2\alpha^5 - 10\alpha^3\beta + 10\alpha\beta^2$$
$$G = -2\;{}^6 + 12\alpha^4\beta - 18\alpha^2\beta^2 + 4\beta^3 \text{ etc.}$$

ubi lex progressionis aperta. Quantitas prima A, ut aliunde constat, evanescit.

I. Quodsi aequatio data sit

$$\log.(1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 +) = A + \tfrac{B}{2}x + \tfrac{C}{4}x^2 +$$

numero terminorum in infinitum excrescente, adhibita eadem methodo facile invenitur

$$A = 0$$
$$B = 2\alpha$$
$$C + B\alpha = 4\beta$$
$$D + C\alpha + B\beta = 6\gamma$$
$$E + D\alpha + C\beta + B\gamma = 8\delta$$
$$F + E\alpha + D\beta + C\gamma + B\delta = 10\varepsilon \text{ etc.}$$

Lemma II.

5. Data aequatione

$$\text{tang. } x = \frac{\alpha \sin. a + \beta \sin. 2\alpha}{1 + \alpha \cos. a + \beta \cos. 2a}$$

invenire valorem quantitatis x.

Solutio.

Cum aequatio data, sumto log. nat. $e = 1$, in sequentem abeat,

$$e^{2x\sqrt{-1}} = \frac{1 + \alpha e^{a\sqrt{-1}} + \beta e^{2a\sqrt{-1}}}{1 + \alpha e^{-a\sqrt{-1}} + \beta e^{-2a\sqrt{-1}}}$$

erit, sumtis hinc et inde logarithmis

$$2x\sqrt{-1} = \log.(1 + \alpha e^{a\sqrt{-1}} + \beta e^{2a\sqrt{-1}}) - \log.(1 + \alpha e^{-a\sqrt{-1}} + \beta e^{-2a\sqrt{-1}}).$$

Evolutis autem ambobus logarithmis ope lemmatis primi, substituendo nimirum $e^{a\sqrt{-1}}$ et $e^{-a\sqrt{-1}}$ loco quantitatis x, habe-

bitur, retentis significationibus quantitatum B, C, D . . supra datis

$$2x\sqrt{-1} = \frac{B}{2}e^{a\sqrt{-1}} + \frac{C}{4}e^{2a\sqrt{-1}} + \frac{D}{6}e^{3a\sqrt{-1}} + \\ - \frac{B}{2}e^{-a\sqrt{-1}} - \frac{C}{4}e^{-2a\sqrt{-1}} - \frac{D}{6}e^{-3a\sqrt{-1}} -$$

unde confestim concluditur fore

$$x = \frac{B}{2}\sin. a + \frac{C}{4}\sin. 2a + \frac{D}{6}\sin. 3a +$$

I. Quodsi etiam hic terminis in infinitum excurrentibus assumatur

$$\text{tang.}\, x = \frac{\alpha \sin. a + \beta \sin. 2a + \gamma \sin. 3a + \text{etc.}}{1 + \alpha \cos. a + \beta \cos. 2a + \gamma \cos. 3a + \text{etc.}}$$

eodem modo invenietur

$$x = \frac{B}{2}\sin. a + \frac{C}{4}\sin. 2a + \frac{D}{6}\sin. 3a +$$

ubi autem determinandis valoribus quantitatum B, C, D . . inservient aequationes sequentes

$$B = 2\alpha$$
$$C + B\alpha = 4\beta$$
$$D + C\alpha + B\beta = 6\gamma$$
$$E + D\alpha + C\beta + B\gamma = 8\delta \quad \text{etc.}$$

eaedem quae jam in fine §. 4. datae sunt.

6. Quibus expositis detur jam aequatio

$$\text{tang.}\, x = \frac{\alpha \sin. a}{1 + \alpha \cos. a}$$

quae cum aequatione §. 5. collata dabit, positis $\beta = \gamma = \delta \ldots = 0$

$$x = \alpha \sin. a - \tfrac{1}{2}\alpha^2 \sin. 2a + \tfrac{1}{3}\alpha^3 \sin. 3a - \tfrac{1}{4}\alpha^4 \sin. 4a + .$$

Substituto autem valore dato ipsius tang. x in aequatione

$$\text{tg.}\,(a - x) = \frac{\text{tg.}\, a - \text{tg.}\, x}{1 + \text{tg}\, a\, \text{tg.}\, x} \quad \text{habebitur}$$

$$\text{tg.}\,(a - x) = \frac{\sin. a}{\alpha + \cos. a}$$

quae aequatio, ejusdem cum superiori formae, si cum expressione generali §. 5. comparetur, exhibet $\alpha = \frac{1}{\alpha}$, $\beta = \gamma \ldots = 0$ unde sequitur

$$a - x = \frac{1}{\alpha}\sin. a - \frac{1}{2\alpha^2}\sin. 2a + \frac{1}{3\alpha^3}\sin. 3a - \frac{1}{4\alpha^4}\sin. 4a + .$$

Eliminata jam quantitate x ope duarum serierum inventarum prodit

$$a = \frac{1+\alpha^2}{\alpha} \sin. a - \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\alpha^4}{\alpha^2} \sin. 2a + \frac{1}{3} \cdot \frac{1+\alpha^6}{\alpha^3} \sin. 3a -$$

quae est tertia nostri problematis solutio.

I. In ultima expressione quantitas α prorsus arbitraria remanet ita ut pro illa quamcunque quantitatem pro libitu substituere liceat.

Sumto $\alpha = 1$ erit

$$\frac{a}{2} = \sin. a - \frac{1}{2} \sin. 2a + \frac{1}{3} \sin. 3a -$$

quae series jam in secunda problematis solutione (§. 2.) inventa fuerat.

II. Terminus generalis seriei inventae est $\frac{1+\alpha^{2n}}{\alpha^n} \cdot \sin. na$. Posito autem differentiale quantitatis $\frac{1+\alpha^{2n}}{\alpha^n}$ nihilo aequali, obtinebitur $\alpha^{2n} - 1 = 0$, unde pro determinando valore minimo quantitatis $\frac{1+\alpha^{2n}}{\alpha^n}$ habebimus $\alpha^n + 1 = 0$ vel $\alpha^n - 1 = 0$ et hinc sequitur, seriem datam non nisi pro $\alpha = \pm 1$ fore convergentem, siquidem pro α tantum qantitates integras substituere velimus (*Euler* Introd. in anal. infin. cap. IX.).

7. Tota proinde methodi nostrae vis in eo sita est, quod dato valore quantitatis tg. x ope aequationis

$$\text{tg.}\, x = \frac{\alpha \sin. a}{1 + \alpha \cos. a}$$

valor quantitatis tg. $(a - x)$, nimirum

$$\text{tg.}\, (a - x) = \frac{\frac{1}{\alpha} \sin. a}{1 + \frac{1}{\alpha} \cos. a}$$

ejusdem cum praecedenti formae esse debeat. His duabus autem exceptis nulla alia mutatio idem praestare poterit, id quod jam exinde sequitur, quod in genere habeatur

$$\text{tg.}\, (ma - x) = \frac{\sin. ma + \alpha \sin. (m-1)a}{\cos. ma + \alpha \cos. (m-1)a}.$$

8. Methodus hucusque in usum vocata eodem modo etiam ad aequationes ordinis superioris cujuscunque applicari potest, ita ut

in seriem quaerendam, quae angulum a per ejusdem sinus exprimit numerus prorsus arbitrarius quantitatum indeterminatarum intrare possit. Consideretur e. g. aequatio

$$\text{tg.}\, x = \frac{\alpha \sin. a + \beta \sin. 2a}{1 + \alpha \cos. a + \beta \cos. 2a} \quad \ldots \text{(A)}$$

unde ope lemmatis secundi (§. 5.) obtinebitur

$$\begin{aligned} x = & \; \alpha \sin. a \\ & - \left(\tfrac{\alpha^2}{2} - \beta\right) \sin. 2a \\ & + \left(\tfrac{\alpha^3}{3} - \alpha\beta\right) \sin. 3a \\ & - \left(\tfrac{\alpha^4}{4} - \alpha^2\beta + \tfrac{\beta^2}{2}\right) \sin. 4a + \text{etc.} \end{aligned}$$

Transformata autem aequatione data in sequentem

$$\text{tg.}\,(2a - x) = \frac{\frac{\alpha}{\beta} \sin. a + \frac{1}{\beta} \sin. 2a}{1 + \frac{\alpha}{\beta} \cos. a + \frac{1}{\beta} \cos. 2a}$$

quae eodem modo tractata praebebit

$$\begin{aligned} 2a - x = & \; \frac{\alpha}{\beta} \sin. a \\ & - \left(\frac{\alpha^2}{2\beta^2} - \frac{1}{\beta}\right) \sin. 2a \\ & + \left(\frac{\alpha^3}{3\beta^3} - \frac{\alpha}{\beta^2}\right) \sin. 3a - \text{etc.} \end{aligned}$$

quae series ex praecedenti deduci potest, mutatis α in $\frac{\alpha}{\beta}$ et β in $\frac{1}{\beta}$.

Eliminata jam quantitate x ope duarum serierum, habebimus omnibus rite reductis

$$2\alpha = \alpha_1 \sin. a - \alpha_2 \sin. 2a + \alpha_3 \sin. 3a - \alpha_4 \sin. 4a + \ldots \text{(A')}$$

ubi $\alpha_1 = \frac{\alpha(1+\beta)}{\beta}$

$$\alpha_2 = (\alpha^2 - 2\beta) \frac{(1+\beta^2)}{2\beta^2}$$

$$\alpha_3 = (\alpha^3 - 3\alpha\beta) \frac{(1+\beta^3)}{3\beta^3}$$

$$\alpha_4 = (\alpha^4 - 4\alpha^2\beta + 2\beta^2) \frac{(1+\beta^4)}{4\beta^4}$$

$$\alpha_5 = (\alpha^5 - 5\alpha^3\beta + 5\alpha\beta^2) \frac{(1+\beta^5)}{5\beta^5}$$

$$\alpha_6 = (\alpha^6 - 6\alpha^4\beta + 9\alpha^2\beta^2 - 2\beta^3) \frac{(1+\beta^6)}{6\beta^6} \quad \text{etc.}$$

Quoad legem progressionis, facili negotio invenietur terminus generalis

$$\alpha_n = \left\{ \begin{array}{l} \alpha^n - n\alpha^{n-2}\beta + \frac{n.n-3}{1.2}\alpha^{n-4}\beta^2 - \frac{n.n-4.n-5}{1.2.3}\alpha^{n-6}\beta^3 \\ \quad + \frac{n.n-5.n-6.n-7}{1.2.3.4}\alpha^{n-8}\beta^4 - \end{array} \right\} \frac{(1+\beta^n)}{n\beta^n}.$$

Series denique inventa (A′) praebet quartam nostri problematis solutionem, duas quantitates arbitrarias α et β involventem.

Facile autem patet, tertiam formulae (A) mutationem eodem scopo accommodatam locum habere non posse, cum posito

$$\text{tang. } x = \frac{\alpha \sin. a + \beta \sin. 2a}{1 + \alpha \cos. a + \beta \cos. 2a}$$

in genere habeatur

$$\text{tang. } (ma - x) = \frac{\sin. ma + \alpha \sin. (m-1)\alpha + \beta \sin. (m-2)a}{\cos. ma + \alpha \cos. (m-1)\alpha + \beta \cos. (m-2)a}.$$

I. Pro casu singulari $\alpha = 0$ erit $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 \ldots = 0$ et

$$\alpha_2 = -\frac{(1+\beta^2)}{\beta}, \quad \alpha_4 = \frac{(1+\beta^4)}{2\beta^2}, \quad \alpha_6 = -\frac{(1+\beta^6)}{3\beta^3} \text{ etc. etc.}$$

unde sequitur

$$a = \frac{1+\beta^2}{\beta}\sin. a - \frac{1+\beta^4}{2\beta^2}\sin. 2a + \frac{1+\beta^6}{3\beta^3}\sin. 3a -$$

quae erat tertia problematis solutio (§. 6.). Eadem denique series obtinebitur pro casu, in quo $\beta = 0$.

9. Si in expressione generali § praecedentis ponatur $\beta = 1$, obtinebimus

$$\alpha_1 = 2\alpha$$
$$\alpha_2 = \tfrac{2}{2}(\alpha^2 - 2)$$
$$\alpha_3 = \tfrac{2}{3}(\alpha^3 - 3\alpha)$$
$$\alpha_4 = \tfrac{2}{4}(\alpha^4 - 4\alpha^2 + 2)$$

et in genere

$$\alpha_n = \frac{2}{n}\left[\alpha^n - n\alpha^{n-2} + \frac{n.n-3}{1.2}\alpha^{n-4} - \frac{n.n-4.n-5}{1.2.3}\alpha^{n-6} + \frac{n.n-5.n-6.n-7}{1.2.3.4}\alpha^{n-8} - \right]$$

quorum terminorum quivis ex duobus praecedentibus hunc in modum componitur, ut sit

$$3\alpha_3 = 2\alpha_2 \cdot \alpha - \alpha_1$$
$$4\alpha_4 = 3\alpha_3 \cdot \alpha - 2\alpha_2$$
$$5\alpha_5 = 4\alpha_4 \cdot \alpha - 3\alpha_3 \text{ etc. etc.}$$

I. Pro $\alpha = 2$ erit $\frac{a}{2} = \sin.a - \frac{1}{2}\sin.2a + \frac{1}{3}\sin.3a -$ ut supra (§. 2.). Eadem series etiam invenietur, si ponatur $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, id quod jam exinde sequitur, quod in genere habeatur
$$\frac{\sin.2a}{1+\cos.2a} = \frac{2\sin a + \sin.2a}{1+2\cos.a+\cos.2a}.$$

II. Sit $\alpha = 1$, $\beta = 1$ unde sequitur fore
$$a = \sin.a + \frac{1}{2}\sin.2a - \frac{2}{3}\sin.3a + \frac{1}{4}\sin.4a + \frac{1}{5}\sin.5a - \frac{2}{6}\sin.6a$$
$$+ \frac{1}{7}\sin.7a + \frac{1}{8}\sin.8a - \frac{2}{9}\sin.9a +$$
Pro $y = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ erit
$$\frac{\pi}{2} = (1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{5}) - (\frac{1}{7} + \frac{2}{9} + \frac{1}{11}) + (\frac{1}{13} + \frac{2}{15} + \frac{1}{17}) -$$

Veritas hujus expressionis facillime sic demonstratur.
Sit $z = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{2}{9} - \frac{1}{11} +$.

Subtracta hac serie a sequenti
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{ obtinebitur}$$
$$z - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} +$$
unde sequitur fore $z - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ vel $z = \frac{\pi}{2}$ ut supra.

III. Pro $\alpha = 3$, $\beta = 1$ habebimus
$$a = 3\sin.a - \frac{7}{2}\sin.2a + \frac{18}{3}\sin.3a - \frac{47}{4}\sin.4a + \frac{123}{5}\sin.5a -;$$
Jam ut quaeratur lex progressionis 3, 7, 18, 47, 123, ponatur
$$18 = 7x + 3y$$
$$47 = 18x + 7y$$
unde statim colligitur $x = 3$, $y = -1$, quapropter nominatis tribus membris ordine naturali sese sequentibus A, B, C erit pro determinando postremo
$$C = 3B - A.$$

10. Quantitates α_1 α_2 α_3, quarum valores
$$\frac{\alpha(1+\beta)}{\beta},\ (\alpha^2 - 2\beta)\frac{(1+\beta^2)}{2\beta^2},\ (\alpha^3 - 3\alpha\beta)\frac{(1+\beta^3)}{3\beta^3}$$

in §. 8. dati sunt, pluribus proprietatibus memoratu non indignis gaudent, quarum non nisi unicam hic exponam.

Supra invenimus $2a = \alpha_1 \sin. a - \alpha_2 \sin. 2a + \alpha_3 \sin. 3a - \ldots$ (I). Cum autem habeamus

$$\sin. a = a - \frac{a^3}{1.2.3} + \frac{a^5}{1.2.3.4.5} - \text{ sequitur fore}$$

$$\sin. 2a = (2a) - \frac{(2a)^3}{1.2.3} + \frac{(2a)^5}{1.2..5} -$$

$$\sin. 3a = (3a) - \frac{(3a)^3}{1.2.3} + \frac{(3a)^5}{1.2..5} - .$$

Substitutis autem his postremis valoribus quantitatum sin. a, sin. $2a$, sin. $3a$.. in aequatione I, habebitur

$$2 = \alpha_1 - 2\,\alpha_2 + 3\,\alpha_3 - 4\,\alpha_4 +$$
$$0 = \alpha_1 - 2^3\,\alpha_2 + 3^3\,\alpha_3 - 4^3\,\alpha_4 +$$
$$0 = \alpha_1 - 2^5\,\alpha_2 + 3^5\,\alpha_3 - 4^5\,\alpha_4 +$$
$$0 = \alpha_1 - 2^7\,\alpha_2 + 3^7\,\alpha_3 - 4^7\,\alpha_4 + .$$

I. Eaedem aequationes facili negotio elicientur ex successiva quantitatis (I) differentiatione unde simul, posito $a = 90$, habebuntur sequentes

$$0 = \alpha_1 - 3^2\,\alpha_3 + 5^2\,\alpha_5 - 7^2\,\alpha_7 +$$
$$0 = \alpha_1 - 3^4\,\alpha_3 + 5_4\,\alpha_5 - 7_4\,\alpha_7 +$$
$$0 = \alpha_1 - 3^6\,\alpha_3 + 5^6\,\alpha_5 - 7^6\,\alpha_7 + .$$

Ope igitur methodi expositae quam latissime patentis infinitae series, quae angulum per ejusdem sinum exprimunt quaeque numerum quemcunque quantitatum arbitrariarum continent, invenientur, unde problema propositum maxima qua fieri potest generalitate solutum esse censemus.

11. Antequam autem objectum sectionis prioris penitus deseramus, necesse erit adnotare, eandem methodum etiam aliis seriebus inservire, quarum singuli termini cum praecedentibus identici, signa autem, quae in prioribus alternabant, omnibus eadem remanent. Quod ut tantum in simplicissimis hujusmodi seriebus clarius reddatur, ponamus

tang. $x = \frac{\alpha \sin. a}{1 - \alpha \cos. a}$ unde confestim concluditur $e^{2x\sqrt{-1}} = \frac{1 - \alpha e^{-a\sqrt{-1}}}{1 - \alpha e^{a\sqrt{-1}}}$ et hinc

$$x = \alpha \sin. a + \frac{\alpha^2}{2} \sin. 2a + \frac{\alpha^3}{3} \sin. 3a + .$$

Eadem autem aequatio data etiam hanc formam induere potest

$$- \text{tg.} (a + x) = \frac{\frac{1}{\alpha} \sin. a}{1 - \frac{1}{\alpha} \cos. a}$$

unde eodem modo obtinebitur

$$- (a + x) = \frac{1}{\alpha} \sin. a + \frac{1}{2\alpha^2} \sin. 2a + \frac{1}{3\alpha^3} \sin. 3a + .$$

Eliminata denique quantitate x, obtinebitur

$$- a = \frac{1 + \alpha^2}{\alpha} \sin. a + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \alpha^4}{\alpha^2} \sin. 2a + \frac{1}{3} \cdot \frac{1 + \alpha^6}{\alpha^3} \sin. 3a +$$

in qua serie quantitatas α arbitrio nostro relinquitur.

I. Pro $\alpha = i$ habebimus

$$- \frac{a}{2} = \sin. a + \frac{1}{2} \sin. 2a + \frac{1}{3} \sin. 3a + \frac{1}{4} \sin. 4a +$$

quam seriem jam ill. *Euler* (Calc. differ. Pars II. cap. 4. et 6.) exhibuit, quamvis summam hujus seriei non $-\frac{a}{2}$ sed $\frac{\pi - a}{2}$ assignavit. Alias autem demonstravit ex mente methodi a *Dan. Bernoulli* inventae, hanc summam revera esse debere $\frac{\pi - a}{2}$. Vide Nov. Comment. Acad. scient. Petrop. Tom. XIX. pag. 66.

II. Conjuncta serie inventa

$-a = \frac{1 + \alpha^2}{\alpha} \sin. a + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \alpha^4}{\alpha^2} \sin. 2a +$ cum superiori (§. 6.)

$$a = \frac{1 + \alpha^2}{\alpha} \sin. a - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \alpha^4}{\alpha^2} \sin. 2a +$$

obtinebimus sequentem

$$0 = \frac{1 + \alpha^2}{\alpha} \sin. a + \frac{1}{3} \cdot \frac{1 + \alpha^6}{\alpha^3} \sin. 3a + \frac{1}{5} \cdot \frac{1 + \alpha^{10}}{\alpha^5} \sin. 5a +$$

quae etiam in hanc abire potest

$$0 = \sin. a + \frac{1}{3\alpha^2} (1 - \alpha^2 + \alpha^4) \sin. 3a + \frac{1}{5\alpha^4} (1 - \alpha^2 + \alpha^4 - \alpha^6 + \alpha^8) \sin. 5a$$
$$+ \frac{1}{7\alpha^6} (1 - \alpha^2 + \ldots + \alpha^{12}) \sin. 7a +$$

Sectio secunda.

Summatio serierum sub hac forma contentarum

$$\left.\begin{matrix}\sin.\\ \cos.\end{matrix}\right) a \pm 2^r \left.\begin{matrix}\sin.\\ \cos.\end{matrix}\right) 2a + 3^r \left.\begin{matrix}\sin.\\ \cos.\end{matrix}\right) 3a \pm 4^r \left.\begin{matrix}\sin.\\ \cos.\end{matrix}\right) 4a + \ldots$$

ubi r. *quemcunque numerum integrum denotat.*

12. Consideremus primo series, in quibus r quemvis numerum integrum *positivum* designat.

Supra inventum fuerat

$$a = \frac{1+\alpha^2}{\alpha} \sin. a - \tfrac{1}{2} . \frac{1+\alpha^4}{\alpha^2} \sin. 2a + \tfrac{1}{3} . \frac{1+\alpha^6}{\alpha^3} \sin. 3a - \ldots$$

quae aequatio differentiata praebet sequentem

$$1 = \frac{1+\alpha^2}{\alpha} \cos. a - \frac{1+\alpha^4}{\alpha^2} \cos. 2a + \frac{1+\alpha^6}{\alpha^3} \cos. 3a - \ldots$$

Iterata denique hujus aequationis differentiatione obtinebimus series sequentes

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{1+\alpha^2}{\alpha} \sin. a - 2^n . \frac{1+\alpha^4}{\alpha^2} \sin. 2a + 3^n . \frac{1+\alpha^6}{\alpha^3} \sin. 3a - \ldots \\ 0 &= \frac{1+\alpha^2}{\alpha} \cos. a - 2^m . \frac{1+\alpha^4}{\alpha^2} \cos. 2a + 3^m . \frac{1+\alpha^6}{\alpha^3} \cos. 3a - \ldots \end{aligned}\right\} \text{(I)}$$

ubi n quemvis numerum int. pos. imparem 1, 3 . 5 . .

et m .. .. parem 2, 4 . 6 . . . denotat.

I. Conjuncta eadem serie

$$a = \frac{1+\alpha^2}{\alpha} \sin. a - \tfrac{1}{2} . . \frac{1+\alpha^4}{\alpha^2} \sin. 2a + \ldots$$

cum sequenti

$$a = \tfrac{1}{2} \sin. a - \tfrac{2}{2} \sin. 2a + \tfrac{2}{3} \sin. 3a - \ldots$$ obtinebimus

$$0 = \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha} \sin. a - \tfrac{1}{2} \frac{(1-\alpha^2)^2}{\alpha^2} \sin. 2a + \tfrac{1}{3} \frac{(1-\alpha^3)^2}{\alpha^3} \sin. 3a - \ldots$$

unde iterata differentiatione habebitur

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha} \sin. a - 2^n \frac{(1-\alpha^2)^2}{\alpha^2} \sin. 2a + 3^n \frac{(1-\alpha^3)^2}{\alpha^3} \sin. 3a - \ldots \\ 0 &= \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha} \cos. a - 2^m \frac{(1-\alpha^2)^2}{\alpha^2} \cos. 2a + 3^m \frac{(1-\alpha^3)^2}{\alpha^3} \cos. 3a - \ldots \end{aligned}\right\} \text{(II)}$$

ubi $n = 1, 3, 5 \ldots$ et $m = n + 1$. ut supra.

11. Aequationes inventae I et II solutionem problematis nostri tanquam casum specialem continent. Posito nimirum $\alpha = 1$, habebitur virtute serierum I

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \sin. a - 2^n \sin. 2a + 3^n \sin. 3a - \\ 0 &= \cos. a - 2^m \cos. 2a + 3^m \cos. 3a - \end{aligned}\right\} \text{(I)}$$

Posito autem in priori $a = 90$ et in altera $a = 0$, erit

$$0 = 1 - 3^n + 5^n - 7^n +$$
$$0 = 1 - 2^m + 3^m - 4^m +$$

quas aequationes etiam ill. *Euler* (Calc. differ. Pars II. cap. 7) invenit. Nos autem ex praecedentibus aequationibus concludimus esse

$$0 = \frac{1+\alpha^2}{\alpha} - 3^n \cdot \frac{1+\alpha^6}{\alpha^3} + 5^n \cdot \frac{1+\alpha^{10}}{\alpha^5} -$$
$$0 = \frac{1+\alpha^2}{\alpha} - 2^m \cdot \frac{1+\alpha^4}{\alpha^2} + 3^m \cdot \frac{1+\alpha^6}{\alpha^3} -.$$

13. Desunt adhuc aequationes formae sequentis

$$\sin. a - 2^m \sin. 2a + 3^m \sin. 3a -$$
$$\cos. a - 2^n \cos. 2a + 3^n \cos. 3a -$$

quarum summam nunc investigabimus.

Jam seriei $\sin. a + \sin. 2a + \sin. 3a + \ldots + \sin. xa$ summa est $\frac{1}{2} \sin. xa - \frac{1}{2} \cos. xa \, \text{cotg.} \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \text{cotg.} \frac{a}{2}$

(vid. *Eul.* Calc. diff. Pars. II. cap. 6.).

Quodsi summa ejusdem seriei, terminis in infinitum excurrentibus, quaeratur, clarum est, omnes partes summae superioris, quae a quantitate x pendent, negligendas esse, unde sequitur

$$\sin. a + \sin. 2a + \sin. 3a + \ldots = \tfrac{1}{2} \text{cotg.} \tfrac{a}{2}.$$

Subtracta hac serie a sequenti satis nota

$$2 \sin. a + 2 \sin. 3a + 2 \sin. 5a + = \frac{1}{\sin. a}$$ obtinebitur

$$\sin. a - \sin. 2a + \sin. 3a - \sin. 4a + = \tfrac{1}{2} \text{tg.} \tfrac{a}{2}$$

quae summa vocetur S.

Iterata hujus seriei differentiatione habebitur

$$\frac{\partial s}{\partial a} = \frac{1}{4\cos.^2\frac{a}{2}} = \cos.a - 2\cos.2a + 3\cos.3a -$$

$$-\frac{\partial^2 s}{\partial a^2} = -\frac{1}{8}\cdot\frac{2\sin.\frac{a}{2}}{\cos.^2\frac{a}{2}} = \sin.a - 2^2\sin.2a + 3^2\sin.3a -$$

$$-\frac{\partial^3 s}{\partial a^3} = -\frac{1}{16}\left(\frac{2.3}{\cos.^4\frac{a}{2}} - \frac{4}{\cos.^2\frac{a}{2}}\right) = \cos.a - 2^3\cos.2a + 3^3\cos.3a -$$

$$\frac{\partial^4 s}{\partial a^4} = \frac{1}{32}\left(\frac{2.3.4}{\cos.^5\frac{a}{2}} - \frac{8}{\cos.^3\frac{a}{2}}\right)\sin.\frac{a}{2} = \sin.a - 2^4\sin.2a +$$

$$\frac{\partial^5 s}{\partial a^5} = \frac{1}{64}\left(\frac{2.3.4.5}{\cos.^6\frac{a}{2}} - \frac{120}{\cos.^4\frac{a}{2}} + \frac{16}{\cos.^2\frac{a}{2}}\right) = \cos.a - 2^5\cos.2a +$$

Difficile autem videtur, legem progressionis seriei 4, 8, 120, 480, 6720, 40320 .. vel seriei 16, 32, 2016, 8064, 282240 etc. assignare, immo etiam ill. *Euler* forte fortuna in easdem series incidens (Calc. diff. Pars I. cap. VI. §. 206) legem progressionis non dedit. Multo autem facilius res procedit, si loco cos. introducantur tangentes anguli $\frac{a}{2}$; quo facto in sequentes devenimus aequationes

$$\sin.a - \sin.2a + \sin.3a - = -\frac{1}{2}\,\text{tg}.\frac{a}{2}$$

$$\sin.a - 2^2\sin.2a + 3^2\sin.3a - = -\frac{1}{2^3}\left(2 + 2\,\text{tg}.^2\frac{a}{2}\right)\text{tg}.\frac{a}{2}$$

$$\sin.a - 2^4\sin.2a + 3^4\sin.3a - = +\frac{1}{2^4}\left(16 + 40\,\text{tg}.^2\frac{a}{2} + 24\,\text{tg}.^4\frac{a}{2}\right)\text{tg}.\frac{a}{2}$$

$$\sin.a - 2^6\sin.2a + 3^6\sin.3a - = -\frac{1}{2^7}\left(272 + 1232\,\text{tg}.^2\frac{a}{2} + 1680\,\text{tg}.^4\frac{a}{2} + 720\,\text{tg}.^6\frac{a}{2}\right)\text{tg}.\frac{a}{2} \,..$$

Quoad legem progressionis assignandam sint coëfficientes cujuscunque seriei horizontalis a, b, c ... et coëfficientes seriei sequentis A, B, C .... quo facto habebitur

$$\begin{aligned}
A &= 2 \,.\, 3b + 1 \,.\, 2a \\
B &= 4 \,.\, 5c + 3 \,.\, 6b + 1 \,.\, 2a \\
C &= 6 \,.\, 7d + 5 \,.\, 10c + 3 \,.\, 4b \\
D &= 8 \,.\, 9e + 7 \,.\, 14d + 5 \,.\, 6c \\
E &= 10 \,.\, 11f + 9 \,.\, 18e + 7 \,.\, 8d.
\end{aligned}$$

Eodemque modo invenitur

$$\cos.a - 2\cos.2a + 3\cos.3a - = \frac{1}{2^2}\left(1 + \text{tg.}^2\frac{a}{2}\right)$$

$$\cos.a - 2^3\cos.2a + 3^3\cos.3a - = -\frac{1}{2^4}\left(2 + 8\,\text{tg.}^2\frac{a}{2} + 6\,\text{tg.}^4\frac{a}{2}\right)$$

$$\cos.a - 2^5\cos.2a + 3^5\cos.3a - = +\frac{1}{2^6}\left(16 + 136\,\text{tg.}^2\frac{a}{2} + 240\,\text{tg.}^4\frac{a}{2} + 120\,\text{tg.}^6\frac{a}{2}\right)$$

ubi, coëfficientibus a, b, c ... et A, B, C ... eodem ut supra ordine dispositis erit

$$\begin{aligned}
A &= 1 \,.\, 2\; b \\
B &= 3 \,.\, 4\; c + 2 \,.\, 4\; b \\
C &= 5 \,.\, 6\; d + 4 \,.\, 8\; c + 2 \,.\, 3\; b \\
D &= 7 \,.\, 8\; e + 6 \,.\, 12\; d + 4 \,.\, 5\; c \\
E &= 9 \,.\, 10\; f + 8 \,.\, 16\; e + 6 \,.\, 7\; d
\end{aligned}$$

quarum aequationum ope facili negotio summae omnium nostrarum serierum assignari possunt.

I. Posito $a = 0$ erit

$$\begin{aligned}
1 - 2 + 3 - 4 + &= \frac{1}{4} \\
1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + &= -\frac{1}{2^3} \\
1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + &= \frac{1}{4} \\
1 - 2^7 + 3^7 - 4^7 + &= -\frac{17}{16} \\
1 - 2^9 + 3^9 - 4^9 + &= \frac{31}{4} \text{ etc.}
\end{aligned}$$

quas series etiam ill. *Euler* (Calc. diff. Pars II cap. VII) invenit.

Posito autem $a = 90^\circ$, habebitur

$1 - 1 + 1 - 1 + = \frac{1}{2}$ ut constat
$1 - 3^2 + 5^2 - 7^2 + = - \frac{1}{2}$
$1 - 3^4 + 5^4 - 7^4 + = \frac{5}{2}$
$1 - 3^6 + 5^6 - 7^6 + = - \frac{61}{2}$
$1 - 3^8 + 5^8 - 7^8 + = \frac{1385}{2}$ etc. etc.

14. Desunt nunc series iisdem ut superiores terminis, sed omnibus positivis, compositae.

Differentiando aequationem

$\sin. a + \sin. 2a + \sin. 3a + = \frac{1}{2} \text{cotg.} \frac{a}{2}$ obtinebimus

$\sin. a + 2^2 \sin. 2a + 3^2 \sin. 3a + = - \frac{1}{2^3} \text{cotg.} \frac{a}{2} (2 + 2 \text{cotg.}^2 \frac{a}{3})$

$\sin. a + 2^4 \sin. 2a + 3^4 \sin. 3a + = \frac{1}{2^5} \text{cotg.} \frac{a}{2} (16 + 40 \text{cotg.}^2 \frac{a}{2} + 24 \text{cotg.}^4 \frac{a}{2})$

et $\cos. a + 2 \cos. 2a + 3 \cos. 3a + = - \frac{1}{4} (1 + \text{cotg.}^2 \frac{a}{2})$

$\cos. a + 2^3 \cos. 2a + 3^3 \cos. 3a + = \frac{1}{2^4} (2 + 8 \text{cotg.}^2 \frac{a}{2} + 6 \text{cotg.}^4 \frac{a}{2})$ etc.

ubi videmus, coëfficientes eosdem esse ut in § praecedenti, summasque istas a praecedentibus non nisi mutatione tangentis in cotangentem discrepare.

15. Transeamus jam ad series ejusdem formae, in quibus m et n quascunque quantitates integras *negativas* designant, quem in finem iterata integratione eodem modo ascendere debebimus, ut antea per differentiationes succedentes descendere oportuit, habito autem respectu quantitatum constantium per integrationes introductarum.

Jam antea invenimus

$$\frac{a}{2} = \sin. a - \frac{1}{2} \sin. 2a + \frac{1}{3} \sin. 3a -$$

quae series per ∂a multiplicata et integrata suppeditat,

$$\frac{a^2}{4} = - \cos. a + \frac{1}{2^2} \cos. 2a - \frac{1}{3^2} \cos. 3a + \ldots + \text{Const.}$$

Ad determinationem quantitatis constantis, sit $a = 0$, unde

$$\text{Const.} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + $$

Sint jam numeri Bernoulliani (*Euler* Calc. diff. Pars II. Cap. V)

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{6} \quad \mathfrak{B} = \frac{1}{30} \quad \mathfrak{C} = \frac{1}{42} \quad \mathfrak{D} = \frac{1}{30} \quad \mathfrak{E} = \frac{5}{66} \quad \mathfrak{F} = \text{[illegible]} \ \text{etc.}$$

et brevitatis causa

$$A = \frac{2-1}{1.2}\mathfrak{A}$$

$$A_{\prime} = \frac{2^3-1}{1.2.3.4}\mathfrak{B}$$

$$A_{\prime\prime} = \frac{2^5-1}{1.2..6}\mathfrak{C}$$

$$A_{\prime\prime\prime} = \frac{2^7-1}{1.2..8}\mathfrak{D} \ \text{etc.}$$

quibus positis, erit ut constat $C = A\pi^2$ ubi $\pi = 3.1415926\ldots$ unde series nostra fit

$$\cos. a - \frac{1}{2^2}\cos. 2a + \frac{1}{3^2}\cos. 3a - = -\frac{\frac{1}{2}a^2}{1.2} + A\pi^2$$

quae per ∂a multiplicata integrataque praebet

$$\sin. a - \frac{1}{2^3}\sin. 2a + \frac{1}{3^3}\sin. 3a - = -\frac{\frac{1}{2}a^3}{1.2.3} + A\pi^2 a$$

constante integrationis evanescente.

Eodem labore saepius repetito tandem invenietur *pro* n *numero integro impari*

$$\sin. a - \frac{1}{2^n}\sin. 2a + \frac{1}{3^n}\sin. 3a - \frac{1}{4^n}\sin. 4a + =$$

$$\pm\left[\frac{\frac{1}{2}a^n}{1.2.3..n} - \frac{A\pi^2\, a^{n-2}}{1.2.3..n-2} + \frac{A_1\pi^4.a^{n-4}}{1.2..n-4} - \frac{A_2\pi^6.a^{n-6}}{1.2..n-6}\ldots \pm A_{\frac{n-3}{2}}.\pi^{n-1}.a\right]..(A)$$

signum superius, si n est formae $2(2p)+1 = 1, 5, 9\ldots$

. . . inferius . . . . $2(2p+1)+1 = 3, 7, 11\ldots$

et pro m *numero integro pari*

$$\cos. a - \frac{1}{2^m}\cos. 2a + \frac{1}{3^m}\cos. 3a - =$$

$$\pm\left[\frac{\frac{1}{2}a^m}{1.2.3..m} - \frac{A\pi^2.a^{m-2}}{1.2\ldots m-2} + \frac{A_1\pi^4.a^{m-4}}{1.2..m-4} - \frac{A_2\pi^6.a^{m-6}}{1.2\ldots m-6}\ldots \pm A_{\frac{m-2}{2}}.\pi^m\right]\ldots(B)$$

signum superius, si m est $2(2p) = 0, 4, 8, 12\ldots$

. . . inferius . . . . . . $2(2p+1) = 2, 6, 10, 14\ldots$

16. Restant insuper series sequentes

$$S = \cos. a - \tfrac{1}{2} \cos. 2a + \tfrac{1}{3} \cos. 3a$$
$$s = \sin. a - \tfrac{1}{2^2} \sin. 2a + \tfrac{1}{3^2} \sin. 3a -$$
$$s' = \cos. a - \tfrac{1}{2^3} \cos. 2a + \tfrac{1}{3^3} \cos. 3a -$$
$$s'' = \sin. a - \tfrac{1}{2^4} \sin. 2a + \tfrac{1}{3^4} \sin. 3a - .$$

Quarum prima, ut constat, praebet $S = \log. 2 \cos. \frac{a}{2}$. Summas autem sequentium, quamvis termino finito exprimere non possumus, tamen quantitatem transcendentem, unde earum summatio dependet, in genere exhibere licebit. Differentiando nimirum alteram seriem obtinebimus

$$\frac{\partial s}{\partial a} = \cos. a - \tfrac{1}{2} \cos. 2a + \tfrac{1}{3} \cos. 3a -$$

unde concluditur fore $\frac{\partial s}{\partial a} = S$ vel $s = \int \partial a \log. 2 \cos. \frac{a}{2}$ eodemque modo $s' = - \iint \partial a^2 \log. 2 \cos. \frac{a}{2}$ etc. ita ut in genere sit

$$\sin. a - \tfrac{1}{2^m} \sin. 2a + \tfrac{1}{3^m} \sin. 3a - = \pm \int^{m-1} (\partial a)^{m-1} \log. 2 \cos. \tfrac{a}{2},$$

signum superius pro $m = 2, 6, 10, 14 \ldots$

$$\cos. a - \tfrac{1}{2^n} \cos. 2a + \tfrac{1}{3^n} \cos. 3a - = \pm \int^{n-1} (\partial a)^{n-1} \log. 2 \cos. \tfrac{a}{2},$$

signum superius pro $n = 5, 9, 13, 17 \ldots$

Ad easdem expressiones *Eulerus* sed toto coelo diversa via perveniebat. Vide Acta Acad. Imp. scient. Tom. I. Pars. II. pag. 3. vel Instit. calc. Integralis. Vol. IV. p. 154. edit. altera.

Hinc denique facile concluditur, serierum

$$\Sigma = 1 - \tfrac{1}{2^3} + \tfrac{1}{3^3} - \tfrac{1}{4^3} -$$
$$\Sigma' = 1 - \tfrac{1}{2^5} + \tfrac{1}{3^5} -$$
$$\Sigma'' = 1 - \tfrac{1}{2^7} + \tfrac{1}{3^7} -$$

quarum summationem ill. *Euler* (Calc. diff. Pars II. cap. 7) ut difficillimam in medio reliquit, summas exprimi posse modo sequenti

$$\Sigma = - \int s \partial a$$
$$\Sigma' = \int \partial a \int \partial a \int s \partial a$$
$$\Sigma'' = - \int \partial a \int \partial a \int \partial a \int \partial a \int s \partial a \text{ etc.}$$

ubi $s = \int \partial a \log. 2 \cos. \frac{a}{2}$, omnibus integralibus pro casu singulari $a = 0$ sumtis.

17. Jam ad series ejusdem cum praecedentibus formae pervenimus, quarum autem omnes termini eodem affecti sunt signo.

Supra autem invenimus

$$\frac{\pi - a}{2} \sin. a + \frac{1}{2} \sin. 2a + \frac{1}{3} \sin. 3a +$$

id quod per ∂a multiplicatum integratumque dabit

$$\frac{a}{4} - \frac{\pi a}{2} = \cos. a + \frac{1}{2^2} \cos. 2a + \frac{1}{3^2} \cos. 3a + \ldots + \text{Const.}$$

Invenitur autem Const. $= - \frac{2 \mathfrak{A} \pi^2}{1 \cdot 2}$.

unde eodem modo sequitur

$$\frac{a^3}{12} - \frac{\pi a^2}{4} + \frac{2 \mathfrak{A} \pi^2 a}{1 \cdot 2} = \sin. a + \frac{1}{2^3} \sin. 2a + \frac{1}{3^3} \sin. 3a +.$$

Posito proinde brevitatis gratia

$$B = \frac{2 \mathfrak{A}}{1 \cdot 2}$$

$$B_1 = \frac{2^3 \mathfrak{B}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$B_2 = \frac{2^5 \mathfrak{C}}{1 \cdot 2 \ldots 6}$$

$$B_3 = \frac{2^7 \mathfrak{D}}{1 \cdot 2 \ldots 8} \quad \text{etc.}$$

facili negotio invenietur

pro n *numero integro impari*

$$\sin. a + \frac{1}{2^n} \sin. 2a + \frac{1}{3^n} \sin. 3a + =$$

$$\pm \left\{ \begin{array}{l} \frac{\frac{1}{2} a^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} - \frac{\frac{1}{2} \pi a^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots n-1} + \frac{B \pi^2 a^{n-2}}{1 \cdot 2 \ldots n-2} - \frac{B_1 \pi^4 a^{n-4}}{1 \cdot 2 \ldots n-4} \\ \qquad + \frac{B_2 \pi^6 a^{n-6}}{1 \cdot 2 \ldots n-6} \ldots \pm B_{\frac{n-3}{2}} \pi^{n-1} a \end{array} \right\} \ldots (C)$$

signum superius pro $n = 2(2p+1) + 1 = 3, 7, 11 \ldots$

. . . inferius . . $2(2p) + 1 = 5, 9, 13 \ldots$

et pro m *numero integro pari*

$$\cos. a + \frac{1}{2^m}\cos. 2a + \frac{1}{3^m}\cos. 3a + =$$

$$= \pm \left\{ \begin{array}{l} \frac{\frac{1}{2} a^m}{1.2.3..m} - \frac{\frac{1}{2}\pi a^{m-1}}{1.2..m-1} + \frac{B\pi^2 a^{m-2}}{1.2..m-2} - \frac{B_1 \pi^4 a^{m-4}}{1.2..m-4} \\ \quad + \frac{B_2 \pi^6 a^{m-6}}{1.2...m-6} \ldots \pm B_{\frac{m-2}{2}} \pi^m \end{array} \right\} \ldots (D).$$

signum superius pro $m = 2(2p+1) = 2, 6, 10 \ldots$
.. . inferius . . . $2(2p) = 4, 8, 12 \ldots$

18. Desunt hic series

$$T = \cos. a + \tfrac{1}{2}\cos. 2a + \tfrac{1}{3}\cos. 3a +$$
$$t = \sin. a + \tfrac{1}{2^2}\sin. 2a + \tfrac{1}{3^2}\sin. 3a +$$
$$t' = \cos. a + \tfrac{1}{2^3}\cos. 2a + \tfrac{1}{3^3}\cos. 3a +$$
$$t'' = \sin. a + \tfrac{1}{2^4}\sin. 2a + \tfrac{1}{3^4}\sin. 3a + .$$

Ast cum sit $T = -\log. 2\sin. \frac{a}{2}$, erit

$$t = \int T\, \partial a$$
$$t' = -\iint T\, \partial a^2$$
$$t'' = -\iiint T\, \partial a^3 \text{ etc. etc.}$$

Cum autem formula $\int \partial a \log. \sin. \frac{a}{2}$ omnem integrationem prorsus respuat, ulterius progredi haud licebit, immo ne pro $a = 0$ quidem haec integralia termino finito dari possunt, in quo casu haberentur summae serierum

$$1 + \tfrac{1}{2^3} + \tfrac{1}{3^3} +$$
$$1 + \tfrac{1}{2^5} + \tfrac{1}{3^5} +$$
$$1 + \tfrac{1}{2^7} + \tfrac{1}{3^7} +$$

quas series etiam ill. *Euler* (calc. diff. Pars II. cap. VI) summare frustra conatus est.

19. Quodsi serie A addatur series C, habebitur

$$\sin. a + \tfrac{1}{3^n} \sin. 3a + \tfrac{1}{5^n} \sin. 5a + = $$

$$\mp \left[\frac{\tfrac{1}{2}\pi a^{n-1}}{1.2..n-1} - \frac{C\pi^2 a^{n-2}}{1.2..n-2} + \frac{C_1 \pi^4 a^{n-4}}{1.2..n-4} - \frac{C_2 \pi^6 a^{n-6}}{1.2..n-6} + .. \mp C_{\frac{n-3}{2}} \pi^{n-1} a\right]$$

signum superius pro $n = 2(2p+1) + 1$
. . inferius . . . $2(2p) + 1$.

Eodem modo aequationum B et D summa praebebit

$$\cos. a + \tfrac{1}{3^m} \cos. 3a + \tfrac{1}{5^m} \cos. 5a + =$$

$$\mp \tfrac{1}{2} \left[\frac{\tfrac{1}{2}\pi a^{m-1}}{1.2..m-1} - \frac{C\pi^2 a^{m-2}}{1.2..m-2} + \frac{C_1 \pi^4 a^{m-4}}{1.2..m-4} - \frac{C_2 \pi^6 a^{m-6}}{1.2..m-6} .. \mp C_{\frac{m-2}{2}} \pi^m\right]$$

signum superius pro $m = 2(2p+1)$
. . inferius pro $m = 2(2p)$

in quibus aequationibus brevitatis gratia suppositum est

$$C = \frac{2.2-1}{1.2} \mathfrak{A}$$

$$C_1 = \frac{2^4-1}{1.2.3.4} \mathfrak{B}$$

$$C_2 = \frac{2^6-1}{1.2..6} \mathfrak{C}$$

$$C_3 = \frac{2^8-1}{1.2..8} \mathfrak{D} \text{ etc. etc.}$$

His jam seriebus inventis nullo fere negotio innumerabiles propemodum casus singulares memoratu dignissimos evolvere liceret, quos autem ob praescriptos huic dissertationi fines angustos in aliam occasionem differre visum est.

Sectio tertia.

20. Aequatio $\tang. x = \frac{\alpha \sin. a}{1 \pm \alpha \cos. a}$, quae nobis in prima sectione tantae utilitatis fuerat, insuper solutioni alius problematis non omnino attentione indigni inserviet.

Problema.

Valorem quantitatis tang. a per seriem exprimere, quae per sinus angulorum multiplorum ipsius a procedit.

Solutio.

Cum sit $\text{tg.}\frac{a}{2} = \frac{\sin. a}{1 + \cos. a}$, ponatur

$$\frac{\frac{1}{2}\sin. a}{1 + \cos. a} = A \sin. a - B \sin. 2a + C \sin. 3a - D \sin. 4a +$$

unde altera hujus aequationis parte per $(1 + \cos. a)$ multiplicata, prodibunt aequationes conditionales sequentes

$$B = 2\,A - 1$$
$$C = 3\,A - 2$$
$$D = 4\,A - 3$$
$$E = 5\,A - 4 \text{ etc.}$$

ubi notatu dignum, primam harum quantitatum A prorsus arbitrariam remanere, unde sequitur problema nostrum per infinitas series solvi posse, quae omnes in hac generali continentur

$$\tfrac{1}{2}\text{tg.}\tfrac{a}{2} = A \sin. a - (2A - 1)\sin. 2a + (3A - 2)\sin. 3a - (4A - 3)\sin. 4a + ..$$

I. Pro casu singulari $A = 1$ erit etiam $B = C = D .. = 1$ et hinc

$$\tfrac{1}{2}\,\text{tg.}\,\tfrac{a}{2} = \sin. a - \sin. 2a + \sin. 3a -$$

uti jam §. 13. inventum fuerat.

II. Pro $A = 0$ erit $B = -1$, $C = -2$, $D = -3$ unde

$$\tfrac{1}{2}\;\text{tg.}\tfrac{a}{2} = \sin. 2a - 2\sin. 3a + 3\sin. 4a - 4\sin. 5a + ..$$

Hujus autem aequationis differentiale est

$$\frac{1}{4\cos.^2\frac{a}{2}} = 1\,.\,2\cos. 2a - 2\,.\,3\cos. 3a + 3\,.\,4\cos. 4a -$$

quod pro $a = 0$ abit in

$$\tfrac{1}{4} = 1\,.\,2 - 2\,.\,3 + 3\,.\,4 - 4\,.\,5 +$$

series nota, cum sit

$$1\,.\,2 - 2\,.\,3x + 3\,.\,4x^2 - 4\,.\,5x^3 + = \frac{2}{(1+x)^3}.$$

III. Pro $A = -1$ erit $B = -3$, $C = -5$, $D = -7$ unde

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{tg.}\,\tfrac{a}{2} = -\sin. a + 3\sin. 2a - 5\sin. 3a + 7\sin. 4a -$$

cujus aequationis differentiale pro $a = 0$ dat

$$\tfrac{1}{4} = -1 + 2 \,.\, 3 - 3 \,.\, 5 + 4 \,.\, 7 - 5 \,.\, 9 + .$$

Ad seriem autem postremam aliter demonstrandam erit ut constat

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + = \frac{x}{(1-x)^2}$$

quod ponatur $= s$. Jam si singuli hujus seriei termini respective per 1, 3, 5, 7 .. multiplicentur, prodit

$$x + 2 \,.\, 3x^2 + 3 \,.\, 5x^3 + 4 \,.\, 7x^4 +$$

cujus summa si ponatur s' erit, secundum methodum ill. *Euleri* in suo calc. diff. Pars. II. cap. II. §. 24 expositam,

$$s' = s + 2x \,.\, \frac{\partial s}{\partial x}$$

unde omnibus rite reductis habetur

$$s' = \frac{x + 3x^2}{(1-x)^3}$$

ubi si ponatur $x = -1$ erit

$$-1 + 2 \,.\, 3 - 3 \,.\, 5 + 4 \,.\, 7 - = \frac{-1+3}{2^3} = \tfrac{1}{4} \text{ ut supra.}$$

21. In sectione prima (§. 6.) inventum fuerat

$$C = \frac{1+n^2}{n}\sin. C - \tfrac{1}{2}\,.\,\frac{1+n^4}{n^2}\sin. 2C + \tfrac{1}{3}\,.\,\frac{1+n^6}{n^3}\sin. 3C -$$

ubi notatu quam maxime dignum, hanc seriem ex duabus aliis esse conflatam, quae si ponantur x et y, erit

$$x = n\sin. C - \tfrac{1}{2}n^2\sin. 2C + \tfrac{1}{3}n^3\sin. 3C -$$

$$y = \frac{1}{n}\sin. C - \frac{1}{2n^2}\sin. 2C + \frac{1}{3n^3}\sin. 3C - .$$

Sint jam A, B, C anguli et a, b, c latera trianguli sphaerici illis respective opposita et $n = \mathrm{tg.}\,\frac{a}{2}\,\mathrm{tg.}\,\frac{b}{2}$ unde per formulam Neperianam habebimus

$$\mathrm{cotg.}\,\frac{A+B}{2} = \frac{1-n}{1+n}\,\mathrm{tg.}\,\tfrac{1}{2}C.$$

Ex hac aequatione ill. *Legendre* (Géométrie, Notes) methodo pereleganti invenit esse

$$\frac{A + B + C}{2} - 90^\circ = x.$$

Nos autem supra reperimus $x + y = C$ unde sequitur esse

$$y = 90 + \frac{C - A - B}{2} \text{ hoc est}$$

$$\frac{A + B}{2} = 90 + \frac{C}{2} - \frac{1}{n} \sin. C + \frac{1}{2n^2} \sin. 2C - \frac{1}{3n^3} \sin. 3C + .. \text{(I)}.$$

I. Eadem ratione in §. 11 invenimus

$$-C = \frac{1 + m^2}{m} \sin. C + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + m^4}{m^2} \sin. 2C + \frac{1}{3} \cdot \frac{1 + m^6}{m^3} \sin. 3C +$$

quae series iterum ex duabus sequentibus componitur

$$x = m \sin. C + \frac{1}{2} m^2 \sin. 2C + \frac{1}{3} m^3 \sin. 3C +$$

$$y = \frac{1}{m} \sin. C + \frac{1}{2m^2} \sin. 2C + \frac{1}{3m^3} \sin. 3C +.$$

Posito autem $m = \text{tg.} \frac{b}{2} \text{ cotg.} \frac{a}{2}$ erit, secundum ill. *Legendre* loc. cit.

$$x = \frac{180 - (A - B + C)}{2}$$

unde cum supra reperimus $x + y + C = 0$, sequitur fore

$$y = \frac{A - B - C - 180}{2} \text{ hoc est}$$

$$\frac{A - B}{2} = 90 + \frac{C}{2} + \frac{1}{m} \sin. C + \frac{1}{2m^2} \sin. 2C + \frac{1}{3m^3} \sin. 3C + .. \text{(II)}.$$

Eadem methodus etiam ad binas sequentes series ab ill. *Legendre* datas, quibus latera per angulos dantur, accomodari potest, ita quidem, ut quaternis seriebus istis aliae quatuor adjici possint, quibus postremis solutio D. *Legendre* completa redditur, cum novae nostrae series iis tantum in casibus applicationem patiantur, in quibus veteres quatuor ob terminos divergentes adhibere nequeunt. Restat proinde, ut etiam pro logarithmo tertii lateris vel anguli aliae series, eadem indole gaudentes, in medium proferantur. Has autem jam in alia dissertatiuncula (*Sur les hauteurs observées près du méridien, Vol. V des mémoires de St. Petersb.*) publici juris feci. Collectae proinde nunc omnes formulae inventae, ita sese habebunt

$$\left.\begin{aligned}
\frac{A+B}{2} &= 90 - \frac{C}{2} + n\sin.C - \frac{n^2}{2}\sin.2C + n^3\sin.3C - \\
\frac{A-B}{2} &= 90 - \frac{C}{2} - m\sin.C - \frac{m^2}{2}\sin.2C - \frac{m^3}{3}\sin.3C - \\
\frac{a+b}{2} &= \frac{c}{2} + p\sin.c + \tfrac{1}{2}p^2\sin.2c + \tfrac{1}{3}p^3\sin.3c + \\
\frac{a-b}{2} &= \frac{c}{2} - q\sin.c + \tfrac{1}{2}q^2\sin.2c - \tfrac{1}{3}q^3\sin.3c + \\
\log.\sin.\tfrac{c}{2} &= \log.\sin.\tfrac{a}{2}\cos.\tfrac{b}{2} - m\cos.C - \tfrac{m^2}{2}\cos.2C - \tfrac{m^3}{3}\cos.3C - \\
\log.\cos.\tfrac{c}{2} &= \log.\cos.\tfrac{a}{2}\cos.\tfrac{b}{2} + n\cos.C - \tfrac{n^2}{2}\cos.2C + \tfrac{n^3}{3}\cos.3C - \\
\log.\sin.\tfrac{C}{2} &= \log\cos.\tfrac{A}{2}\cos.\tfrac{B}{2} - p\cos.C - \tfrac{1}{2}p^2\cos.2c - \tfrac{p^3}{3}\cos.3c - \\
\log.\cos.\tfrac{C}{2} &= \log.\sin.\tfrac{A}{2}\cos.\tfrac{B}{2} + q\cos.c - \tfrac{1}{2}q^2\cos.2c + \tfrac{1}{3}q^3\cos.3c -
\end{aligned}\right\}$$

ubi $m = \text{tg}.\frac{b}{2}\,\text{cotg}.\frac{a}{2}$ $\qquad p = \text{tg}.\frac{A}{2}\,\text{tg}.\frac{B}{2}$

$n = \text{tg}.\frac{b}{2}\,\text{tg}.\frac{a}{2}$ $\qquad q = \text{cotg}.\frac{A}{2}\,\text{tg}.\frac{B}{2}$.

Aequationes praecedentes a D. *Legendre* datae sunt. quibus addimus octo sequentes, iis casibus adaptatae, quibus priores ut divergentes satisfacere non possunt.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{A+B}{2} &= 90 + \frac{C}{2} - \frac{1}{n}\sin.C + \frac{1}{2n^2}\sin.2C - \frac{1}{3n^3}\sin.3C + \\
\frac{A-B}{2} &= 90 + \frac{C}{2} + \frac{1}{m}\sin.C + \frac{1}{2m^2}\sin.2C + \frac{1}{3m^3}\sin.3C + \\
\frac{a+b}{2} &= -\frac{1}{2}c - \frac{1}{p}\sin.c - \frac{1}{2p^2}\sin.2c - \frac{1}{3p^3}\sin\,3c - \\
\frac{a-b}{2} &= -\frac{1}{2}c + \frac{1}{q}\sin.c - \frac{1}{2q^2}\sin.2c + \frac{1}{3q^3}\sin.3c - \\
\log.\sin.\tfrac{c}{2} &= \log.\cos.\tfrac{a}{2}\sin.\tfrac{b}{2} - \frac{1}{m}\cos.C - \frac{1}{2m^2}\cos.2C - \frac{1}{3m^3}\cos.3C - \\
\log.\cos.\tfrac{c}{2} &= \log.\sin.\tfrac{a}{2}\sin.\tfrac{b}{2} + \frac{1}{n}\cos.C - \frac{1}{2n^2}\cos.2C + \frac{1}{3n^3}\cos.3C - \\
\log.\sin.\tfrac{C}{2} &= \log.\sin.\tfrac{A}{2}\sin.\tfrac{B}{2} - \frac{1}{p}\cos.c - \frac{1}{2p^2}\cos.2c - \frac{1}{3p^3}\cos.3c - \\
\log.\cos.\tfrac{C}{2} &= \log.\cos.\tfrac{A}{2}\sin.\tfrac{B}{2} + \frac{1}{q}\cos.c - \frac{1}{2q^2}\cos.2c + \frac{1}{3q^3}\cos.3c -
\end{aligned}\right\}.$$

III. Inventis nunc caeteris octo aequationibus, nullo negotio faciliorem earum demonstrationem inveniemus. Primae quatuor a D. *Legendre* datae ex formulis Neperianis deductae sunt, quae formulae in genere per aequationem

$$\text{tang}.\frac{x}{2} = \frac{1+b}{1-b}\,.\,\text{tang}.\frac{y}{2}$$

repraesentari possunt. Jam facile demonstratur, ex hac aequatione valorem ipsius $\frac{x}{2}$ proditurum esse sequentem

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{2} + b \sin. y + \frac{b^2}{2} \sin. 2y + \frac{b^3}{3} \sin. 3y +$$

unde aequationes D. *Legendre* sequuntur.

Ast cum eadem aequatio etiam sic scribi potest

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -\frac{1+\frac{1}{b}}{1-\frac{1}{b}} \operatorname{tg}.\frac{y}{2}$$

sequitur fore, mutatis tantummodo b in $\frac{1}{b}$ et y in $360 - y$,

$$\frac{x}{2} = 180 - \frac{y}{2} - \frac{1}{b}\sin. y - \frac{1}{2b^2}\sin. 2y - \frac{1}{3b^3}\sin. 3y -$$

unde aequationes meae petitae sunt.

Quoad aequationes quatuor postremas, jam loc. cit. (*Mem. Vol. V.*) adnotavi, si pro $\frac{1 - \sin. a \sin. b \cos. C - \cos. a \cos. b}{2}$ ponatur $f^2 + 2fg \cos. C + g^2$ pro f et g duplices prodire valores, nimirum

$$f = \sin. \frac{a}{2} \cos. \frac{b}{2} \quad \text{vel etiam} \quad f = \cos. \frac{a}{2} \sin. \frac{b}{2}$$
$$g = \cos. \frac{a}{2} \sin. \frac{b}{2} \qquad\qquad g = \sin. \frac{a}{2} \cos. \frac{b}{2}$$

unde etiam pro quovis logarithmo quatuor serierum postremarum duplicem aequationem nacti sumus

22. Coronidis loco considerabimus quasdam series ex prioribus sponte sua fluentes.

Supra inventum fuerat $\frac{a}{2} = \sin. a - \frac{1}{2}\sin. 2a + \frac{1}{3}\sin. 3a -$

et $\log. 2 \cos. \frac{a}{2} = \cos. a - \frac{1}{2}\cos. 2a + \frac{1}{3}\cos. 3a -$

Multiplicata serie prima per $\cos. a$ et altera per $+ \sin. a$. vel priori per $\sin. a$ et secunda per $+ \cos. a$, obtinebimus quatuor series sequentes

$$\left.\begin{aligned}
&\sin. 2a - \tfrac{1}{2}\sin. 3a + \tfrac{1}{3}\sin. 4a - \tfrac{1}{4}\sin. 5a + = \tfrac{a}{2}\cos. a + \sin. a \,.\, \log. 2 \cos. \tfrac{a}{2} \\
&\tfrac{1}{2}\sin. a - \tfrac{1}{3}\sin. 2a + \tfrac{1}{4}\sin. 3a - \tfrac{1}{5}\sin. 4a + = -\tfrac{a}{2}\cos. a + \sin. a \,.\, \log. 2 \cos. \tfrac{a}{2} \\
&1 - \tfrac{1}{2}\cos. a + \tfrac{1}{3}\cos. 2a - \tfrac{1}{4}\cos. 3a + = \tfrac{a}{2}\sin. a + \cos. a \,.\, \log. 2 \cos. \tfrac{a}{2} \\
&\cos. 2a - \tfrac{1}{2}\cos. 3a + \tfrac{1}{3}\cos. 4a - \tfrac{1}{4}\cos. 5a + = -\tfrac{a}{2}\sin. a + \cos. a \,.\, \log. 2 \cos. \tfrac{a}{2}
\end{aligned}\right\} \text{I.}$$

Summa primae et secundae harum serierum est

$$\tfrac{1}{4}\sin. a + \tfrac{1}{1.3}\sin. 2a - \tfrac{1}{2.4}\sin. 3a + \tfrac{1}{3.5}\sin. 4a - \tfrac{1}{4.6}\sin. 5a + $$
$$= \sin. a \,.\, \log. 2\cos. \tfrac{a}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

earumdemque differentia

$$\tfrac{2}{1.3}\sin. 2a - \tfrac{3}{2.4}\sin. 3a + \tfrac{4}{3.5}\sin. 4a - \tfrac{5}{4.6}\sin. 5a +$$
$$= \tfrac{a}{2}\cos. a + \tfrac{1}{4}\sin. a$$

quarum prima pro $a = 90$ praebet

$$\log. 4 = 1 + \tfrac{1}{1.2} - \tfrac{1}{2.3} + \tfrac{1}{3.4} - \tfrac{1}{4.5} + \text{ et altera}$$
$$\tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{2.4} - \tfrac{5}{4.6} + \tfrac{7}{6.8} - \tfrac{9}{8.10} + .$$

Eodem modo summa tertiae et quartae aequationum I. suppeditat

$$\cos. a \,.\, \log. 2\cos. \tfrac{a}{2} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\cos. a$$
$$= \tfrac{2}{1.3}\cos. a - \tfrac{3}{2.4}\cos. 3a + \tfrac{4}{3.5}\cos. 4a - \tfrac{5}{4.6}\cos. 5a +$$

et earumdem differentia

$$\tfrac{a}{2}\sin. a = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\cos. a - \tfrac{1}{1.3}\cos. 2a + \tfrac{1}{2.4}\cos. 3a$$
$$- \tfrac{1}{3.5}\cos. 4a + \tfrac{1}{4.6}\cos. 5a \quad . \quad . \quad . \quad (III)$$

quarum prima dat

$$\log. 2 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{1.3} - \tfrac{3}{2.4} + \tfrac{4}{3.5} - \tfrac{5}{4.6} +$$

et secunda pro $a = 0$

$$\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{1.3} - \tfrac{1}{2.4} + \tfrac{1}{3.5} - \tfrac{1}{4.6} + \tfrac{1}{5.7} -$$

et pro $a = 90^\circ$

$$\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{1.3} - \tfrac{1}{3.5} + \tfrac{1}{5.7} - \tfrac{1}{7.9} + .$$

23. Multiplicata serie III (§. 22) per ∂a integrataque erit

$$\tfrac{a}{2} - \tfrac{1}{4}\sin. a - \tfrac{1}{2}\int a\,\partial a \sin. a$$
$$\tfrac{1}{1.2.3}\sin. 2a - \tfrac{1}{2.3.4}\sin. 3a + \tfrac{1}{3.4.5}\sin. 4a - .$$

Facile autem invenitur

$$\int a\,\partial a \sin.a = \sin.a - a\cos.a,$$

unde sequitur, quantitate constante integrationis evanescente,

$$\tfrac{a}{2}(1 + \cos.a) - \tfrac{3}{4}\sin.a$$

$$\frac{1}{1.2.3}\sin.2a - \frac{1}{2.3.4}\sin.3a + \frac{1}{3.4.5}\sin.4a - \frac{1}{4.5.6}\sin.5a +$$

series memoratu digna, quae pro $a = 90$ in sequentem satis cito convergentem abit

$$\frac{\pi}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2.3.4} - \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{6.7.8} - \frac{1}{8.9.10} + \frac{1}{10.11.12} - .$$

I. Quodsi aequatio II (§. 22) eodem modo per ∂a multiplicetur; erit

$$-\tfrac{1}{4}\cos.a - \int\partial a \sin.a.\log.2\cos.\tfrac{a}{2} = \frac{1}{1.2.3}\cos.2a - \frac{1}{2.3.4}\cos.3a + .$$

Ast $\int\partial a \sin.a .. \log.2\cos.\frac{a}{2} = \cos.^2\frac{a}{2} - 2\cos.^2\frac{a}{2}.\log.2\cos.\frac{a}{2}$ unde

$$\tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{2}\cos.^2\tfrac{a}{2} + 2\cos.^2\tfrac{a}{2}.\log.2\cos.\tfrac{a}{2}$$

$$= \frac{1}{1.2.3}\cos.2a - \frac{1}{2.3.4}\cos.3a + \frac{1}{3.4.5}\cos.4a - \frac{1}{4.5.6}\cos.5a +$$

quae series pro $a = 0$ dat

$$\log.4 - \tfrac{5}{4} = \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} - \frac{1}{4.5.6} +$$

et pro $a = 180^{\circ}$, in quo casu facile demonstratur fore

$$2\cos.^2 90 . \log.2\cos.90 = 0$$

$$\tfrac{1}{4} = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{4.5.6} +$$

quarum serierum summa praebet

$$\log.2 - \tfrac{1}{2} = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{7.8.9} +$$

earumdemque differentia

$$\tfrac{3}{4} - \log.2 = \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{6.7.8} + \frac{1}{8.9.10} + .$$

Habemus autem ut constat,

$$\frac{\pi - 3}{4} = \frac{1}{2.3.4} - \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{6.7.8} - \frac{1}{8.9.10} +$$

unde conjunctis duabus postremis seriebus habebitur

$$\frac{\pi}{8} - \log.\sqrt{2} = \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{6.7.8} + \frac{1}{10.11.12} + \frac{1}{14.15.16} + .$$



DE TRANSFORMATIONE SERIEI IN FRACTIONEM CONTINUAM

AUCTORE

F. T. SCHUBERTO.

Conventui exhibuit die 17 Maji 1815.

§. 1. Quanquam problema de quo hic agitur, saepius jam fuit solutum, non tamen inutilem fore existimo methodum quam hic expositurus sum, quippe quae legem quam ejusmodi fractiones sequuntur, relationemque inter singulos illius terminos existentem, lucidissime ostendit. Proposita serie secundum potentias incognitae aut variabilis x procedente, semper licet, divisione per primum terminum instituta, formam ei dare sequentem,

$$Ax^n (1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \text{cet.}).$$

Quodsi series sit fracta, ex. gr. $\frac{Ax^n + Bx^{n+1} + Cx^{n+2} + \text{cet.}}{ax^m + bx^{m+1} + cx^{m+2} + \text{cet.}}$ facile est, similem illi tribuere formam, scilicet

$$\frac{A}{a} x^{n-m} \left(\frac{1 + \frac{B}{A} x + \text{cet.}}{1 + \frac{b}{a} x + \text{cet.}} \right).$$

Quare nonnisi series hujus formae tractabimus.

§. 2. Proposita itaque series

$$S = 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots\ldots + \alpha_n x^n + \text{cet.}$$

convertatur in fractionem continuam

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{x}{a_1 + \cfrac{x}{a_2 + \cfrac{x}{a_3 + \text{cet.}}}}}$$

et ponatur

$$\cfrac{\alpha_1+x}{a_2+\cfrac{x}{a_3+\text{cet.}}} = z_1\,; \qquad \cfrac{\alpha_2+x}{a_3+\cfrac{x}{a_4+\text{cet.}}} = z_2\,;$$

et sic porro, ut sit $z_1 = a_1 + \frac{x}{z_2}$, $z_2 = a_2 + \frac{x}{z_3}$, et in universum $z_n = a_n = \frac{x}{z_{n+1}}$: unde erit

$$S = 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n + \text{cet.} = \frac{1}{1+\frac{x}{z_1}} = \frac{z_1}{z_1+x}\,;$$

et si utrinque ducas in $z_1 + x$, adipisceris aequationem

$$0 = x + (z_1 + x)(\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n + \text{cet.}), \text{ sive}$$

$$0 = (1 + \alpha_1 z_1) + (\alpha_1 + \alpha_2 z_1)x + (\alpha_2 + \alpha_3 z_1)x^2 + \ldots\ldots$$
$$+ (\alpha_n + \alpha_{n+1} z_1)\, x^n + \text{cet.}$$

quae quidem, digesta secundum potestates x, et substituto valore $z_1 = a_1 + \frac{x}{z_2}$, convertitur in hanc:

$$\text{(A)}\quad 0 = (1 + \alpha_1\ a_1) + (\tfrac{\alpha_1}{z_2} + \alpha_1 + \alpha_2\ a_1)\ x$$
$$+ (\tfrac{\alpha_2}{z_2} + \alpha_2 + \alpha_3\ a_1)\ x^2 + \ldots\ldots$$
$$+ (\tfrac{\alpha_n}{z_2} + \alpha_n + \alpha^{n+1}\ a_1)\ x^n + \text{cet.}$$

§. 3. Primus hujus seriei terminus constans praebet aequationem, qua primus denominator a_1 determinatur, videlicet

$$(1)\quad 0 = 1 + \alpha_1 a_1 \ \text{ sive } \ a_1 = -\tfrac{1}{\alpha_1}.$$

Rejecto itaque hoc termino, aequatio (A) ducta in z_2, et divisa per x_1 induit formam

$$0 = (\alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_2 a_1) z_2) + (\alpha_2 + (\alpha_2 + \alpha_3 a_1 z_2) x + \ldots\ldots$$
$$+ (\alpha_n + (\alpha_n + \alpha_{n+1} a_1) z_2)\, x^{n-1} + \text{cet.}$$

quae, substituto $z_2 = a_2 + \frac{x}{z_3}$, et posito

$\alpha_1 + \alpha_2 a_1 = A_1^{(1)}$, et omnino $\alpha_n + \alpha_{n+1} a_1 = A_n^{(1)}$, evadit

$$(B)\ 0 = (\alpha_1 + A_1^{(1)} a_2) + \left(\frac{A_1^{(1)}}{z_3} + \alpha_2 + A_2^{(1)} a_2\right) x + \ldots\ldots$$
$$+ \left(\frac{A_{n-1}^{(1)}}{z_3} + \alpha_n + A_n^{(1)} a_2\right) x^{n-1} + \text{cet.}$$

unde ad determinandum secundum denominatorem a_2, primus terminus praebet aequationem

$$(2)\ \ 0 = \alpha_1 + A_1^{(1)} a_2 \ \text{ seu } \ a_2 = -\frac{\alpha_1}{A_1^{(1)}};$$

quo termino omisso, aequatio (B) ducta in $z_3 = a_3 + \frac{x}{z_4}$, et divisa per x, positoque $\alpha_n + A_n^{(1)} a_2 = A_n^{(2)}$, transformabitur in sequentem

$$(C)\ 0 = (A_1^{(1)} + A_2^{(2)} a_3) + \left(\frac{A_2^{(2)}}{z_4} + A_2^{(1)} + A_3^{(2)} a_3\right) x + \ldots\ldots$$
$$+ \left(\frac{A_{n-1}^{(2)}}{z_4} + A_{n-1}^{(1)} + A_n^{(2)} a_3\right) x^{n-2} + \text{cet.}$$

§. 4. Terminus primus dat aequationem

$$(3)\ \ 0 = A_1^{(1)} + A_2^{(2)} a_3, \ \text{ sive } \ a_3 = -\frac{A_1^{(1)}}{A_2^{(2)}},$$

ac si in residuo, in $z_4 = a_4 + \frac{x}{z_5}$ ducto, substituamus

$A_{n-1}^{(1)} + A_n^{(2)} a_3 = A_n^{(3)}$, nova orietur aequatio

$$(D)\ 0 = (A_2^{(2)} + A_3^{(3)} a_4) + \left(\frac{A_3^{(3)}}{z_5} + A_3^{(2)} + A_4^{(3)} a_4\right) x + \ldots\ldots$$
$$+ \left(\frac{A_{n-1}^{(3)}}{z_5} + A_{n-1}^{(2)} + A_n^{(3)} a_4\right) x^{n-3} + \text{cet.}$$

cujus terminus primus iterum dat

$$(4)\quad 0 = A_2^{(2)} + A_3^{(3)}\, a_4\,, \text{ seu } a_4 = -\frac{A_2^{(2)}}{A_3^{(3)}}.$$

§. 5. Lex progressionis satis jam patet; eamque esse universalem demonstratum erit, si ostenderimus, assumtam pro certo valore a_m, eam itidem obtinere casu a_{m+1}. Aequationes (C), (D), et valores a_3, a_4, cum quantitatibus compendii causa introductis, $A_n^{(3)} = A_{n-1}^{(1)} + A_n^{(2)} a_3$, sequenti adstrictae sunt legi, quam quidem usque ad $m = 4$ vigere vidimus:

$$(a)\quad 0 = (A_{m-2}^{(m-2)} + A_{m-1}^{(m-1)} a_m) + \left(\frac{A_{n-1}^{(m-1)}}{z_{m+1}} + A_{m-1}^{(m-2)} + A_m^{(m-1)} a_m\right) x + \text{cet.}$$

ubi est (§. 4.) $A_n^{(3)} = A_{n-1}^{(1)} + A_n^{(2)} a_3$, h. e.

$$(b)\quad A_n^{(m-1)} = A_{n-1}^{(m-3)} + A_n^{(m-2)} a_{m-1}.$$

Aequationis autem, quae definitioni denominatoris a_m inservit, a primo termino aequationis (a) suppeditatae, hujus formae est,

$$(c)\quad 0 = A_{m-2}^{(m-2)} + A_{m-1}^{(m-1)} a_m.$$

Rejecto itaque hoc termino in aequatione (a), eaque ducta in $z_{m+1} = a_{m+1} + \frac{x}{z_{m+2}}$ (§. 2.), nova orietur aequatio, cujus per x divisae primus terminus constans erit

$$0 = A_{m-1}^{(m-1)} + (A_{m-1}^{(m-2)} + A_m^{(m-1)} a_m)\, a_{m+1},$$

seu substituto

$$A_{n-1}^{(m-2)} + A_n^{(m-1)} a_m = A_n^{(m)}, \quad 0 = A_{m-1}^{(m-1)} + A_m^{(m)} a_{m+1};$$

quae immediate oriuntur ex aequationibus (b), (c), si ibi $m+1$ loco m substituitur.

§. 6. In universum itaque verum est, in evolvenda serie

$$S = 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots\ldots + \alpha_n x^n + \ldots.$$

sequentes obtinere aequationes:

$0 = 1 + a_1 \alpha_1$ (§. 3.), $0 = \alpha_1 + A_1^{(1)} a_2$ (§. 3.), $0 = A_1^{(1)} + A_2^{(2)} a_3$ (§. 4.), et generatim $0 = A_{m-2}^{(m-2)} = A_{m-1}^{(m-1)} a_m$ (§. 5.), sive

$$(a) \quad a_m = -\frac{A_{m-2}^{(m-2)}}{A_{m-1}^{(m-1)}};$$

ubi est $A_n^{(1)} = \alpha_n + \alpha_{n+1} a_1$ (§. 3.), $A_n^{(2)} = \alpha_n + A_n^{(1)} a_2$ (§. 3.),

$A_n^{(3)} = A_{n-1}^{(1)} + A_n^{(2)} a_3$ (§. 4.), et omnino

$$(b) \quad A_n^{(m)} = A_{n-1}^{(m-2)} + A_n^{(m-1)} a_m \text{ (§. 5.)},$$

quae cum (a) comparata, praebet

$$(c) \quad A_n^{(m)} = A_{n-1}^{(m-2)} - A_n^{(m-1)} \frac{A_{m-2}^{(m-2)}}{A_{m-1}^{(m-1)}};$$

in quibus aequationibus literae m, n, quoslibet numeros integros atque positivos denotant.

Exemplum I.

§. 7. Si *logarithmum* naturalem numeri $1 + x$ in fractionem continuam evolvere placet, posito $\log(1+x) = x \,.\, S$, series data erit

$$S = 1 - \tfrac{1}{2} x + \tfrac{1}{3} x^2 - \tfrac{1}{4} x^3 + \text{cet.}$$

proinde $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$, $\alpha_2 = +\frac{1}{3}$, etc. generatimque

$$\alpha_n = \pm \frac{1}{n+1},$$

ubi semel observare oportet, signum superius semper adhibendum esse, si n fuerit numerus par, inferius autem, si n impar. Hinc reperitur (§. 6.), $a_1 = -\frac{1}{\alpha_1} = +2$;

$$A_n^{(1)} = \alpha_n + 2\alpha_{n+1} = \pm\left(\frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2}\right) = \mp \frac{n}{(n+1)(n+2)};$$

$$a_2 = -\frac{\alpha_1}{A_1^{(1)}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2 \cdot 3}} = +3;$$

$$A_n^{(2)} = \alpha_n + 3A_n^{(1)} = \pm\left(\frac{1}{n+1} - \frac{3n}{(n+1)(n+2)}\right) = \mp \frac{2(n-1)}{(n+1)(n+2)};$$

$$a_3 = -\frac{A_1^{(1)}}{A_2^{(2)}} = \frac{-\frac{1}{2 \cdot 3}}{-\frac{2}{3 \cdot 4}} = +1;$$

$$A_n^{(3)} = A_{n-1}^{(1)} + A_n^{(2)} = \pm \frac{n-1}{n(n+1)} \mp \frac{2(n-1)}{(n+1)(n+2)} = \mp \frac{(n-1)(n-2)}{(n+2)(n+1)n};$$

$$a_4 = -\frac{A_2^{(2)}}{A_3^{(3)}} = \frac{+\frac{2}{3\cdot 4\cdot}}{+\frac{2}{3\cdot 4\cdot 5}} = +5;$$

$$A_n^{(4)} = A_{n-1}^{(2)} + 5\,A_n^{(3)} = \pm \frac{2(n-2)}{n(n+1)} \mp \frac{5(n-1)(n-2)}{(n+2)(n+1)n} = \mp \frac{3(n-2)(n-3)}{(n+2)(n+1)n}.$$

§. 8. Formulae istae clare ostendunt legem, qua numeri $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, etc. pariterque a^1, a_2, etc. procedunt. Est nempe, usque ad $r = 3$ et $s = 4$,

$$(1)\quad A_n^{(r)} = \mp \frac{(n-r+1)(n-r+2)\ldots\ldots(n-\frac{r+1}{2})(n-\frac{r-1}{2})}{(n+2)(n+1)n\ldots\ldots(n-\frac{r-5}{2})(n-\frac{r-3}{2})},$$

$$(2)\quad A_n^{(s)} = \mp (\tfrac{1}{2}s+1)\frac{(n-s+1)(n-s+2)\ldots\ldots(n-\frac{1}{2}s-1)(n-\frac{1}{2}s)}{(n+2)(n+1)n\ldots\ldots(n-\frac{1}{2}s+3)(n-\frac{1}{2}s+2)},$$

$$(3)\quad a_r = +\frac{4}{r+1};\quad (4)\quad a_s = +(s+1).$$

Verum est in universum (§. 6. (a)),

$$a_{r+2} = -\frac{A_r^{(r)}}{A_s^{(s)}},\ \text{et}\ a_{s+2} = -\frac{A_s^{(s)}}{A_{s+1}^{(s+1)}};$$

et substituto $r = n$ in (1), et $s = n$ in (2), reperitur, ob r numerum imparem, $s = r + 1$ parem;

$$A_r^{(r)} = +\frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots\frac{r-1}{2}\,.\,\frac{r+1}{2}}{(r+2)\,(r+1)r\,\ldots\,\frac{r+5}{2}\,.\,\frac{r+3}{2}},\ \text{et}$$

$$A_s^{(s)} = -\frac{1\,.\,2\,.\,3\ \ldots\ldots\frac{1}{2}s\,.\,(\frac{1}{2}s+1)}{(s+2)\,(s+1)\,\ldots\,(\frac{1}{2}s+3)\,(\frac{1}{2}s+2)}$$

$$= -\frac{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\frac{r+1}{2}\,.\,\frac{r+3}{2}}{(r+3)\,(r+2)\,\ldots\ldots\frac{r+5}{2}},$$

ideoque $$-\frac{A_r^{(r)}}{A_s^{(s)}} = +\frac{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\frac{r+1}{2}}{(r+2)(r+1)\ldots\frac{r+5}{2}\,.\,\frac{r+3}{2}} \times \frac{(r+3)(r+2)\ldots\ldots\frac{r+5}{2}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\frac{r+1}{2}\,.\,\frac{r+3}{2}},$$

sive $a_{r+2} = \frac{r+3}{\frac{r+3}{2} \cdot \frac{r+3}{2}} = \frac{4}{r+3}$, quae ad assem convenit cum aequatione (3), si ibi $r+2$ loco r substituatur.

Praeterea est generatim (§. 6. (*b*)) $A_n^{(s+1)} = A_{n-1}^{(r)} \mp A_n^{(s)} a_{s+1}$, ideoque $A_{s+1}^{(s+1)} = A_{r+1}^{(r)} + a_{r+2} A_{s+1}^{(s)}$. Est autem, substituto $n = r+1$ in (1) et $n = s+1 = r+2$ in (2)

$$A_{r+1}^{(r)} = - \frac{2 \cdot 3 \ldots\ldots \frac{r+1}{2} \cdot \frac{r+3}{2}}{(r+3)(r+2) \ldots\ldots \frac{r+7}{2} \cdot \frac{r+5}{2}},$$

$$A_{s+1}^{(s)} = + \frac{2 \cdot 3 \ldots\ldots \frac{1}{2}s(\frac{1}{2}s+1)(\frac{1}{2}s+1)}{(s+3)(s+2)\ldots\ldots(\frac{1}{2}s+3)} = + \frac{2 \cdot 3 \ldots\ldots \frac{r+1}{2} \cdot \frac{r+3}{2} \cdot \frac{r+3}{2}}{(r+4)(r+3)\ldots\ldots\frac{r+7}{2}}.$$

Substituto itaque valore modo invento $a_{r+2} = \frac{4}{r+3}$, reperitur

$$A_{s+1}^{(s+1)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots \frac{r+3}{2}}{(r+3)(r+2)\ldots\ldots\frac{r+7}{2}} \left(\frac{\frac{r+3}{2}}{r+4} \cdot \frac{4}{r+3} - \frac{2}{r+5} \right)$$

$$= + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots \frac{r+3}{2}}{(r+3)(r+2)\ldots\ldots\frac{r+7}{2}} \left(\frac{2}{(r+4)(r+5)} \right),$$

sive $A_{s+1}^{(s+1)} = + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots \frac{r+3}{2}}{(r+4)(r+3)\ldots\ldots\frac{r+5}{2}}$; quo valore substituto, fit

$$- \frac{A_{s}^{(s)}}{A_{s+1}^{(s+1)}} = + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots \frac{r+3}{2}}{(r+3)(r+2)\ldots\ldots\frac{r+5}{2}} \times \frac{(r+4)(r+3)\ldots\ldots\frac{r+5}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots \frac{r+3}{2}},$$

sive $a_{s+2} = +(r+4) = +s+3$; quae iterum perfecte congruit cum aequatione (4), numero s binario aucto.

Demonstravimus itaque, aequationes (3) et (4) veras esse, quoscunque numeros impares et pares literae r et s denotent. Ex

binis aequationibus, $a_r = \frac{4}{r+1}$, $a_s = s + 1$, sequitur, non solum cunctos numeros a esse affirmativos, verum etiam regula qua computantur facillima. Prior enim dat

$$a_1 = 2;\ a_3 = 1;\ a_5 = \tfrac{2}{3};\ a_7 = \tfrac{1}{2};\ a_9 = \tfrac{2}{5};\ a_{11} = \tfrac{1}{3};\ a_{13} = \tfrac{2}{7};\ a_{15} = \tfrac{1}{4};$$

et sic porro, $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{2}{11}$, $\frac{2}{12}$, etc. Posterior dat

$$a_2 = 3;\ a_4 = 5;\ a_6 = 7;\ a_8 = 9,$$

et sic porro per omnes numeros impares.

Exemplum II.

§. 9. Proposita serie *Leibnitiana* Arc. tang. $t = \frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \text{cet.}$ arcus erit $= t \,.\, S$, assumta serie

$$S = 1 - \frac{t^2}{3} + \frac{t^4}{5} - \text{cet.}, \text{ seu posito } t^2 = x,$$

$$S = 1 - \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{5}x^2 - \tfrac{1}{7}x^3 + \text{cet.}$$

ita ut sit $\alpha_1 = -\frac{1}{3}$, $\alpha_2 = +\frac{1}{5}$, et omnino $\alpha_r = -\frac{1}{2r+1}$, $\alpha_s = +\frac{1}{2s+1}$, seu $\alpha_n = \pm\frac{1}{2n+1}$. Unde obtinemus (§. 6.)

$$a_1 = +3;\ A_n^{(1)} = \alpha_n + 3\alpha_{n+1} = \pm\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{3}{2n+3}\right) = \mp\frac{4n}{(2n+1)(2n+3)};$$

$$a_2 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3\cdot 5}} = +\tfrac{5}{4};$$

$$A_n^{(2)} = \alpha_n + \tfrac{5}{4}A_n^{(1)} = \pm\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{5n}{(2n+1)(2n+3)}\right) = \mp\frac{3(n-1)}{(2n+1)(2n+3)};$$

$$a_3 = \frac{-\frac{4}{3\cdot 5}}{-\frac{3}{5\cdot 7}} = +\frac{4\cdot 7}{3\cdot 3};$$

$$A_n^{(3)} = A_{n-1}^{(1)} + \frac{4\cdot 7}{3\cdot 3}A_n^{(2)} = \pm\frac{4(n-1)}{(2n-1)(2n+1)} \mp \frac{4\cdot 7\cdot(n-1)}{3(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \mp\frac{32(n-1)(n-2)}{3(2n+3)(2n+1)(2n-1)};$$

$$a_4 = \frac{+\frac{3}{5\cdot 7}}{+\frac{64}{3\cdot 9\cdot 7\cdot 5}} = +\frac{9\cdot 9}{8\cdot 8};$$

$$A_n^{(4)} = A_{n-1}^{(2)} + \frac{9 \cdot 9}{8 \cdot 8} A_n^{(3)} = \pm \frac{3(n-2)}{(2n-1)(2n+1)} \mp \frac{3 \cdot 9 \cdot (n-1)(n-2)}{2(2n+3)(2n+1)(2n-1)}$$
$$= \mp \frac{3 \cdot 5 \cdot (n-2)(n-3)}{2(2n+3)(2n+1)(2n-1)}.$$

§. 10. Lex progressionis numerorum $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, etc. a_1, a_2, etc. usque ad $r = 3$ et $s = 4$, sequentibus declaratur formulis:

$$(1)\quad A_n^{(r)} = \mp 2^{\frac{r+1}{2}} \cdot \frac{2.4.6\ldots(r+1) \times (n-r+1)(n-r+2)\ldots\ldots(n-\frac{r-1}{2})}{1.3.5\ldots\ldots r \times (2n+3)(2n+1)\ldots\ldots(2n-r+2)},$$

$$(2)\quad A_n^{(s)} = \mp 2^{\frac{s}{2}} \cdot \frac{1.3.5\ldots\ldots(s+1) \times (n-s+1)(n-s+2)\ldots\ldots(n-\frac{s}{2})}{2.4.6\ldots\ldots s \times (2n+3)(2n+1)\ldots\ldots(2n-s+3)},$$

$$(3)\quad a_r = + \frac{(2r+1)(2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots (r-1))^2}{(1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots r)^2},$$

$$(4)\quad a_s = + \frac{(2s+1)(1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (s-1))^2}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots s)^2};$$

unde sequitur

$$A_r^{(r)} = + 2^{\frac{r+1}{2}} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots (r+1) \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots \frac{r+1}{2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots r \times (r+2)(r+4)\ldots\ldots(2r+1)(2r+3)},$$

$$A_s^{(r)} = - 2^{\frac{r+1}{2}} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots (r+1) \times 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots \frac{r+3}{2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots r \times (r+4)(r+6)\ldots\ldots(2r+5)},$$

$$A_s^{(s)} = - 2^{\frac{s}{2}} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (s+1) \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots \frac{s}{2}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots s \times (s+3)(s+5)\ldots\ldots(2s+1)(2s+3)},$$

$$A_{s+1}^{(s)} = + 2^{\frac{s}{2}} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (s+1) \times 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots (\frac{s}{2}+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots s \times (s+5)(s+7)\ldots\ldots(2s+5)}, \quad \text{vel}$$

$$(5)\quad A_r^{(r)} = + \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots (r+1))^2}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (2r+1)(2r+3)},$$

$$(6)\quad A_s^{(r)} = - \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots (r+1))^2 \cdot \frac{r+3}{2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots r \times (r+4)(r+6)\ldots\ldots(2r+5)},$$

$$(7)\ A_s^{(s)} = -\frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\ldots.\, (r+2)}{(r+4)(r+6)\ldots.(2r+3)(2r+5)},$$

$$(8)\ A_{s+1}^{(s)} = +\frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots. (r+2) \,.\, \frac{r+3}{2}}{(r+6)(r+8)\ldots.(2r+5)(2r+7)}.$$

Quare cum in universum sit (§. 6.) (*a*) (*b*)),

$$a_{r+2} = -\frac{A_r^{(r)}}{A_s^{(s)}},\quad A_{s+1}^{(s+1)} = A_s^{(r)} + A_{s+1}^{(s)}\, a_{r+2},\ \text{et}\ a_{s+2} = -\frac{A_s^{(s)}}{A_{s+1}^{(s+1)}},$$

reperitur $a_{r+2} = -\frac{(5)}{(7)}$, h. e.

$$(9)\ a_{r+2} = +\frac{(2r+5)\,.\,(2\,.\,4\,.\,6\,.\ldots.\,(r+1))^2}{(1\,.\,3\,.\,5\ldots.\,(r+2))^2},$$

$$A_{s+1}^{(s+1)} = (6) + (8)\,.\,(9)$$

$$= \frac{(2\,.\,4\,.\,6\ldots.(r+1))^2\,.\,\frac{r+3}{2}}{1.3.5\ldots.r(r+6)(r+8)\ldots.(2r+5)}\left(\frac{2r+5}{(r+2)(2r+7)} - \frac{1}{r+4}\right),\ \text{h. e.}$$

$$(10)\ A_{s+1}^{(s+1)} = +\frac{(2\,.\,4\,.\,6\,.\ldots.\,(r+3))^2}{1\,.\,3\,.\,.\,5\,.\ldots.\,(2r+5)(2r+7)},$$

et $a_{s+2} = -\frac{(7)}{(10)}$, sive

$$(11)\ a_{s+2} = +\frac{(2r+7)\,.\,(1\,.\,3\,.\,5\,.\ldots.\,(r+2))^2}{(2\,.\,4\,.\,6\,.\ldots.\,(r+3))^2}$$

$$= \frac{(2s+5)\,.\,(1\,.\,3\,.\,5\,.\ldots.\,(s+1))^2}{(2\,.\,4\,.\,6\,.\ldots.\,(s+2))^2}.$$

Quamobrem, aequationibus (9) cum (3), et (11) cum (4) perfecte congruentibus, si ibi $r+2$ loco r et $s+2$ loco s substituatur, patet, aequationes (3), (4), generaliter veras esse.

§. 11. Formulae itaque (3), (4), sufficiunt ad fractionem in infinitum continuandam. Datur autem brevior adhuc via. Comparantes etenim aequationem (4) cum (3), et (9) cum (4), animadvertimus, relationem inter eas existere admodum simplicem. Reperitur nempe

productum $a_r . a_s = \frac{(2r+1)(2r+3)}{(r+1)^2}$, et $a_s . a_{r+2} = \frac{(2r+3)(2r+5)}{(r+2)^2}$; unde sequitur in universum

$$a_{n+1} = \frac{(2n+1)(2n+3)}{(n+1)^2 a_n},$$

quae formula inservit cuique denominatori a_{n+1} ex immediate antecedente a_n computando. Sufficit itaque supputasse $a_1 = +3$, unde caeteri omnes proveniunt, et quidem positivi, videlicet

$$a_2 = \frac{5}{4};\ a_3 = \frac{5 \cdot 7}{3^2 \cdot 5} 4 = \frac{4 \cdot 7}{3 \cdot 3},\quad a_4 = \frac{7 \cdot 9}{4 \cdot 4} \cdot \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 7} = \frac{9 \cdot 9}{8 \cdot 8};$$

$$a_5 = \frac{9 \cdot 11}{5^2} \cdot \frac{8 \cdot 8}{9 \cdot 9} = \frac{8 \cdot 8 \cdot 11}{5 \cdot 5 \cdot 9},\quad a_6 = \frac{11 \cdot 13}{6 \cdot 6} \cdot \frac{5 \cdot 5 \cdot 9}{8 \cdot 8 \cdot 11} = \frac{13 \cdot 5 \cdot 5}{16 \cdot 16},$$

$$a_7 = \frac{13 \cdot 15}{7 \cdot 7} \cdot \frac{16 \cdot 16}{13 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{15 \cdot 16 \cdot 16}{5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7},\quad a_8 = \frac{15 \cdot 17}{8 \cdot 8} \cdot \frac{5 \cdot 7 \cdot 7}{3 \cdot 16^2} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 17}{8^3 \cdot 16^2},$$

$$a_9 = \frac{17 \cdot 19}{9 \cdot 9} \cdot \frac{8^2 \cdot 16^2}{5^2 \cdot 7^2 \cdot 17} = \frac{8^2 \cdot 16^2 \cdot 19}{5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2}.$$

Supputatio numeris hoc modo adhuc facilius conficitur. Posito $n + 1 = m$, invenimus

$$a_m = \frac{(2m-1)(2m+1)}{m^2 a_{m-1}} = \frac{4m^2 - 1}{m^2 a_{m-1}} = \left(4 - \frac{1}{m^2}\right) \frac{1}{a_{m-1}}.$$

Unde prodit $a_{10} = \left(4 - \frac{1}{100}\right) \frac{5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2}{8^2 \cdot 16^2 \cdot 19}$, ubi $\frac{5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2}{8^2 \cdot 16^2 \cdot 19} = 0{,}3187\ldots$, jam supputatum fuerat, ut itaque sit

$$a_{10} = 1{,}2748 - 0{,}0032 = 1{,}2716\ldots$$

§. 12. Comtemplemur nunc seriem, quae ipsa est fracta,

$$S = \frac{1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + cet.}{1 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + cet.} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{x}{a_1 + \cfrac{x}{a_2 + \ldots}}}.$$

Posito itaque ut supra (§. 2.)

$a_1 + \frac{x}{a_2 + \ldots} = z_1$; $a_2 + \frac{x}{a_3 + \ldots} = z_2$, etc. ut sit $z_n = a_n + \frac{x}{z_{n+1}}$, ideoque $S = \cfrac{1}{1 + \cfrac{x}{z_1}} = \frac{z_1}{z_1 + x}$, erit

$$(1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \text{cet.})(z_1 + x) = (1 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \text{cet.})\, z_1,$$

unde, posito $\alpha_1 - \beta_1 = \gamma_1$, $\alpha_2 - \beta_2 = \gamma_2$, $\alpha_n - \beta_n = \gamma_n$,

oritur aequatio

$$0 = (\gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \text{cet.}) z_1 + (1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \text{cet.}) x, \text{ sive}$$

$$0 = (1 + \gamma_1 z_1) + (\alpha_1 + \gamma_2 z_1) x + (\alpha_2 + \gamma_3 z_1) x^2 + \ldots\ldots + (\alpha_n + \gamma_{n+1} z_1) x^n + \text{cet.}$$

quae, substituto $z_1 = a_1 + \frac{x}{z_2}$, transit in

$$(A)\quad 0 = (1 + \gamma_1 a_1) + (\tfrac{\gamma_1}{z_2} + \alpha_1 + \gamma_2 a_1) x + \ldots\ldots + (\tfrac{\gamma_n}{z_2} + \alpha_n + \gamma_{n+1} a_1) x^n + \text{cet.}$$

§. 13. Quodsi hanc aequationem, et sequentes quae inde nascuntur, tractamus ut supra (§. 3. 4.), nanciscimur

$$(1)\quad 0 = 1 + \gamma_1 a_1,\ \text{deinde, posito}\ \alpha_n + \gamma_{n+1} a_1 = A_n^{(1)},$$

$$(B)\quad 0 = (\gamma_1 + A_1^{(1)} a_2) + (\frac{A_1^{(1)}}{z_3} + \gamma_2 + A_2^{(1)} a_2) x + (\frac{A_2^{(1)}}{z_3} + \gamma_3 + A_3^{(1)} a_2) x^2 + \text{cet.}$$

unde sequitur primum

$$(2)\quad 0 = \gamma_1 + A_1^{(1)} a_2,\ \text{praetereaque posito}\ \gamma_n + A_n^{(1)} a_2 = A_n^{(2)},$$

$$(C)\quad 0 = (A_1^{(1)} + A_2^{(2)} a_3) + (\frac{A_2^{(2)}}{z_4} + A_2^{(1)} + A_3^{(2)} a_3) x + \text{cet.}$$

unde pariter sequitur

$$(3)\quad 0 = A_1^{(1)} + A_2^{(2)} a_3.$$

§. 14. Quum haec aequatio (C) nihil differat a supra inventa (C) (§. (4.), eaedem quoque consequentiae jure inde deducuntur, unde, ut supra, aequationes obtinentur generales (§. 6.)

$$(a)\quad a_m = -\frac{A_{m-2}^{(m-2)}}{A_{m-1}^{(m-1)}};\quad (b)\quad A_n^{(m)} = A_{n-1}^{(m-2)} + A_n^{(m-1)} a_m;$$

$$(c)\quad A_n^{(m)} = A_{n-1}^{(m-2)} - A_n^{(m-1)} \frac{A_{m-2}^{(m-2)}}{A_{m-1}^{(m-1)}};$$

ubi respectu priorum terminorum animadvertere oportet, esse

$0 = 1 + \gamma_1 \, a_1$; $0 = \gamma_1 + A^{(1)}_1 \, a_2$; $A^{(1)}_n = \alpha_n + \gamma_{n+1} a_1$;
$A^{(2)}_n = \gamma_n + A^{(1)}_n \, a_2$.

Haud inutile erit, et hanc methodum exemplo illustrare.

§. 15. Quaesita tangente arcus u in fractionem continuam evoluta, novimus esse

$$\text{tang}\, u = \frac{u - \frac{u^3}{1.2.3} + \frac{u^5}{1.2.3.4.5} - \frac{u^7}{1.2\ldots7} + \text{cet.}}{1 - \frac{u^2}{1.2} + \frac{u^4}{1.2.3.4} - \frac{u^6}{1.2\ldots6} + \text{cet.}} = u\,.\,S,$$

posito nempe $u^2 = x$, et serie

$$S = \frac{1 - \frac{1}{1.2.3} x + \frac{1}{1.2.3.4.5} x^2 - \frac{1}{1.2\ldots7} x^3 + \text{cet.}}{1 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2.3.4} x^2 - \frac{1}{1.2\ldots6} x^3 + \text{cet.}}.$$

Est itaque $\alpha_1 = -\frac{1}{1.2.3}$, $\alpha_2 = +\frac{1}{1.2.3.4.5}$, $\alpha_r = -\frac{1}{1.2.3\ldots(2r+1)}$,
$\alpha_s = +\frac{1}{1.2.3\ldots(2s+1)}$; $\beta_1 = -\frac{1}{2}$; $\beta_2 = +\frac{1}{2.3.4}$, $\beta_r = -\frac{1}{1.2.3\ldots2r}$,
$\beta_s = +\frac{1}{1.2.3\ldots2s}$, proinde
$\gamma_1 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = +\frac{1}{3}$; $\gamma_2 = -\frac{4}{1.2.3.4.5}$, $\gamma_r = +\frac{2r}{1.2.3\ldots(2r+1)}$,
$\gamma_s = -\frac{2s}{1.2.3\ldots(2s+1)}$; unde reperitur

$a_1 = -\frac{1}{\gamma_1} = -3$;

$$A^{(1)} = \alpha_n - 3\,\gamma_{n+1} = \pm \frac{1}{1.2.3\ldots(2n+1)} \mp \frac{6\,(n+1)}{1.2.3\ldots(2n+3)} = \pm \frac{4n\,(n+1)}{1.2.3\ldots(2n+3)};$$

$$a_2 = -\frac{\gamma_1}{A^{(1)}_1} = +\frac{1.2.3.4.5}{3.4.2} = +5;$$

$$A^{(2)}_n = \gamma_n + 5\, A^{(1)}_n = \mp \frac{2n}{1.2.3\ldots(2n+1)} \pm \frac{5.4.n\,(n+1)}{1.2.3\ldots(2n+3)} = \mp \frac{8(n+1)\,n\,(n-1)}{1.2.3\ldots(2n+3)};$$

$$a_3 = -\frac{A^{(1)}_1}{A^{(2)}_2} = -\frac{4.2}{1.2.3.4.5} \times \frac{1.2.3.4.5.6.7}{8.3.2.1} = -7;$$

$$A^{(3)}_n = A^{(1)}_{n-1} - 7\, A^{(2)}_n = \mp \frac{4\,(n-1)n}{1.2.3\ldots(2n+1)} \pm \frac{7.8.(n+1)\,n\,(n-1)}{1.2.3\ldots(2n+3)} = \mp \frac{16\,(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)}{1.2.3\ldots(2n+3)};$$

$$a_4 = -\frac{A^{(2)}_2}{A^{(3)}_3} = +\frac{8.3.2.1}{1.2.3\ldots7} \times \frac{1.2.3\ldots.8.9}{16.4.3.2.1} = +9;$$

$$A^{(4)}_n = A^{(2)}_{n-1} + 9\,A^{(3)}_n = \pm\frac{8n(n-1)(n-2)}{1.2.3\ldots(2n+1)} \mp \frac{9.16(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3\ldots\ldots(2n+3)}$$

$$= \pm\frac{32(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3\ldots\ldots(2n+3)}.$$

§. 16. Hinc jam perspicitur lex, quae quidem valet usque ad $r = 3$ et $s = 4$; formulisque sequentibus declaratur:

(1) $a_r = -(2r+1)$; (2) $a_s = +(2s+1)$;

(3) $A^{(r)}_n = +2(n-r+1)\;A^{(r-1)}_n$;

(4) $A^{(s)}_n = -2(n-s+1)\;A^{(s-1)}_n$.

Praeterea patet, quemcunque e valoribus exhibitis $A^{(m)}_n$, si $n+1$ pro n substituatur, signum $\pm$ mutare, divisumque esse per $2(n-m+1)(2n+5)$, ita ut sit

(5) $A^{(m)}_{n+1} = -\dfrac{A^{(m)}_n}{2(n-m+1)(2n+5)}$. Quibus praemissis sequitur

(4) $A^{(s)}_s = -2\,A^{(r)}_{r+1}$, ob (5) $A^{(r)}_{r+1} = \dfrac{-A^{(r)}_r}{2(2r+5)}$,

$A^{(s)}_s = +\dfrac{A^{(r)}_r}{2r+5}$, ideoque

quum in universum sit (§. 14. (a)) $a_{r+2} = -\dfrac{A^{(r)}_r}{A^{(s)}_s}$,

(6) $a_{r+2} = -(2r+5)$.

Praeterea est (5) $A^{(s)}_{s+1} = -\dfrac{A^{(s)}_s}{2(2s+5)} = -\dfrac{A^{(r)}_r}{2(2r+5)(2s+5)}$,

ideoque $a_{r+2}A^{(s)}_{s+1} = +\dfrac{A^{(r)}_r}{2(2s+5)}$. Quare quum sit (§. 14. (b))

$A^{(s+1)}_{s+1} = A^{(r)}_{r+1} + a_{r+2}\;A^{(s)}_{s+1}$, sequitur

$$A^{(s+1)}_{s+1} = -\frac{A^{(r)}_r}{2}\left(\frac{1}{2r+5} - \frac{1}{2s+5}\right) = -\frac{A^{(r)}_r}{(2r+5)(2s+5)},$$

Est autem in genere (§. 14. (a)) $a_{s+2} = -\frac{A_s^{(s)}}{A_{s+1}^{(s+1)}}$, unde substituto $A_s^{(s)} = \frac{A_r^{(r)}}{2r+5}$, prodit

(7) $a_{s+2} = +(2s+5)$.

Quum aequationes (6), (7), nil aliud sint nisi formulae (1), (2), in quibus $r+2$ et $s+2$ pro r et s substitutae sunt, sequitur, legem (1) et (2) esse universalem. Est itaque $a_n = \pm(2n+1)$, atque numeri a_1 a_2 etc. sequentem constituunt seriem:

$-3, +5, -7, +9, -11, +13$, etc. cujus termini signo $+$ aut $-$ afficiuntur; prout forma $4n+1$ aut $4n-1$ induti sunt. Restituto jam valore $x = u^2$, et tang $u = u$. S, obtinetur

$$\text{tang. } u = \cfrac{u}{1+\cfrac{u^2}{-3+\cfrac{u^2}{5+\cfrac{u^2}{-7+\cfrac{u^2}{9+\ldots}}}}} = \cfrac{u}{1-\cfrac{u^2}{3-\cfrac{u^2}{5-\cfrac{u^2}{7-\cfrac{u^2}{9-\cfrac{u^2}{11-\text{cet.}}}}}}}$$

§. 17. Proposita serie ejusmodi formae, ut denominatoris termini iidem quidem sint ae numeratoris, at signis alternis, videlicet

$$S = \frac{1+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3+\text{cet.}}{1-\alpha_1 x+\alpha_2 x^2-\alpha_3 x^3+\text{cet.}} \quad \text{ubi (§. 12.)}$$

$\beta_1 = -\alpha_1$, $\beta_2 = +\alpha_2$, etc. ideoque $\gamma_1 = 2\alpha_1$; $\gamma_2 = 0$, et generatim $\gamma_r = +2\alpha_r$, $\gamma_s = 0$. Hinc reperitur (§. 14.)

$$a_1 = -\frac{1}{2\alpha_1};\ A_r^{(1)} = \alpha_r,\ A_s^{(1)} = \alpha_s - \frac{\alpha_{s+1}}{\alpha_1} = \frac{\alpha_1\alpha_s - \alpha_{s+1}}{\alpha_1};$$

$$a_2 = -\frac{\gamma_1}{A_1^{(1)}} = -2;\ A_r^{(2)} = \gamma_r - 2A_r^{(1)} = 0,$$

$$A_s^{(2)} = -2A_s^{(1)} = 2\frac{\alpha_{s+1}-\alpha_1\alpha_s}{\alpha_1};\ a_3 = -\frac{A_1^{(1)}}{A_2^{(2)}} = \frac{\alpha_1^2}{2(\alpha_1\alpha_2-\alpha_3)};$$

$$A_r^{(3)} = A_{r-1}^{(1)} + a_3 A_r^{(2)} = A_{r-1}^{(1)} = \frac{\alpha_1 \alpha_{r-1} - \alpha r}{\alpha_1};$$
$$A_s^{(3)} = A_r^{(1)} + a_3 A_s^{(2)} = \alpha_r + \frac{\alpha_1 (\alpha_{s+1} - \alpha_1 \alpha_s)}{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3};$$
$$a_4 = -\frac{A_2^{(2)}}{A_3^{(3)}} = +2; \quad A_r^{(4)} = A_{r-1}^{(2)} + 2 A_r^{(3)} = 0;$$
$$A_s^{(4)} = A_r^{(2)} + 2 A_s^{(3)} = 2 A_s^{(3)} = 2 \alpha_r + \frac{2\alpha_1 (\alpha_{s+1} - \alpha_1 \alpha_s)}{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3}.$$

§. 18. Lex qua istae quantitates procedunt, satis jam apparet. Reperimus nempe usque ad $m = 2$,

$$(1)\ a_{2m} = \pm 2; \quad (2)\ A_r^{(2m)} = 0; \quad (3)\ A_s^{(2m)} = \pm 2 A_s^{(2m-1)};$$
$$(4)\ A_r^{(2m-1)} = A_{r-1}^{(2m-3)};$$

ubi signum superius vel inferius adhibendum est, prout m numerus par vel impar.

Quum igitur in universum sit (§. 14. (b))

$$A_{2m+1}^{(2m+1)} = A_{2m}^{(2m-1)} + A_{2m+1}^{(2m)} a_{2m+1} = A_{2m}^{(2m-1)}, \text{ ob } A_{2m+1}^{(2m)} = 0$$

per aequationem (2), atque $A_{2m}^{(2m)} = \pm 2 A_{2m}^{(2m-1)}$ per (3), quumque praeterea sit (§. 14. (a)) $a_{2m+2} = -\frac{A_{2m}^{(2m)}}{A_{2m+1}^{(2m+1)}}$, sequitur

$a_{2m+2} = \mp 2$; quae aequatio ostendit, formulam (1) generaliter veram esse, h. e. cunctos denominatores indicis paris a_{2m} esse $= 2$, at signa $\pm$ alternare, ita ut sit

$$a_2 = -2,\ a_4 = +2,\ a_6 = -2,\ a_8 = +2; \text{ et in genere}$$
$$(5)\ a_{4n} = +2; \quad (6)\ a_{4n+2} = -2.$$

Praeterea est generaliter (§. 14. (b))

$$A_r^{(2m+1)} = A_{r-1}^{(2m-1)} + A_r^{(2m)} a_{2m+1}, \quad \text{et} \quad A_n^{(2m+2)} = A_{n-1}^{(2m)} + A_n^{(2m+1)} a_{2m+2}.$$

Prior dat, ob aequationem (2),

$$(7)\ A_r^{(2m+1)} = A_{r-1}^{(2m-1)}.$$

Posterior dat, substituto $a_{2m+2} = \mp 2$, et valore (7),

$$A_r^{(2m+2)} = A_{r-1}^{(2m)} \mp 2 A_{r-1}^{(2m-1)}, \quad \text{et} \quad A_s^{(2m+2)} = A_r^{(2m)} \mp 2 A_s^{(2m+1)};$$

unde, ob (3) $A_{r-1}^{(2m)} = \pm 2 A_{r-1}^{(2n-1)}$, et (2) $A_r^{(2m)} = 0$, fit

$$(8)\ A_r^{(2m+2)} = 0, \text{ et } (9)\ A_s^{(2m+2)} = \mp 2 A_s^{(2m+1)}.$$

Quae aequationes quum exacte congruant cum (2) et (3), pariterque aequatio (7) cum (4), sequitur, aequationes (1), (2), (3), (4), in universum veras esse.

§. 19. Quod quidem ad denominatores indicis imparis a_r attinet, in genere est (§. 14. (a)) $a_r = -\frac{A_{r-2}^{(r-2)}}{A_{r-1}^{(r-1)}} = \mp \frac{A_{r-3}^{(r-4)}}{2A_{r-1}^{(r-2)}}$, ob aequationes (3) et (4), ubi signum superius adhibendum est, si $r - 1 = 4n$, inferius autem, si $r - 1 = 4n + 2$. Est igitur in genere (10) $a_{4n+1} = -\frac{A_{4n-2}^{(4n-3)}}{2A_{4n}^{(4n-1)}}$, et (11) $a_{4n-1} = +\frac{A_{4n-4}^{(4n-5)}}{2A_{4n-2}^{(4n-3)}}$. Veruntamen series proposita, quae maxime regularis videtur, id habet incommodi, quod, quo simpliciores sint numeri a_s, eo magis sunt implicati a_r, atque ordo quo progrediuntur, adeo est absconditus, ut unus altero pluribusve antecedentibus immediate exprimi nequeat. Quamobrem in iis supputandis ad formulas generales (10) et (11) recurrere oportet, in quo quidem negotio insigne se offert compendium. Aequationes enim modo repertae (§. 18.) non solum viam nobis aperiunt, evolutione continuata cunctos numeros a_r numeris $A_n^{(1)}$ exprimere; sed fractionis a_r denominator non differt a numeratore fractionis a_{r+2}, siquidem invenimus (10) et (11)

$$a_r = \pm \frac{\frac{1}{2} A_{r-3}^{(r-4)}}{A_{r-1}^{(r-2)}} \quad \text{et} \quad a_{r+2} = \mp \frac{A_{r-1}^{(r-2)}}{2A_{r+1}^{(r)}}.$$

§. 20. Tali modo reperitur (§. 17. 18.) et (10) (11):

$$a_1 = -\frac{1}{2A_1^{(1)}}; \quad a_3 = -\frac{A_1^{(1)}}{A_2^{(2)}} = +\frac{\frac{1}{2}A_1^{(1)}}{A_2^{(1)}} = +\frac{\frac{1}{2}A_1^{(1)}}{b},$$

$$a_5 = -\frac{A_2^{(1)}}{2A_4^{(3)}} = -\frac{\frac{1}{2}b}{A_3^{(1)} - 2a_3 A_4^{(1)}} = \frac{-\frac{1}{2}b}{c},$$

$$a_7 = + \frac{A_4^{(3)}}{2\,A_6^{(5)}} = \frac{+\frac{1}{2}c}{A_4^{(1)} + 2a_5A_6^{(3)}} = \frac{+\frac{1}{2}c}{A_4^{(1)} + 2a_5A_5^{(1)} - 4a_3a_5A_6^{(1)}} = \frac{+\frac{1}{2}c}{d};$$

$$a_9 = - \frac{A_6^{(5)}}{2A_8^{(7)}} = \frac{-\frac{1}{2}d}{A_6^{(3)} - 2a_7A_8^{(5)}} = \frac{-\frac{1}{2}d}{A_5^{(1)} - 2(a_3+a_7)\,A_6^{(1)} - 4a_5a_7A_8^{(3)}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}d}{A_5^{(1)} - 2\,(a_3+a_7)\,A_6^{(1)} - 4a_5a_7A_7^{(1)} + 8a_3a_5a_7A_8^{(1)}} = \frac{-\frac{1}{2}d}{e};$$

cujus progressionis lex facile animadvertitur. Reperitur nempe

$$a_{11} = \frac{+\frac{1}{2}e}{A_6^{(1)} + 2(a_5a_9)A_7^{(1)} - 4(a_3a_5 + a_3a_9 + a_7a_9)A_8^{(1)} - 8a_5a_7a_9A_9^{(1)} + 16a_3a_5a_7a_9A_{10}^{(1)}},$$

et sic porro.

Quantitates $A^{(1)}$, e quibus hae formulae sunt compositae, reperiuntur ope aequationum (§. 17.) $A_r^{(1)} = \alpha_r$ et $A_s^{(1)} = \alpha_s - \frac{\alpha_{s+1}}{\alpha_1}$. Denominatores a_2, a_4, etc. sunt $= \pm 2$ (§. 18.).

Exemplum I.

§. 21. Proposita serie $S = \frac{1 + x + x^2 + x^3 + cet.}{1 - x + x^2 - x^3 + cet.}$, habemus $\alpha_n = + 1$, adeoque $A_r^{(1)} = + 1$, $A_s^{(1)} = 0$; unde eruitur

$a_1 = -\frac{1}{2}$; $a_2 = -2$; $a_3 = \frac{1}{0}$; $a_4 = +2$; $a_5 = 0$; $a_6 = -2$; etc.

Quare quum sit $z_3 = a_3 + \cfrac{x}{a_4 + \cfrac{x}{\dots}}$ (§. 12.), fit

$$z_3 = \infty,\ z_2 = a_2 + \frac{x}{z_3 + \dots} = a_2,\ z_1 = a_1 + \frac{x}{z_2} = a_1 + \frac{x}{a_2},$$

eritque $S = \cfrac{1}{1 + \cfrac{x}{z_1}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{x}{a_1 + \cfrac{x}{a_2}}}$, ubi fractio abrumpitur. Est itaque

$$S = \cfrac{1}{1 - \cfrac{2x}{1 + x}} = \frac{1 + x}{1 + x - 2x},\ \text{h. e.}\ \frac{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + cet.}{1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - cet.} = \frac{1 + x}{1 - x}.$$

quod quidem per se patet, siquidem numerator seriei est $= (1 + x)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \text{cet.})$, denominator autem $= (1 - x)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \text{cet.})$.

Exemplum II.

§. 22. Data serie $S = \frac{1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \text{cet.}}{1 - x + 2x^2 - 3x^3 + 4x^4 - \text{cet}}$, est (§. 17.)

$$a_n = + n,\ A_r^{(1)} = + r,\ A_s^{(1)} = s - (s + 1) = - 1;$$

unde deducitur

$$a_1 = -\tfrac{1}{2},\ a_2 = -2,\ a_3 = -\tfrac{1}{2},\ a_4 = +2,\ a_5 = +\tfrac{1}{4},\ a_6 = -2,$$

$$a_7 = +1,\ a_8 = +2,\ a_9 = \infty;\ \text{ergo}\ z_8 = a_8 + \frac{x}{a_{9+\cdots}} = a_8 = +2;$$

et fractio in termino octavo abrumpitur, quod indicio est, seriei summam assignari posse. Facile namque perspicitur, posito

$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \text{cet.} = M$, et $1 - x + 2x^2 - 3x^3 + \text{cet.} = N$, ita ut sit $S = \frac{M}{N}$, esse $M = 1 + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{1 - x + x^2}{(1-x)^2}$, cumque M abeat in N, quando x negativum induit valorem, esse $N = \frac{1 + x + x^2}{(1+x)^2}$, ideoque $S = \frac{(1 - x + x^2)(1 + x)^2}{(1 + x + x^2)(1 - x)^2} = \frac{(1 + x)(1 + x^3)}{(1 - x)(1 - x^3)}$; sive $S = \frac{1 + x + x^3 + x^4}{1 - x - x^3 + x^4}$.

Qua serie comparata cum forma supra exhibita (§. 12. 14.), erit $\alpha_1 = + 1$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = \alpha_4 = + 1$, $\beta_1 = - 1$, $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = - 1$, $\beta_4 = + 1$; atque omnes coëfficientes indice affecti quaternione majore evanescunt. Est itaque

$$\gamma_1 = +2,\ \gamma_2 = 0,\ \gamma_3 = +2,\ \gamma_4 = 0,\ \gamma_5 = 0,\ \gamma_6 = 0,\ \text{etc.}$$

unde obtinetur

$$a_1 = -\tfrac{1}{2},\quad A_1^{(1)} = +1,\ A_2^{(1)} = -1,\ A_3^{(1)} = +1,$$
$$A_4^{(1)} = +1;\ A_5^{(1)} = A_6^{(1)} = 0\ \text{etc.}$$

$$a_2 = -2;\ A_2^{(2)} = +2,\ A_3^{(2)} = 0,\ A_4^{(2)} = -2,$$
$$A_5^{(2)} = 0,\ A_6^{(2)} = 0,\ \text{etc.}$$

$a_3 = -\frac{1}{2}$; $A^{(3)}_3 = -1$, $A^{(3)}_4 = +2$, $A^{(3)}_5 = +1$,
$A^{(3)}_6 = 0$, $A^{(3)}_7 = 0$, etc.

$a_4 = +2$; $A^{(4)}_4 = +4$; $A^{(4)}_5 = 0$, $A^{(4)}_6 = 0$, etc.

$a_5 = +\frac{1}{4}$; $A^{(5)}_5 = +2$, $A^{(5)}_6 = +1$, $A^{(5)}_7 = 0$, $A^{(5)}_8 = 0$, etc.

$a_6 = -2$; $A^{(6)}_6 = -2$, $A^{(6)}_7 = 0$, $A^{(6)}_8 = 0$, etc.

$a_7 = +1$; $A^{(7)}_7 = +1$, $A^{(7)}_8 = 0$, $A^{(7)}_9 = 0$, etc.

$a_8 = +2$; $A^{(8)}_8 = 0$, $A^{(8)}_9 = 0$, $a_9 = -\frac{1}{0}$;

cuncta ut supra,

MESURE DE LA HAUTEUR DU MONT *ELBRUS*, AU-DESSUS DU NIVEAU DE LA MER.

PAR

V. WISNIEWSKI.

Présenté à la Conférence le 20 Mars 1816.

Parmi les nombreuses chaines de montagnes, qui traversent et limitent le vaste Empire de Russie, celle du *Caucase* occupe un rang distingué, à cause de son élévation et de son étendue; et elle mérite à ce titre une attention particulière de la part des géognostes. Mais malheuresement cette célèbre chaine est habitée par des peuples, dont le brigandage et la défiance mettent de grands obstacles aux voyages scientifiques; nos connaissances par rapport à cette chaine resteront donc probablement encore long tems très - imparfaites. Dans ces circonstances une observation même isolée ne saurait être sans intérêt, si elle fait accroître la masse des matériaux, pour la description future de cette chaine de montagnes; c'est aussi dans cette persuasion que j'ose présenter à l'Académie Impériale les observations et le calcul de la hauteur du mont *Elbrus*, accompagnés de quelques remarques, sur la position de la ville d'*Astrakhan* au-dessous du niveau de la mer.

La chaine des montagnes *Caucases* se compose des alpes très élevées et fort escarpées, dont la plupart ont des cimes couvertes de neiges éternelles. On distingue parmi ces alpes principalement une montagne, ayant la forme d'un cône tronqué, et située dans la partie occidentale de la chaine. Les peuples montagnards la nom-

ment, *Elbrus*. L'académicien *Güldenstädt*, qui avait fait un voyage scientifique dans les contrées méridionales de la Russie pendant les années 1768 - 1775, remarque, que cette montagne est la plus élevée des alpes du *Caucase* *). Et en effet on peut s'en convaincre aisément en - été, si on compare entre elles les cimes de ces alpes : parceque le voile blanc, qui couvre la surface conique du mont *Elbrus*, surpasse de beaucoup en étendue les convertures pareilles des cimes des autres montagnes, en ayant égard, dans cette éstime, à leur situation respective.

MM. *Engelhardt* et *Parrot* ayant fait en 1812 un nivellement barométrique de la ligne du *Caucase*, avaient désiré de déterminer aussi la hauteur du mont *Elbrus*, par une opération du même genre; cependant ils ont été contraint d'y renoncer, en partie à cause de la méfiance des montagniards, qui n'ont pas voulu y consentir, en partie aussi parce que d'autres obstacles s'y opposaient. Mais une pareille entreprise faite sur le mont *Kasbek*, situé près du chemin de *Géorgie*, a été couronnée d'un plein succès ; M. *Parrot* y monta plus de 500 toisses au-dessus de la limite des neiges éternelles, et il éstima la cime plus élevée, de 240 toisses. Cette station étant élevée, d'apres les observations barométriques, de 2167,9 toisses au-dessus du niveau de la mer noire**), il en conclut la hauteur du mont *Kasbek* 2400 toisses au-dessus du même niveau; presque la même que celle du *Montblanc*, la plus élevée des montagnes d'Europe. L'erreur d'éstimation ne peut être ici que très peu considérable, vu la proximité de la station à la cime. Ce résultat rendait donc la détermination de la hauteur du mont *Elbrus* d'autant plus désirable, que cette montagne est la plus élevée de la chaine, comme nous l'avons deja remarqué ci-dessus.

---

*) D. Johann Anton *Güldenstädt* Reisen durch Rußland und im Caucasischen Gebürge, herausgegeben von P. S. *Pallas*, St. Petersburg 1791 II. Theil pag. 25.

**) Reise in die Krym und den Kaukasus, von Moritz von *Engelhardt* und Friedrich *Parrot*, Berlin 1815 Vol. I. pag. 205.

Faisant en l'année 1812 des observations astronomiques à la ligne du *Caucase*, pour y déterminer la position géographique de plusieurs points, je saisis l'occasion de déterminer aussi la hauteur du mont *Elbrus*. Les mêmes obstacles, qui se sont présentés à MM. *Engelhardt* et *Parrot*, ne me permirent pas de monter sur cette montagne; c'est pourquoi je me decidai à mesurer sa hauteur trigonométriquement. La saison fort avancée n'étant point favorable à l'exécution de cette opération, je la rémis à l'année suivante; cependant j'observai encore la distance apparente au zénith et l'azimuth du mont *Elbrus*, à *Stawropol* le 11 Novembre. Impatient de connaître à peu-près la hauteur de cette montagne au-dessus du niveau de la mer, je supposai sa distance de *Stawropol* d'après la lévée militaire, exécutée par des officiers d'Etat-Major; et ayant fait le calcul sur ces données et sur mes observations barométriques de *Stawropol*, j'en ai tiré 16700 pieds de France pour la hauteur cherchée. Le mont *Elbrus* se trouva donc d'après ce résultat approximatif effectivement beaucoup plus élevé que le mont *Kasbek*.

Je me portai au mois de Mai de l'année suivante vers le mont *Elbrus*, dans la vue d'y approcher autant que possible; mais né pouvant me fier à des montagniards avec mes instruments, sans m'exposer à des grands risques, je fus contraint de faire mon opération près de nos forteresses *Konstantinogorskaja* et *Kislowodskaja*; où j'ai observé les distances apparentes au zénith et les azimuths de la dite montagne, et les hauteurs du baromètre et du thermomètre. Il fallait encore déterminer trigonométriquement les distances de ces stations au mont *Elbrus*, mais les circonstances ne m'ayant pas permis d'y mesurér pour cet effet une base assez grande, j'aimai mieux calculer ces distances de la position géographique de *Stawropol* et des stations de *Konstantinogorskaja* et de *Kislowodskaja*, déterminée récemment par moi, et combinée avec les azimuths du mont *Elbrus*, que j'y avais observés. L'élévation des trois stations ci-dessus mentionnées au-dessus du niveau de la

mer a été déterminée par la comparaison de mes observations du baromètre et du thermomètre avec celles, qui ont été faites à *Astrakhan* par le Correspondant de l'Académie Mr. le Conseiller de Collége de *Lokhtine*.

Ayant ainsi rassemblé les données nécessaires, j'en ai déduit la hauteur du mont *Elbrus* plus exactement, en la fixant par deux déterminations différentes à 2898 toisses; comme l'on verra ci-après dans l'exposé de mes observations.

La position de la ville d'*Astrakhan* par rapport au niveau de la mer, m'a été nécessaire pour la détermination de celle des mes stations; je la calculai donc sur différentes observations barométriques, qui m'ont donné pour résultat, que la ville d'*Astrakhan* est située 37, 8 toisses au-dessous du niveau de l'océan. On trouvera à la fin de ce mémoire les données, sur lesquelles est fondé ce résultat remarquable.

EXPOSITION DES OBSERVATIONS.

N'ayant eu d'autre instrument, pour la mesure des angles, qu'un sextant à réflexion de huit pouces de rayon, exécuté par *Troughton*, dont j'étais muni pour la détermination de la position géographique des principaux points de l'Empire, je ne pouvais mesurer directement la distance apparente de la cime du mont *Elbrus* au zénith, parceque l'image de cette montagne n'a pu être observée dans l'horison artificiel. J'observai donc avec le sextant des distances du soleil à la cime de la dite montagne, pendant que cet astre se trouvait près de son vertical. Ces distances étant réduites au vertical mentionné, et puis ajoutées aux distances apparentes du soleil au zénith, qui ont été calculées pour le moment de l'observation, donnaient pour résultat la distance ap-

parente de la cime au zénith du lieu d'observation. Mais il fallait aussi déterminer l'azimuth de la cime du mont *Elbrus*, pour pouvoir calculer l'instant du passage du soleil par le vertical mentionné; c'est que j'ai fait moyennant d'autres distances du soleil à la cime, observées loin du dit vertical.

On peut voir assez souvent à la ligne du *Caucase* la chaine des glaciers dans toute sa splendeur le matin et soir; mais en revanche elle se présente très rarement vers le midi, où un brouillard épais la dérobe presque toujours aux yeux de l'observateur. Cette circonstance ne m'était pas favorable, parceque aux trois stations ci-dessus mentionnées le mont *Elbrus* git dans des directions peu eloignées du midi, comme l'on voit dans la figure 2de Tab. IX; il m'était donc impossible de multiplier les observations près des verticaux de la montagne autant que je l'aurais fait, pour diminuer l'influence de l'incertitude de la réfraction terrestre. Cependant l'accord entre les résultats, ci-dessous indiqués pour la hauteur du mont *Elbrus*, est plus grand que je n'osai l'espérer; et je me flatte que le résultat moyen s'approche très près de la vérité.

La cime du mont *Elbrus* se divise en deux éminences peu élevées, situées presque sous le même parallèle, dont l'éminence occidentale, ayant une pointe au bord occidental, forme un assez bon signal; l'éminence orientale au contraire n'offre pas, à beaucoup près, cet avantage. Je les nommerai desormais cime *occidentale* et cime *orientale*.

Avant d'exposer mes observations, je vais indiquer les formules, sur lesquelles je les ai calculées. Soit donc (Fig. 1 Tab. IX) Z le zénith du lieu de l'observation, E la cime du mont *Elbrus*, et S le soleil. En conséquence EZ et SZ soient des distances apparentes de la cime et du soleil au zénith, et ES la distance apparente du soleil à la cime. Ayant les trois côtés mentionnés, je

calculai l'angle SZE, ou la différence des azimuths de la cime et du soleil, par la formule connue :

[1] $$\cos SZE = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(\gamma - ES) \sin \frac{1}{2}(\gamma + ES)}{\sin SZ \sin EZ};$$

où l'angle auxiliaire γ est déterminé par l'équation :

$$\cos \gamma = \cos SZ \cos EZ.$$

Ajoutant l'angle SZE à l'azimuth du soleil, j'obtenais l'azimuth de la cime du mont *Elbrus*.

Je determinai la distance de la cime mentionnée au zénith, comme je l'ai déjà dit, par des distances du soleil à la cime observées, lorsque cet astre se trouvait près du vertical EZ. Or si l'observation eut été faite dans le vertical même, le triangle ZSE se réduirait à l'arc EZ, et on aurait alors la distance de la cime au zénith simplement égale à la somme des distances apparentes du soleil au zénith et à la cime; ainsi on aurait :

$$ES' = EZ - S'Z = EZ - SZ$$

$$\text{et } \cos ES' = \cos (EZ - SZ).$$

Mais pour une distance observée hors du vertical mentionné, le même triangle SZE donne :

$$\cos ES = \cos (EZ - SZ) - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} SZE \sin EZ \sin SZ$$

d'où l'on tire :

$$2 \sin \tfrac{1}{2} (ES - ES') = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} SZE \sin EZ \sin SZ}{\sin \frac{1}{2} (ES + ES')}.$$

L'arc (ES — ES') n'excédant pas un degré, on peut mettre $2 \sin \frac{1}{2} (ES - ES') = \Delta (ES)$, et diviser le second membre par $\sin 1''$ pour l'avoir en secondes; ainsi cette équation se change en :

[2] $$\Delta (ES) = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} SZE \sin EZ \sin SZ}{\sin \left(ES + \frac{\Delta ES}{2}\right) \sin 1''}.$$

Au moyen de cette formule j'ai calculé les réductions ΔES pour des distances observées près du vertical EZ.

Voici maintenant mes observations :

Distances du soleil

à la cime *orientale* du mont *Elbrus*, observées à *Stawropol* le 11 Novembre 1812 n. st., sous $45^\circ\ 3'\ 0'',0$ de latitude.

N°. de l'observation.	Tems solaire vrai avant midi, observé au chronomètre de *Barraud*.	Distance apparente du soleil à la cime *orientale*, observée, réduite au centre du soleil et corrigée de l'erreur du sextant.
I.	$10^h\ 0'35'',9$	$28^\circ\ 14'\ 20''$
II.	10 2 15, 5	28 4 20
III.	11 20 32, 0	26 7 12
IV.	11 23 28, 0	26 14 18
V.	11 24 28, 0	26 17 41

Ayant calculé d'abord par les observations I. et II. l'azimuth approché de la cime *orientale* du mont *Elbrus*, au moyen d'une valeur éstimée de EZ, mise dans la formule [1], je réduisis les distances observées III. IV. et V. au vertical ZE passant par la cime mentionnée; c'est-à-dire aux distances S′E, en retranchant des distances SE les corrections ΔSE, calculées sur la formule [2]. Ces distances ainsi réduites, étant ajoutées aux distances correspondantes du soleil au zénith, donnaient des valeurs approchées de l'inconnue ZE; dont la valeur moyenne étant mise dans le calcul de la formule [1], donna l'azimuth par l'observation I. $= 348^\circ\ 27\ 31''$ et par l'observation II. $= 348^\circ\ 25'\ 34''$. Mettant dans le calcul de la formule [2] pour l'azimuth la valeur moyenne $348^\circ\ 26'\ 32''$, et pour ZE la valeur approchée, j'en ai tiré pour les observations III. IV. et V. les résultats suivans:

N°. de l'observation.	ΔSE, ou la réduction de la distance au vertical.	Distance du soleil à la cime *orientale*, observée, réduite au centre du soleil et au vertical.	Distance apparente du soleil au zénith calculée pour le moment de l'observation.	Distance apparente de la cime *orientale* au zénith, conclue de l'observation.
III.	1′ 3″,4	26° 6′ 8″,6	73° 6′ 21″,4	89° 12′ 30″
IV.	3 19,9	26 10 58,1	73 0 54,5	89 11 53
V.	4 23,6	26 13 17,4	72 59 8,8	89 12 26

D'où je conclus la distance apparente de la cime *orientale* du mont *Elbrus* au zénith de la station
(*a*) de *Stawropol* - - - - 89° 12′ 16″.

Je rapporte ici encore les observations faites à *Stawropol* l'année suivante, dans la vue de déterminer plus exactement l'azimuth du mont *Elbrus;* elles sont avec leurs résultats les suivantes:

Distances du soleil

à la cime *orientale* du mont *Elbrus*, observées à *Stawropol* le 22 Août 1813 nouveau style.

N°. de l'observation.	Tems solaire vrai avant midi, observé au chronomètre de *Barraud*.	Distance apparente du soleil à la cime *orientale*, réduite au centre du soleil et corrigée de l'erreur du sextant.	Azimuth de la cime *orientale* conclu de l'observation.
I.	7ʰ 41′ 8″,2	70° 42′ 23″	348° 23′ 5″
II.	7 57 27,7	68 26 49	348 23 46
III.	7 59 52,3	68 6 37	348 22 55

Azimuth de la cime *orientale* du mont *Elbrus*
(*b*) observé à *Stawropol* - - 348° 23′ 15″.

Le même azimuth a été observé l'année précédente = 348° 26′ 32″, mais le lieu d'observation d'alors était situé 150 pas, ou à-peu-près 50 toisses vers l'orient. Supposant la distance du mont *Elbrus* 99000 toisses, la réduction du dit azimuth au dernier

lieu d'observation sera — 1′ 42″,0, et par conséquent l'azimuth même = 348° 24′ 50″; ce qui diffère 1′ 35″ de l'azimuth tantôt déterminé. Cette différence est fondée en partie sur ce que la cime *orientale* n'est pas pointue, et que par conséquent le point de mire devait-y-être éstimé; le tems ayant été plus favorable à la dernière détermination (*b*), je pense qu'il vaut mieux s'en tenir exclusivement à celle-ci.

Voici encore les observations, qui ont été faites pour la détermination de l'azimuth de la cime *occidentale*.

Distances du soleil

à la cime *occidentale* du mont *Elbrus*, observées à *Stawropol* le 22 Août 1813 nouveau style.

N°. de l'observation.	Tems solaire vrai, avant midi.	Distance apparente du soleil à la cime *occidentale*, observée, réduite au centre du soleil et corrigée de l'erreur du sextant.	Azimuth de la cime *occidentale* conclu de l'observation.
IV.	7ʰ 44′ 14″,2	70° 37′ 49″	348° 46′ 20″
V.	7 47 6,0	70 12 29	348 46 40
VI.	7 52 38,8	69 26 14	348 46 53
VII.	8 2 42,3	68 4 57	348 47 47
VIII.	8 6 14,5	67 36 51	348 47 54

Azimuth moyen de la cime *occidentale* du mont *Elbrus*, observé à *Stawropol* - 348° 47′ 7″. (*c*)

La chaine des glaciers du *Caucase*, qui à *Stawropol* n'est point visible hormis le seul mont *Elbrus*, se présenta dans toute sa splendeur à la séconde station, près de la forteresse *Konstantinogorskaja*; elle y occupe au delà de soixante dix degrés de l'horison depuis *SE*, ou elle semble commencer par le mont *Kasbek*,

jusqu'au $S\,O\frac{1}{4}S$, où elle finit par le mont *Elbrus*. Les observations faites à cette station, et les résultats obtenus par la méthode ci-dessus exposée, sont les suivans :

Distances du soleil

à la cime *orientale* du mont *Elbrus*, observées le 6 Juin 1813 n. st. près de la fortesse *Konstantinogorskaja*, sous 44° 2′ 35″,3 de latitude.

N°. de l'observation.	Tems vrai solaire, observé au chronomètre de *Barraud*.	Distance apparente du centre du soleil à la cime *orientale*, observée et corrigée de l'erreur du sextant.	Azimuth de la cime *orientale* conclu de l'observation.
I.	7^h 43′ 28″,3 av. m.	113° 32′ 10″	31° 17′ 5″
II.	7 59 3,3 av. m.	110 26 43	31 17 29
III.	8 11 9,7 av. m.	108 2 59	31 16 58
IV.	5 29 27,9 ap. m.	70 50 5	31 15 25
V.	5 44 19,7 ap. m.	72 55 30	31 14 20

Valeur moyenne de l'azimuth de la cime *orientale* du mont *Elbrus*, observé à la station de *Kon-*
(*d*) *statinogorskaja* - - - 31° 16′ 15″.

Quoique les azimuths conclus des observations IV. et V. ne s'accordent pas sensiblement avec ceux des trois premières observations, néanmoins je ne crois pas qu'il soit nécessaire de les exclure ; parceque cette discordance provient en majeure partie de la forme de la cime même qui, n'étant pas pointue, offrait à l'observation un très mauvais signal.

Distances du soleil

à la cime *occidentale* du mont *Elbrus*, observées le 6. Juin 1813
au même lieu d'observation.

N°. de l'observation.	Tems vrai solaire, après midi.	Distance du soleil à la cime *occidentale* observée, réduite au centre du soleil et corrigée de l'erreur du sextant.	Azimuth de la cime *occidentale* conclu de l'observation.
VI.	5^h 33′ 19″,2	70° 30′ 59″	32° 9′ 28″
VII.	5 47′ 55,5	72 34 0	32 9 27

Azimuth de la cime *occidentale* du mont *Elbrus* 32° 9′ 28″. (*e*)

Voici les observations, que j'ai faites le même jour pour la détermination de la distance apparente de deux cimes au zénith.

Distances du soleil

à la cime *orientale* du mont *Elbrus*.

N°. de l'observation.	Tems vrai solaire après midi.	Distance du soleil à la cime *orientale* observée, réduite au centre du soleil et corrigée de l'erreur du sextant.	Δ E S, ou la réduction de la distance au vertcal ZE	Distance apparente de la cime *orientale* au zénith, conclue de l'observation.
VIII.	0^h 57′ 42′,9	62° 38 5″	— 1′ 27′,3	87° 4 55″
IX.	0 59 26,0	62 29 50	— 2 40,7	87 5 50
X.	1 4 51,5	62 0 54	— 8 54,4	87 4 56
XI.	1 6 29,8	61 53 53	— 11 28,9	87 6 7
XII.	1 14 55,2	61 12 18	— 29 38,4	87 4 37
XIII.	1 16 3,2	61 8 36	— 32 41,3	87 6 3

Distance apparente de la cime *orientale* au zénith de la station de *Konstantinogorskaja* - - - 87° 5′ 25″ (*f*)

Distances du soleil

à la cime *occidentale* du mont *Elbrus*.

N°. de l'observation.	Tems vrai solaire après midi.	Distance apparente du soleil à la cime *occidentale*, observée réduite au centre du soleil et corrigée.	ΔES, ou la reduction de la distance au vertical ZE.	Distance apparente de la cime *occidentale* au zénith, conclue de l'observation.
XIV.	1h 0′ 40″,0	62° 21′ 18″	— 2′ 15″,6	87° 5′ 19″
XV.	1 1 50,0	62 15 8	— 3 12,8	87 5 29
XVI.	1 8 9,4	61 41 13	— 11 12,8	87 4 50
XVIII.	1 9 19,4	61 35 26	— 13 12,0	87 4 58

(g) Distance apparente de la cime *occidentale* au zénith de la station de *Konstantinogorskaja* - - 87° 5′ 9″,0.

J'avais été contraint de prendre ma troisième station sur une montagne assez éloignée de la forteresse *Kislowodskaja*, parceque près de cette forteresse les montagnes circonvoisines derobent la vue de la chaine de glaciers du *Caucase*. Ayant lié cette station avec la forteresse par un triangle orienté, dont la base avait 7648 pieds anglais de longueur, j'ai trouvé sa position par rapport au centre de la forteresse 0° 0′ 1″,0 au nord, et la différence des méridiens en arc 0° 2′ 32″,0 à l'orient. La latitude de la forteresse ayant été déterminée par moi 43° 54′ 6″,0, celle de la station mentionnée est en conséquence 43° 54′ 7″,0. Les observations que j'y ai faites sont avec leurs résultats les suivantes :

Distances du soleil
à la cime *occidentale* du mont *Elbrus*, observées le 13 Juin 1813 n. st.

No. de l'observation.	Tems vrai solaire, observé au chronomètre de *Barraud* av. m.	Distance du soleil à la cime *occidentale* observée, réduite au centre du soleil et corrigée de l'erreur du sextant.	Azimuth de la cime *occidentale* du mont *Elbrus*, conclu de l'observation.
I.	10ʰ 47′ 19″,0	76° 10′ 39″	23° 15′ 32″
II.	10 49 36,4	75 51 48	23 15 50
III.	10 52 43,0	75 26 4	23 15 30

Azimuth de la cime *occidentale* du mont *Elbrus*, observé à la station *Kislowodskaja* - 23° 15′ 39″. (*h*)

Distances du soleil
à la cime *occidentale* du mont *Elbrus*, observées le même jour.

No. de l'observation.	Tems vrai solaire, après midi.	Distance apparente du soleil à la cime *occidentale*, observée, réduite au centre du soleil et corrigée de l'erreur du sextant.	ΔES, ou la réduction de la distance au vertical ZE.	Distance apparente de la cime *occidentale* au zénith, conclue de l'observation.
IV.	0ʰ 30′ 47″,4	64° 47 55′	−3′ 0″,2	86° 22′ 43″
V.	0 32 9,8	64 41 26	−1 50,4	86 22 27
VI.	0 33 55,3	64 33 37	−0 46,0	86 22 29
VII.	0 35 11,7	64 28 17	−0 16,7	86 22 44
VIII.	0 36 16,9	64 23 27	−0 3,2	86 22 37
IX.	0 38 3,3	64 15 48	−0 3,7	86 22 32
X.	0 39 17,3	64 10 48	−0 20,4	86 22 42
XI.	0 41 18,9	64 1 40	−1 16,6	86 21 55
XII.	0 43 4,1	63 55 26	−2 33,8	86 22 44
XIII.	0 44 54,5	63 48 22	−4 23,0	86 22 56
XIV.	0 46 24,5	63 42 8	−6 13,2	86 22 29
XV.	0 47 33,7	63 37 57	−7 50,6	36 22 42

Distance apparente de la cime *occidentale* au zénith de la station *Kislowodskaja* - - 86° 22′ 35″. (*i*)

Après avoir ainsi déterminé les distances apparentes des cimes du mont *Elbrus* au zénith des stations, je vais à présent calculer leurs distances rectilignes aux stations mêmes; en me servant pour cet effet d'une base déduite de la position géographique des stations de *Stawropol* et de *Konstantinogorskaja*, qui a été determinée par moi au moyen de deux chronomètres et du sextant à réflexion mentionné. Soit donc dans le triangle sphérique QSO (Fig. 3 Tab. IX). S la station de *Stawropol*, O celle de *Konstantinogorskaja* et Q le pôle; en conséquence soit QS le complément de la latitude de la station de *Stawropol*, QO celui de la latitude de la station de *Konstantinogorskaja*, et l'angle SQO la différence des méridiens de ces stations. Ces trois parties du triangle étant connues, je calcule l'arc SO, ou la distance de deux stations, par la formule:

$$\sin \tfrac{1}{2} SO = \sqrt{\sin^2 \tfrac{1}{2}(QO - QS) + \sin^2 \tfrac{1}{2} SQO \sin QS \sin OQ};$$

et puis les angles QSO et SOQ par celles-ci:

$$\sin QSO = \frac{\sin QO}{\sin SO} \sin SQO$$

$$\sin SOQ = \frac{\sin QS}{\sin SO} \sin SQO.$$

D'après mes observations $QS = 44^\circ\, 57'\, 0''$, $QO = 45^\circ\, 57'\, 24'',7$ et l'angle $SQO = 1^\circ\, 3'\, 26'',85$; il en résulte:

(*j*) $SO = 1^\circ\, 15'\, 27'',51$

(*k*) $QSO = 142\;\; 48\;\; 47,9$

(*l*) $QOS = 36\;\; 26\;\; 41,5.$

La distance de la station de *Stawropol* à celle de *Konstantinogorskaja*, et les angles QSO et QOS étant ainsi calculés dans l'hypothèse de la terre sphérique, je vais à présent les réduire au sphéroide, dont je suppose l'applatissement d'après Mr. *Délambre* $\frac{1}{308,65} = 0,00324$, le rayon de l'équateur étant $= 1$, et en conséquence le carré de l'excentricité $e^2 = 0,006,4693$.

Soit (Fig. 4 Tab. IX) PSK la surface du sphéroide terrestre, P son pôle; soyent S et K les deux stations, dont les lati-

tudes observées H et $H_{,}$; en tirant les deux normales SM et KM′, qui couperont l'axe aux points M et M′, on aura l'angle SMP = 90° − H et KM′P = 90° − $H_{,}$. Décrivons du point M avec la normale SM comme rayon une surface sphérique SQNO; elle passera nécessairement par le point S de la première station, et coupera les prolongements de l'axe terrestre et de la normale de la seconde station aux points Q et N. Du centre M de cette sphère tirons au point K la ligne MK, dont le prolongément se confondra nécessairement avec la partie NK du prolongement de la normale M′K, à cause de la petitesse de l'angle MKM′; il s'agit maintenant de déterminer ce dernier angle. La partie CM de l'axe terrestre, interceptée entre les centres du sphéroide C, et de la sphère décrite M, étant *)

$$CM = \frac{e^2 \sin H}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}} = 0{,}006{,}4693 \sin H + 0{,}000{,}0209 \sin^3 H \ldots,$$

et la normale, ou le rayon de la surface sphérique décrite

$$SM = \frac{1}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}} = 1 + 0{,}003{,}2346 \sin^2 H + 0{,}000{,}0157 \sin^4 H \ldots \quad [3]$$

On a $MM' = 0{,}006{,}4850 \times 2 \sin \tfrac{1}{2} (H - H_{,}) \cos \tfrac{1}{2} (H + H_{,})$

$- 0{,}000{,}0157 \sin (H - H_{,}) \cos \tfrac{3}{2} (H + H_{,}) \ldots$

ou même sans erreur sensible dans notre cas:

$$MM' = 0{,}006{,}4693 \sin (H - H_{,}) \cos \left(\frac{H + H_{,}}{2}\right).$$

Or le triangle MKM′ donne l'angle MKM′ en secondes, qui soit desormais designé par $dH_{,} = \frac{M M'}{M K} \frac{\cos H_{,}}{\sin 1''}$, ou:

$$dH_{,} = 1334'',4 \sin (H - H_{,}) \frac{\cos H_{,}}{MK} \cos \left(\frac{H + H_{,}}{2}\right);$$

en y mettant SM pour MK, qui en diffère très peu, comme nous le verrons ci-après, il vient:

$$dH_{,} = 1334'',4 \sin (H - H_{,}) \cos H_{,} \cos \left(\frac{H + H_{,}}{2}\right)$$

$$- 4'',3 \sin (H - H_{,}) \sin^2 H \cos H_{,} \cos \left(\frac{H + H_{,}}{2}\right) \ldots\ldots \quad [4]$$

Les latitudes H et $H_{,}$ des stations de *Stawropol* et de *Konstanti-*

---

*) Méthodes analytiques pour la détermination d'un arc du méridien, par *Delambre*, Paris an VII pag. 69.

nogorskaja ayant été determinées par moi $45° 3' 0'',0$ et $44° 2' 35'',3$, cette formule donne $dH_{\prime} = 11'',993$.

Du centre M de la sphère et dans le plan PMK tirons une ligne parallèle à la normale M′K de la station *Konstantinogorskaja*, elle traversera la surface de la sphère au point O, et l'arc NO sera la mesure de l'angle ci-dessus déterminé $= dH_{\prime}$. L'angle PMO est donc $= PM'K = 90° - H_{\prime} = 45° 57' 24'',7$. Ainsi il est évident que j'ai calculé ci-dessus, dans l'hypothèse de la terre sphérique pour la distance de deux stations l'arc de cercle $SO = (j) = 1° 15' 27'',51$; je vais donc le réduire à l'arc SN, qui est la mesure de l'angle au centre SMN. Soit λ la différence des méridiens de deux stations, ou l'inclinaison de deux plans PSM et PKM, l'arc SO est donné par l'équation :

$$\cos SO = \cos\lambda \cos H \cos H_{\prime} + \sin H \sin H_{\prime},$$

qui étant différentiée par rapport à SO et à $H_{\prime}$ determine

$$d(SO) = -dH_{\prime}\left(\frac{\sin(H - H_{\prime}) + 2\sin^2\frac{1}{2}\lambda\cos H\sin H_{\prime}}{\sin SO}\right).$$

Calculant cette équation, je trouve la correction de l'arc SO ou $d(SO) = -9'',65$, et l'arc SN en degrés, ou l'angle SMN
(m) $= 1° 15' 17'',86$.

La corde du sphéroide SK, ou la distance rectiligne entre les deux stations, est determinée par l'equation :

$$SK = \sqrt{(SM - KM)^2 + 4\sin^2\tfrac{1}{2}(SMN) \times SM \,.\, KM}.$$

Mais dans le triangle MKM′ on a: $(KM - KM') = dH_{\prime}\sin 1'' KM' \tan H_{\prime}$ $= \frac{KM'}{KM} MM' \sin H_{\prime} = e^2 \frac{KM'}{KM} \sin(H - H_{\prime}) \sin H_{\prime} \cos\left(\frac{H + H_{\prime}}{2}\right)$. $\frac{KM'}{KM}$ différant très peu de l'unité, on peut mettre :

$$KM = KM' + e^2 \sin(H - H_{\prime}) \sin H_{\prime} \cos\left(\frac{H + H_{\prime}}{2}\right).$$

Or $KM' = 1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 H_{\prime} + \frac{3}{8} e^4 \sin^4 H_{\prime} \ldots$ [3]

et $SM = 1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 H + \frac{3}{8} e^4 \sin^4 H \ldots$

donc $SM - KM = \frac{1}{2} e^2 (\sin^2 H - \sin^2 H_{\prime}) + \frac{3}{8} e^4 (\sin^4 H - \sin^4 H_{\prime}) \ldots$
$- e^2 \sin(H - H_{\prime}) \sin H_{\prime} \cos\left(\frac{H + H_{\prime}}{2}\right)$;

ou en négligeant les quantités du cinquième ordre :

$$SM - KM = KN = 2e^2 \sin^2\left(\frac{H-H_{/}}{2}\right) \cos^2\left(\frac{H+H_{/}}{2}\right) = \frac{1}{2} e^2 \sin^2 (H - H_{/}) \cos^2\left(\frac{H+H_{/}}{2}\right)$$

$$= 0{,}003{,}2346 \sin^2 (H - H_{/}) \cos^2 \left(\frac{H+H_{/}}{2}\right). \qquad [5]$$

(SM — KM) étant du quatrième ordre, on peut omettre son carré dans l'équation de la corde ci-dessus donnée, qui se réduit à celle-ci:

$$SK = 2 \sin \tfrac{1}{2}\, SMN \sqrt{\overline{SM}\,.\,\overline{KM}};$$

ou même sans erreur sensible à $SK = 2 \sin \frac{1}{2} SMK \,.\, SM$. Ainsi la corde du [6]
sphéroide SK ne diffère sensiblement de la corde correspondante SN de la sphère circonscrite; et elle est dans notre cas

$$= 2 \sin \tfrac{1}{2} (m)\, SM = 0{,}021{,}9383, \qquad (n)$$

en parties du demi-grand axe du sphéroide.

Nous avons encore à déterminer les corrections des angles QSO et QOS calculés ci-dessus (k) et (l). Le triangle sphérique NSO donne

$$\sin NSO = \sin NO \frac{\sin NOS}{\sin SN}\,; \text{ c'est-à-dire :}$$

$$d\,(QSO) = dH_{/} \frac{\sin QOS}{\sin NS} = 325'',3.$$

Retranchant donc $d\,(QSO) = 5'\,25'',3$ de l'angle QSO (k), nous aurons l'angle $QSN = 142°\,43'\,22'',6$. (o)

Pour calculer la correction de l'autre angle QOS, je decris du point M′ comme centre, avec la normale M′K de la station *Konstantinogorskaja* comme rayon, une autre surface sphérique, qui coupera les prolongements de l'axe terrestre et de la normale SM de *Stawropol* aux points $Q_{/}$ et $N_{/}$; et je tire du point M′ et dans le plan PM′S une ligne parallèle à la normale SM, qui traversera cette surface sphérique au point $O_{/}$. L'arc $N_{/}O_{/}$ sera donc la mesure de l'angle $M'SM = -dH$, et l'angle $Q_{/}M'O_{/}$ sera égal à l'angle $PMS = 90° - H$. En outre l'angle $PM'K = PMO = 90° - H_{/}$, et la différence des méridiens λ restant les mêmes, les triangles sphériques $Q_{/}O_{/}K$ et QSO sont semblables; et on a pour la détermination de la correction de l'angle $SOQ = O_{/}KQ_{/}$ l'équation :

$$d\,(SOQ) = d\,(O_{/}KQ_{/}) = dH \frac{\sin Q_{/}O_{/}K}{\sin N_{/}K}.$$

L'équation [4] donne $dH = 11'',788$; et on a
$N_{,}K = O_{,}K + d(O_{,}K) = OS + d(O_{,}K) = 1^\circ 15' 27'',5 - 9'',4$
$= 1^\circ 15' 18'',1$ et $Q_{,}O_{,}K = QSO$ .... (k).
Avec ces quantités on trouve $d(O_{,}KQ_{,}) = 5'25'',3$, égale à $d(QSO)$; on a ainsi l'angle $Q_{,}KN_{,}$, c'est-à-dire l'angle que fait le plan vertical SNM' passant par la station de *Stawropol* avec le méridien de la station *Konstantinogorskaja* PKM' (l) $=$
(p) $36^\circ 26' 41'',5 + 5' 25'',3 = 36^\circ 32' 6'',8$.

Nous allons à présent déterminer les distances rectilignes des deux cimes du mont *Elbrus* aux trois stations ci-dessus mentionnées, et la position géographique de mêmes cimes.

Calcul par rapport à la cime orientale.

L'azimuth de la cime *orientale* observé à *Stawropol*, se trouve dans l'exposition des observations (b) $= 348^\circ 23' 15''$; en retranchant l'angle QSN $+ 180^\circ = (o)$ .. $322^\circ 43' 22'',6$ nous aurons l'angle que font deux plans verticaux passans par la station *Konstantinogorskaja* et par la cime *orientale*, l'angle qui soit désigné par la lettre $S = 25^\circ 39' 52'',4$. L'azimuth de la même cime observé à la station *Konstantinogorskaja* (d) : . $31^\circ 16' 15''$ étant ajouté à l'angle $Q_{,}KN_{,}$ ci-dessus calculé (p) . . $36^\circ 32' 6'',8$, donne la somme $67^\circ 48' 21'',8$, qui étant déduite de 180° laisse pour résidu l'angle K, que font les plans verticaux passans par la cime *orientale* et par la station de *Stawropol* $= 112^\circ 11' 38'',2$. Si on mène des points S et K du sphéroide les cordes KE et SE au point E du sphéroide, situé au-dessous de la cime *orientale* du mont *Elbrus*, on construira un triangle rectiligne SEK, dont le côté SK (n) est donné. Pour avoir les angles y adjacents S et K, il faut réduire les angles horisontaux, ci-dessus trouvés S et K, au plan de ce triangle, au moyen des dépressions des points K et E, et S et E, calculées pour les points S et K. Mais comme il n'est

pas nécessaire de déterminer pour cet effet ces dépressions rigoureusement, on pourra sans inconvénient négliger la différence, qui existe entre le sphéroide et les surfaces sphériques circonscrites. En conséquence on pourra regarder les côtés du triangle rectiligne SEK comme des cordes d'une sphère, et calculer, par le théorème de Mr. *Legendre*, l'excès sphérique de la somme de trois angles du triangle sphérique correspondant SEK sur 180°, par la formule: l'excés en secondes $= (SMN)'' \text{ tang } \frac{1}{2} SMN \frac{\sin S \sin K}{\sin(S+K)}$. Cet excès se trouve dans notre cas $= 29'',6$, dont le tiers $9'',9$ étant retranché des angles horisontaux K et S, les réduit aux angles du triangle plan SEK. On a ainsi l'angle $S = 25° 39' 42'',5$, et l'angle $K = 112° 11' 28'',3$; en outre la corde du sphéroide SK, ou un côté du triangle SEK étant trouvé ci-dessus (*n*) . . = 0.021,9383, on en déduit les distances rectilignes de la cime *orientale* aux stations de *Stawropol* et de *Konstantinogorskaja*, c'est-a-dire:

la corde du sphéroide SE = 0,030,2716, (*q*)
et la corde - - KE = 0,014,1581. (*r*)

Puisque les cordes du sphéroide ne diffèrent pas sensiblement des cordes correspondantes des sphères circonscrites . . [6], on aura en divisant les cordes SE et KE par les normales correspondantes SM et KM' (Fig. 4), on aura dis-je le double des sinus de la moitié des angles aux centres M et M'. Les normales SM et KM' étant [3] . 1,001,6241 et 1,001,5670, on trouve:

l'angle SME = 1° 43' 54'',08 (*s*)
et l'angle KM'E = 0 48 35, 78. (*t*)

Pour calculer la position géographique de cette cime, désignons par la lettre K (Fig. 4) le point du sphéroide situé au-dessous d'elle, S soit encore le point du sphéroide correspondant à la station de *Stawropol*, et N soit le point où le prolongement de la normale M'K de la cime traverse la surface sphérique, décrite du point

M avec la normale SM comme rayon. L'angle QSN sera en conséquence égal à l'azimuth de la cime, observé à *Stawropol* (*b*), moins $180^\circ = 168^\circ\ 23'\ 15''$; l'angle QMS = arc QS, au complément de la latitude de *Stawropol* $= 44^\circ\ 57'\ 0''$, et l'angle SMN (*s*) = arc NS $= 1^\circ\ 43'\ 54'',08$. Dans le triangle sphérique QSN ayant deux côtés QS et SN et l'angle compris, le trosième côté se trouve par l'équation :

$$\cos QN = \cos QSN \sin QS \sin SN + \cos QS \cos SN;$$

d'où l'on tire QN $= 46^\circ\ 38'\ 50'',2$. Cet arc étant la mesure de l'angle QMN, on aura l'angle QM′N, ou le complément de la latitude de la cime, en y ajoutant l'angle MKM′, qui se trouve par la formule [4] $= 20'',6$. Ainsi QM′K $= 90^\circ - H_/ = 46^\circ 39' 10'';8$; et la latitude de la cime *orientale* du mont *Elbrus* $= 43^\circ 20' 49'',2$.

On a de même dans le triangle sphérique QSN la différence des méridiens de *Stawropol* et de la cime *orientale* = SQN = $\lambda_/$ par la formule $\sin SQN = \frac{\sin SN \ \sin QSN}{\sin QN}$; qui donne SQN $= 0^\circ\ 28'\ 45'',5$, dont la cime *orientale* git vers l'orient de *Stawropol*.

Calcul par rapport à la cime occidentale.

En conservant par rapport à cette cime les mêmes lettres dont nous nous sommes servi ci-dessus par rapport à la cime *orientale*, et en tenant la même marche, que nous y avons suivie, nous aurons l'angle S, ou l'inclinaison de deux plans verticaux, passans par la station *Konstantinogorskaja* et la cime *occidentale*, (*c*) — 180° — (0) $= 20^\circ\ 3'\ 44'',4$; et l'angle K, contenu entre les deux plans verticaux passans par la station de *Stawropol* et la cime mentionnée, 180 — (*e*) — (*p*) $= 111^\circ\ 18'\ 25'',2$. L'excès sphérique du triangle sphérique SKE se trouve $= 29'',9$, dont le tiers étant déduit des angles S et K, les réduit à $20^\circ\ 3'\ 34'',4$

et 111° 18′ 15″,2, qui sont les angles S et K du triangle plan SKE, dans lequel on connait en outre le côté SK, ou la distance rectiligne de la station de *Stawropol* à celle de *Konstantinogorskaja* (n) = 0,021,9383; on en conclut les distances rectilignes de la cime *occidentale* aux deux stations mentionnées, ou

la corde SE = 0,030,1756 (u)

et la corde KE = 0,014,2285; (v)

et les angles aux centres des sphères circonscrites (Fig. 4) savoir:

l' angle SME = 1° 43′ 34″,29 (x)

et l'angle KM′E = 0 48 50, 28 (y)

Déterminant la position géographique de cette cime de la même manière que celle de la cime *orientale*, je trouve avec l'azimuth observé à *Stawropol* (c) l'arc QN (Fig. 4). = 46° 38′ 39″.0; en y ajoutant la correction de latitude $dH_{\prime}$ = angle MKM′ = 20″,6, j'obtiens l'angle QM′K = 90° — $H_{\prime}$ = 46° 38′ 59″,6, et par conséquent la latitude de la cime *occidentale* du mont *Elbrus* = 43° 21′ 0″,4. (z)

La différence des méridiens entre cette cime et la station de *Stawropol* résulte de ces données = 0° 27′ 42″,0 orientale. (aa)

Déterminons à présent la distance rectiligne de la cime *occidentale* à la troisième station, celle près de la forteresse *Kislowodskaja*. Soit pour cet effet (Fig. 4) S la position de cette station sur le sphéroide, et K celle de la cime mentionnée; l'angle QMS, ou l'arc de cercle QS, sera en conséquence le complément de la latitude de cette station = 90° — H, qui est d'après mes observations = 46° 5′ 53″,0; l' angle QM′K = QMO = l'arc QO = 90° − $H_{\prime}$, sera le complément de la latitude de la cime *occidentale*, ci-dessus calculé (z) = 46° 38′ 59″,6; et l'angle QSN, que fait avec le méridien le plan vertical passant par la cime mentionnée, est égal à 180° — l'azimuth de la cime (h) = 156° 44′ 21″. Ainsi pour pouvoir résoudre le triangle sphérique QSN, nous réduirons

l'angle QMO = l'arc QO = $(90^\circ - H_{,})$, à l'arc QN = $(90^\circ - H_{,} - dH_{,})$, en retranchant l'arc NO = $dH_{,}$, qui se trouve par la formule [4] = 6″,76; l'arc QN est donc = 46° 38′ 52″,84. Ayant dans le triangle QSN deux côtés et un angle opposé à l'un des côtés, on
(bb) trouve le troisième côté SN = 0° 35′ 53″,15, qui est la mesure de l'angle au centre SMK. La normale SM étant - - [3] = 1,001,5590, il en résulte la corde SK, ou la distance rectiligne de la cime *occidentale* à la station près de la forteresse *Kislowodskaja*
(cc) $= 2 \sin \frac{1}{2}$ SMK $\times$ SM = 0,010,4550.

Il nous reste encore à calculer seulement les hauteurs des cimes du mont *Elbrus* au-dessus du niveau de la mer. Soit donc (Fig. 5) SH l'horison et SM la normale du lieu de l'observation, et ESH la hauteur de la cime y observée et corrigée de l'effet de la réfractoin terrestre. SN étant la corde d'un arc de cercle décrit avec la normale du lieu SM comme rayon, et SH la tangente du même arc, l'angle HSN sera $= \frac{1}{2}$ SMN; on a donc dans le triangle ESN l'angle ESN = ESH $+ \frac{1}{2}$ SMN, l'angle SEN = 90° — ESH — SMN, et SN = SK, parceque la corde du sphéroide ne diffère pas sensiblement de la corde de la sphère circonscrite. Ainsi, après avoir exprimé en toises la distance rectiligne de la cime au lieu de l'observation, ou la corde SK, on aura la valeur
[7] de la ligne EN en toises $= \text{SK}\,\frac{\sin(\text{ESH} + \frac{1}{2}\text{SMN})}{\cos(\text{ESH} + \text{SMN})}$; en y ajoutant la valeur de NK [5] $= 10583^t,4 \sin^2 (H - H_{,}) \cos^2 (\frac{H + H_{,}}{2})$, où $H_{,}$ est la latitude de la cime, et en y joignant la hauteur du lieu de l'observation au-dessus du niveau de la mer, la somme sera la hauteur de la cime au-dessus du même niveau.

Calcul de la hauteur de la cime orientale au-dessus du niveau de la mer.

La distance apparente de la cime *orientale* au zénith fut observée à *Stawropol* (*a*) 89° 12′ 16″, prennant son complément nous aurons = 0° 47′ 44″; en y rétranchant pour la réfraction terrestre d'après Mr. *Delambre* 0,08 × SMN = 8′ 18″,7, il vient l'angle ESH = 0°39′25,3. L'angle SMN (*s*) étant = 1° 43′ 54″,08, l'angle (ESH + $\frac{1}{2}$ SMN) est = 1° 31′ 22″,3, et l'angle (ESH + SMN) = 2° 23 19″,4; en outre on a la corde SK (*q*) = 0,030,2716, qui étant multipliée par le rayon de l'équateur, exprimé en toises, et augmenté de la hauteur de la station au-dessus du niveau de la mer = 3272119 toises, devient = 99052 toises. Avec ces données on tire de la formule [7] la valeur de EN - - - - - = 2634^{t}7,

La dépression du point K du sphéroïde au-dessous de la surface sphérique, ou la valeur de NK se trouve - - 4^t,8

La hauteur de la station de *Stawropol* au-dessus du niveau de la mer, a été trouvée ci-dessous - - 255^t,3

Il résulte donc, de l'observation faite à *Stawropol*, la hauteur de la cime *orientale* au-dessus du niveau de la mer - - - - - - - 2894^t,8

De même la distance apparente de cette cime au zénith ayant été observée à la seconde station, celle près de la forteresse *Konstantinogorskaja* (*f*) = 87° 5′ 25″, on en a le complément = 2° 54′ 35″; en retranchant pour la réfraction 0,08 × SMN = 3′ 53″,3, il vient l'angle ESH = 2° 50′ 41″,7. L'angle SMN fut trouvé ci-dessus (*t*) = 0° 48′ 35″,78, l'angle (ESH + $\frac{1}{2}$ SMN) est donc = 3° 14′ 59″,6, et l'angle (ESH + SMN) = 3° 39′ 17″,5,

La distance rectiligne de cette cime à la station *Konstantinogorskaja*, ou la corde S K trouvée ci-dessus (r) = 0,014,1581, contient 46327 toises; et il resulte de ces données CN 2631^t,7
on a la dépression NK - - - 0, 8

et la hauteur de la station *Konstantinogorskaja* au-dessus du niveau de la mer, determinée ci-dessous 245, 9

La hauteur de la cime *orientale* au-dessus du niveau de la mer, se trouve donc par l'observation faite à la station *Konstantinogorskaja* - - - - - - 2878, 4.

Calcul de la hauteur de la cime occidentale, au-dessus du niveau de la mer.

A la même station fut observée la distance apparente de la cime *occidentale* au zénith (g) = $87° 5' 9''$, dont le complément est = $2° 54' 51''$; en déduisant la réfraction terrestre $0,08 \times$ SMN = $3' 54'',4$, il vient l'angle ESH = $2° 50' 56'',6$ L'angle SMN (y) étant = $0° 48' 50'',28$, on a (ESH + $\frac{1}{2}$ SMN) = $3° 15\ 21'',7$ et (ESH + SMN) = $3° 39' 46'',8$. Ces angles et la corde SK, ou la distance rectiligne de la cime calculée ci-dessus (v) = 0,014,2285 et contennant 46557 toises, donnent pour la valeur de la ligne EN - - - - - 2649^t,8

la dépression NK est ici - - - 0, 8

et la hauteur de la station *Konstantinogorskaja* au-dessus du niveau de la mer - - 245, 9

On a ainsi la hauteur de la cime *occidentale* au dessus du niveau de la mer - - - 2896, 5.

Les observations faites à la troisième station, celle près de la forteresse *Kislowodskaja*, ont donné la distance apparente de la cime *occidentale* au zénith $(i) = 86° 22' 35''$; en déduisant de son complément pour la réfraction terrestre $2' 52'',2$, il vient l'angle ESH $= 3° 34', 32'',8$. L'angle SMN ayant été trouvé ci-dessus $(bb) = 35' 53'',15$, on a (ESH $+ \frac{1}{2}$ SMN) $= 3° 52' 29'',4$, et (ESH + SMN) $= 4° 10' 26'',0$; et la corde SN, ou la distance rectiligne de la cime à la station *Kislowodskaja* étant $(cc) = 0,010,4550$ ou 34213 toises, on en tire par l'équation [7] EN $2318^t 2$.

La dépression NK est dans ce cas présent seulement - - - -	$0^t,5$
La station était située sur une montagne assez éloignée de la forteresse *Kislowodskaja*; je déterminai sa distance au centre de la forteresse, par un triangle, 11178 pieds anglais, et sa hauteur apparente au-dessus de l'horison de la forteresse $5° 33' 50''$; il en résulte son élévation au-dessus du niveau de la forteresse - - - - -	170, 2
La hauteur de la forteresse *Kislowodskaja* au-dessus du niveau de la mer, déterminée ci-après - - - - -	410, 7
Ainsi la cime *occidentale* s'éléve au-dessus du niveau de la mer, d'après les observations faites à la station *Kislowodskaja* - -	2899, 6.

RÉSUMÉ.

Hauteur de la cime orientale du mont Elbrus.

Les observations faites à la station *Stawropol* la déterminent à - - - - 2894^t,8
et celles de la station *Konstantinogorskaja* à 2878, 4
Je crois devoir donner la préférence à la dernière détermination, qui semble être moins affectée par l'incertitude de la réfraction terrestre, je suppose donc cette cime - - 2878 toises au dessus du niveau de l'océan.

Hauteur de la cime occidentale du mont Elbrus.

Elle résulte des observations faites à la station *Konstantinogorskaja* - - - - 2896^t,5
et de celles, qui ont été faites à la station *Kislowodskaja* 2899, 6
En prenant le milieu, on a pour la hauteur de cette cime au-dessus de l'océan - - 2898 toises.

POSITION DE LA VILLE D'ASTRAKHAN

PAR RAPPORT AU NIVEAU DE L'OCÉAN.

Le correspondant de l'Académie, Mr. le Conseiller de Collége de *Lokhtine*, a fait à *Astrakhan* des observations météorologiques pen-

dant les années 1805 — 1813 inclusivement, et il les a communiquées régulièrement à l'Académie. Cette suite d'observations étant la plus complette qu'on y ait faite, je vais m'en servir pour la détermination de la position de cette ville par rapport au niveau de la mer; et pour cet effet je mets ici aux yeux du Lecteur les hauteurs moyennes annuelles du baromètre et du thermomètre, tirées des résumés annuels, qui ont été rédigés par l'observateur même.

Année.	Hauteur moyenne annuelle du baro mètre e- pouces a- glais.	Hauteur moyenne du thermomètre extérieur de *Réaumur*, ou la temperature moyenne de l'air.
1805	30, 12	+ 9°,4
1806	30, 17	+ 9, 4
1807	30, 21	+ 9, 1
1808	30, 25	+ 8, 6
1809	30, 28	+ 8
1810	30, 26	+ 8
1811	30, 34	+ 8
1812	30, 33	+ 8, 5
1813	30, 37	+ 8, 3

On remarque d'abord dans cette table, que les hauteurs du baromètre se sont accrues successivement. La cause en est fondée en partie dans le changement de logis de l'observateur; qui, ayant demeuré pendant les premiers deux ans au centre et au lieu le plus élevé de la ville, devait y observer nécessairement la hauteur du baromètre moindre qu'à son second logis, situé dans le faubourg, et où le baromètre était suspendu tout-au-plus quatre toises au-dessus du niveau moyen du *Wolga*. Les observations des années 1811, 1812 et 1813, faites dans un nouveau logis, situé dans la ville même, présentent encore une augmentation de la hauteur moyenne du baromètre à peu-près d'une ligne; mais qui cette fois doit

être attribuée à une autre cause, parce que le baromètre était suspendu dans ce logis un peu plus haut, et à-peu-près cinq toises au-dessus du niveau du *Wolga*.* Quoique en général les variations des hauteurs moyennes annuelles du baromètre, dans le climat tempéré, passent quelquefois une ligne; on remarque cependant, qu'elles n'agissent pas dans un sens plusieurs années de suite. Ainsi il est peu probable que cet accroissement, presque constant pendant les années 1811, 1812 et 1813, soit dû à une variation extraordinaire dans l'état de l'atmosphère; au contraire il peut provenir plûtot de quelque dérangement de l'instrument même. Mais dira-t-on: si l'instrument a pu être dérangé dans le transport du second logis au troisième, il a pu l'être, à plus forte raison, aussi dans le trajet de *Kasan*, d'où l'observateur est venu habiter à *Astrakhan*; par conséquent on ne saurait faire aussi aucun usage de ses observations barométriques antérieures à l'année 1811. En effet l'usage de ces observations serait très-précaire, si je n'eusse pas eu l'occasion de comparer le baromètre de Mr. de *Lokhtine* avec mon baromètre à siphon, de la justesse duquel je me suis assuré à plusieurs reprises. Les observations que j'ai faites pour cet effet depuis le 14 jusqu'au 18 Septembre 1811, m'ont donné la hauteur moyenne réduite du baromètre 28,612 pouces français; et les observations faites au baromètre de Mr. de *Lokhtine* donnent pour la même hauteur moyenne, 28,605 pouces français; la correction de la hauteur du baromètre de Mr. de *Lokhtine*, réduite en pouces français, est donc $= + 0^p,007$, dont il faut augmenter les hauteurs moyennes des années 1811, 1812 et 1813.

Les observations antérieures ne pouvant être d'aucun usage, à cause des circonstances ci-dessus énoncées, je me borne à la moyenne des hauteurs du baromètre de trois dernières années, qui est 30,347 pouces anglais, ou 28,475 pouces français; en y appliquant la correction ci-dessus déterminée, elle devient 28,482 pouces français. Le baromètre de Mr. de *Lokhtine* étant à cuvette, il faut encore corriger cette hauteur moyenne à raison de la variation du niveau du mer-

cure dans la cuvette. Le rapport du diametre interieur du tube au diamètre de la cuvette étant inconnu, nous le supposerons être contenu entre $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{10}$, et nous le ferons $\frac{1}{7,5}$. La hauteur du baromètre étant lors de la comparaison $28^p,605$, on aura pour $28^p,475$, la correction $\left(\frac{1}{7,5}\right)^2 . 0^p,13 = 0,002$ pouces; qui est à déduire de la hauteur moyenne corrigée $28^p,482$, et qui la réduit ainsi à 28,480 pouces français. Nous n' avons pas besoin de tenir compte de la dépression du mercure dans le tube du baromètre, due à sa capillarité, parce que cet instrument a été ajusté sur un baromètre à syphon, pour lequel cette correction est nulle.

La température moyenne de l'air, observée par Mr. de *Lokhtine* pendant les derniers trois ans, est $= + 8°,27$ de *Réaumur*, ou $+ 10°,34$ du thermomètre centésimal. Cet observateur n'ayant pas marqué la température du baromètre, nous la fixérons par estime à $+ 14°$ de *Réaumur* ou $+ 17°,5$ du thermomètre centésimal; qui vraisemblablement s' approche très-près de la vérité, le baromètre se trouvant dans un cabinet habité. Au reste un degré de *Réaumur* d'erreur sur la température du baromètre, ne produit qu'une erreur de $0^t,9$ sur la hauteur au-dessus du niveau de la mer.

Pour déduire de ces données la situation de la ville d'*Astrakhan* par rapport au niveau de l'océan, nous les comparérons à la hauteur moyenne du baromètre, observée par Mr. *Shuckburg* au niveau de l'océan à la latitude de 50° sexagésimaux, et qui est 28,183 pouces français, la température moyenne de l'air et du baromètre étant 12°,8 de la division centésimale *). Réduisant la hauteur moyenne du baromètre de Mr. de *Lokhtine*, de la température supposée $+ 17°,5$ du thermomètre centésimal à celle du baromètre de Mr. *Shuckburg*, savoir à 12°,8 centésimaux, nous aurons à retrancher 0,025 pouces, à raison de $\frac{1}{5412}$ de la hauteur du baromètre, pour 1° centésimal de la différence de température.

*) Traité d'Astronomie physique par *Biot* 2de édition Tome III Additions pag. 29.

Ainsi nous avons :
hauteur moyenne du baromètre observée à *Astrakhan*, cinq toises au-dessus du niveau du *Wolga* . . . . 28,455 pouces français,
température moyenne de l'air à *Astrakhan* 10°,34 centésimaux;
hauteur moyenne du baromètre au niveau de l'océan, observée par Mr. *Schuckburg* . . 28,183 pouces français,
température moyenne au niveau de l'océan à 50° de latitude . . 12°,80 centésimaux.
Avec ces données on tire de la formule de Mr. *Laplace*, la dépression du niveau du baromètre de Mr. *Lokhtine* au-dessous du niveau de l'océan $41^t,16$.

J'ai fait à *Taganrock* trois observations du baromètre et du thermomètre, qui pourront aussi servir à la détermination de la position de la ville d'*Astrakhan* par rapport au niveau de la mer, si on voudra les comparer avec des observations correspondantes, faites à *Astrakhan*. Les voici :

Année 1812. nouveau style.	Observations faites à *Taganrock*, douze toises au-dessus du niveau de la mer d'*Asov*.			Observations correspondantes faites à *Astrakhan*, au baromètre et thermomètre de Mr. de *Lokhtine*.	
	d auteur u baromètre.	Température du baromètre, degrés de *Réaumur*.	Température de l'air.	Hauteur du baromètre, réduite en pouces français.	Température de l'air, degrés de *Réaumur*.
le 10 Août à midi . . .	27,92	+19°,4	+20°,4	28,20	+18°,8
le 11 — à 9^h av. m.	28,00	+16, 3	+15, 5	28,32	+18, 8
le 13 — à midi . . .	28,19	+19, 0	+21, 3	28,46	+19, 6
Hauteurs moyennes -	28,037	+18,23	+19,07	28,327	+19°,07

La température du baromètre à *Astrakhan* n'étant pas marquée, nous la supposerons égale à celle de l'air, c'est-à-dire à

19°,07 de *Réaumur*; et ajoutant à la hauteur du baromètre *y* observée la correction ci-dessus mentionnée = + 0^p,007, et retranchant 0^p,005 pour la correction du niveau de la cuvette, nous ferons cette hauteur = 28,329 pouces français. De même réduisant la hauteur moyenne du baromètre, observée à *Taganrock*, à la temperature de 19°07 de *Réaumur*, nous aurons 28,042 pouces français.

On déduit de ces données par la formule de Mr. *Laplace* la dépression du baromètre d'*Astrakhan* au-dessous de celui de *Taganrock* 46^t,40 ; et en retranchant pour l'élévation du dernier baromètre au-dessus du niveau de la mer d'*Asov* 12,0 toises, il vient la dépression du baromètre d'*Astrakhan* au-dessous du niveau de la mer d'*Asov* = 34^t,40; qui diffère de celle, qui a été déduite ci-dessus de la hauteur moyenne du baromètre, observée pendant trois ans, de 6^t, 76 en moins.

Ainsi en prenant le milieu, nous fixérons la dépression du baromètre d'*Astrakhan* au-dessous du niveau de l'océan à 37^t,8; et celle du niveau du *Wolga* 5 toises plus bas, c'est-a-dire à 42^t8. La ville d'*Astrakhan* est donc très-remarquable par sa situation au-dessous du niveau de la mer. Cette ville et la ville *Quito* au *Pérou*, située 1462 toises au-dessus de l'océan, sont les extrêmes parmi toutes les villes de la terre, pour leur situation par rapport au niveau de la mer.

Notre célèbre Naturaliste *Pallas* avait deja observé l'année 1773, que la mer *Caspienne* s'étendait autrefois beaucoup plus loin qu'à présent; et il a même tracé sur une carte le cours de son ancien bord, d'après des observations faites sur l'état salin du sol, sur les coquillages *y* parsemés, qui sont de mêmes genres que celles de la mer *Caspienne*, et sur le vestiges mêmes de l'ancien bord de cette mer, visibles aux environs

de la Colonie de *Sarepta* *). Tous ces indices réculent les limites anciennes de la mer *Caspienne* à-peu-près cinq cents Werstes, ou cinq degrés, au nord des limites actuelles. En même tems ce Naturaliste remarque que, quoique on trouve aussi encore plus haut près du *Wolga* des bancs entiers consistants en coquillages et en coraux, ces-ci appartiennent cependant à des genres qui se trouvent dans l'ocean, et qui n'exsitent ni dans la mer *Caspienne* ni même dans la mer *noire*; cela prouve donc une innondation encore plus considérable, mais qui a été antérieure à l'etat ancien de la mer *Caspienne*. Il parle ensuite de la communication, qui existait autrefois entre cette mer et la mer *noire*, en l'appuyant sur les espèces communes aux deux mers, comme: les chiens de mer, les esturgeons, les argentines, les aiguilles et les pectinites; qui n'auraient pu autrement parvenir dans la mer *Caspienne*. Après la décharge de la mer *noire*, supposée par *Tournefort* **), cette communication s'étant rompue, le niveau de la mer *Caspienne* devait nécessairement s'abaiser successivement, jusqu'à ce que l'évaporation de cette mer soit devenue égale à la quantité de l'eau, reçue par des rivières qui s'y déchargent. *Pallas* estime cet abaissement au delà de quinze toises; mais nous venons de voir ci-dessus, que la mer *Caspienne* est actuellement au delà de 43 toises au-dessous de la mer noire; par conséquent il faudrait supposer cet abaissement encore plus fort.

Il serait à souhaiter que le Gouvernement fit faire des observations physiques et un nivellement, dans la contrée désignée par *Pallas*: pour y déterminer plus exactement les limites anciennes de la mer *Caspienne*, et l'endroit par où cette mer a communiqué autrefois avec la mer *noire*. Ce travail jetterait un plus grand jour sur cette contrée, peut-être unique sur le globe ter-

---

*) P. S. Pallas Reise durch verchiedene Provinzen des Russischen Reichs. St Petersburg 1776 Tome III pag. 570.

**) Relation d'un Voyage au Levant Tom. I. p. 80. Tom. II. p. 63 64.

restre, et sur le mode, dont le changement mentionnée s'est opéré; et peut-être le lieu de l'ancienne jonction naturelle de deux mers, se trouverait-il aussi le plus convenable à leur jonction artificielle.

J'espère que la détermination de la position d' *Astrakhan* par rapport au niveau de la mer, présentée ici à l'Académie Impériale, sera plus exacte que celles, qui ont été faites avant moi, parce que j'ai eu l'avantage de pouvoir vérifier les instruments; et il me semble, que cette détermination ne pourra guères s'éloigner de la vérité au delà de cinq toises. La chute du *Wolga* depuis *Astrakhan* jusqu'à son embouchure ne saurait être bien grande; cependant étant inconnue, elle nous empeche de déterminer la dépression de la mer *Caspienne* au-dessous du niveau de la mer noire. MM. *Engelhardt* et *Parrot* ont déterminé cette dépression par un nivellement double à 54 et 47 toises. Malheureseument une suite d'observations correspondantes du baromètre n'a pu être faite aux bords des deux mers par ces habiles observateurs, à cause du retardement éprouvé par Mr. *Parrot* aux stations des postes; elle aurait donné la dépression mentionnée avec toute la précision désirable. Cependant l'incertitude qui y reste encore, est deja contennue dans des limites très-étroites.

Nous allons à présent déterminer la hauteur de trois stations: *Stawropol*, *Konstantinogorskaja* et *Kislowodskaja*, au-dessus du niveau de la mer.

J' ai fait pour cet effet à *Stawropol* huit observations du baromètre et du thermomètre l'année 1812, entre le 8 Septembre et le 22 Octobre, qui donnent la hauteur moyenne du baromètre 26,574 pouces français, la température moyenne du baromètre étant + 15°,0 de *Réaumur*, et celle de l'air + 14°,75. Ayant tiré des journaux

de Mr. de *Lokhtine* les observations correspondantes, je trouve la hauteur moyenne du baromètre observée à *Astrakhan* 28,401 pouces français, et celle du thermomètre extérieur $= + 12^{\circ},63$ de *Réaumur*. Supposant la température moyenne du baromètre à *Astrakhan* par estime, puisque elle n'est pas marquée, $= 14^{\circ}0$ de *Réaumur*, nous aurons la hauteur du baromètre observée à *Stawropol* et réduite à $14^{\circ},0$ de température $= 26^{p},568$, et la température de l'air $= 18^{\circ},44$ centésimaux. Ajoutant à la hauteur du baromètre, observée à *Astrakhan*, $0^{p},007$, et en y retranchant $0^{p},004$, pour la correction du niveau de la cuvette, elle devient $28^{p},404$, et la température de l'air $15^{\circ},79$ centésimaux.

Avec ces données on trouve par la formule de Mr. *Laplace* la différence des niveaux entre les deux baromètres $= 293^{t},05$; et en retranchant $37^{t},8$ pour la dépression du baromètre d'*Astrakhan* au-dessous du niveau de la mer, on obtient la hauteur de la station de *Stawropol* au-dessus du niveau de la mer $= 255^{t},3$.

Seize observations faites à la station *Konstantinogorskaja* en 1813 entre le 3 et le 10 Juin, m'ont donnée la hauteur moyenne du baromètre réduite à 14° de *Réaumur* de température $= 26,546$ pouces français, et la température moyenne de l'air $= + 19^{\circ},05$ centésimaux. Autant d'observations correspondantes faites à *Astrakhan* déterminent la hauteur moyenne et corrigée du baromètre $= 28,319$ pouces français, dont je suppose la température $+ 14^{\circ},0$ de *Réaumur*, très-peu différente de la température de l'air y observée $16^{\circ},46$ centésimaux. Il en résulte la différence des niveaux entre les deux baromètres $283^{t},7$; et en déduisant pour la dépression du baromètre d'*Astrakhan* $37^{t},8$, il en resulte la hauteur de la station *Konstantinogorskaja* au-dessus du niveau de la mer $= 245^{t},9$.

Enfin six observations faites par moi à la forteresse *Kislowodskaja* depuis le 10 jusqu'au 13 Juin 1813 inclusivement,

donnent la hauteur moyenne du baromètre réduite à la température de 21°,96 centésimaux = 25,513 pouces français, et la température moyenne de l'air pendant ces observations = 21°,04 centésimaux. Les observations correspondantes d'*Astrakhan* donnent la hauteur corrigée du baromètre 28,219 pouces français, dont je crois devoir supposer cette fois la température égale à celle de l'air, qui a été observée 21°, 96 centésimaux. On trouve par ces données la différence des niveaux de ces baromètres 448ᵗ,56, et par conséquent la hauteur de la forteresse *Kislowodskaja* au-dessus du niveau de la mer = 410ᵗ,7.



RECHERCHES SUR DEUX SÉRIES

DONT LA SOMMATION A ÉTÉ PROPOSÉE

PAR LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE COPENHAGUE;

PAR

N. FUSS.

Présenté à la Conférence le 12 Juin 1816.

§. 1. Le programme publié en 1812, par la Société Royale des Sciences de Copenhague, renfermoit, entre autres problèmes proposés, une question d'Analyse conçue en ces termes:

„ In solutione problematum physico - mathematicorum interdum
„ occurrit haec series:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \frac{1}{13 \cdot 15} + \frac{1}{17 \cdot 19} + \text{etc.}$$

„ vel si terminis generalioribus haec series exprimatur:

$$\frac{a}{b(b+d)} + \frac{a}{(b+2d)(b+3d)} + \frac{a}{(b+4d)(b+5d)} + \text{etc.}$$

„ Desideratur invenire formulam summatoriam generalem hujus
„ seriei, aut saltem monstrare, quomodo in aliam citius convergentem
„ seriem transformari possit."

Ce problème d'Analyse m'ayant intéressé, je lui ai consacré avec plaisir une partie de mes loisirs, d'abord sans aucune intention de concourir pour le prix; or ayant réussi à trouver non seulement la formule sommatoire générale, mais aussi son intégrale finie et déterminée, et même à transformer les deux séries en d'autres incomparablement plus convergentes, ce succès de mon travail m'avoit déterminé à transmettre mes recherches à la Société savante qui avoit fait de ce problème d'Analyse un objet de son programme. Les

évènemens militaires de 1812 et de 1813 ont empêché ce mémoire de parvenir à sa destination ; c'est pourquoi je le présente à l'Académie, pour qu'elle en fasse l'usage qu'elle jugera convenable.

RECHERCHES

SUR LA SÉRIE NUMÉRIQUE

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{9\cdot 11}+\frac{1}{13\cdot 15}+\frac{1}{17\cdot 19}+\text{etc.}$$

§. 2, La marche la plus naturelle, et qui facilite le plus ces sortes de recherches, étant de les commencer par un cas spécial, je me suis attaché d'abord à traiter la série numérique du programme. J'en indique la somme cherchée par s, desorte que

$$2s=\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{5\cdot 7}+\frac{2}{9\cdot 11}+\frac{2}{13\cdot 15}+\text{etc.}$$

Je décompose cette série en deux autres

$$t=1+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{13}+\tfrac{1}{17}+\text{etc.}$$

$$u=\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{11}+\tfrac{1}{15}+\tfrac{1}{19}+\text{etc.}$$

dont la différence sera

$$t-u=\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{5\cdot 7}+\frac{2}{9\cdot 11}+\frac{2}{13\cdot 15}+\text{etc.}=2s,$$

desorte que $s=\frac{t-u}{2}$.

§. 3. Maintenant je considère la fraction $\frac{1}{1-x^4}$, laquelle, transformée en série, devient :

$$\frac{1}{1-x^4}=1+x^4+x^8+x^{12}+x^{16}+\text{etc.}$$

ce qui, multiplié par la différentielle ∂x, nous donne :

$$\frac{\partial x}{1-x^4}=\partial x+x^4\,\partial x+x^8\,\partial x+x^{12}\,\partial x+\text{etc.},$$

et en prenant les intégrales, nous aurons :

$$\int\frac{\partial x}{1-x^4}=x+\frac{x^5}{5}+\frac{x^9}{9}+\frac{x^{13}}{13}+\text{etc.}$$

Observons qu'ici tous les termes évanouissent en mettant $x=0$; c'est pourquoi, si nous mettons $x=1$, l'intégrale prise entre ces deux termes d'intégration sera :

$$\int \frac{\partial x}{1-x^4} \left[\begin{array}{l}\text{de } x = 0 \\ \text{à } x = 1\end{array}\right] = 1 + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{13} + \text{etc.} = t.$$

§. 4. Reprenant maintenant la série du paragraphe précédent:

$$\frac{1}{1-x^4} = 1 + x^4 + x^8 + x^{12} + x^{16} + \text{etc.}$$

Si nous la multiplions par $xx\partial x$, pour avoir

$$\frac{xx\partial x}{1-x^4} = x^2\partial x + x^6\partial x + x^{10}\partial x + x^{14}\partial x + \text{etc.}$$

en prenant les intégrales, nous arrivons à

$$\int \frac{xx\partial x}{1-x^4} = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{15}}{15} + \text{etc.};$$

desorte que, pour les mêmes termes d'intégration, nous obtiendrons:

$$\int \frac{xx\partial x}{1-x^4} \left[\begin{array}{l}\text{de } x = 0 \\ \text{à } x = 1\end{array}\right] = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{15} + \text{etc.} = u.$$

Nous voilà donc arrivés à cette sommation :

$$2s = t - u = \int \frac{\partial x}{1-x^4} - \int \frac{xx\partial x}{1-x^4} \left[\begin{array}{l}\text{de } x = 0 \\ \text{à } x = 1\end{array}\right].$$

Mais il est évident que

$$\int \frac{\partial x}{1-x^4} - \int \frac{xx\partial x}{1-x^4} = \int \frac{(1-xx)\,\partial x}{(1-xx)\,(1+xx)} = \int \frac{\partial x}{1+xx},$$

par conséquent la somme de notre série proposée sera

$$s = \tfrac{1}{2}\int \frac{\partial x}{1+xx} \left[\begin{array}{l}\text{de } x = 0 \\ \text{à } x = 1\end{array}\right].$$

§. 5. Or comme la formule différentielle $\frac{\partial x}{1+xx}$ est intégrable, son intégrale étant $=$ Arc. tg. x, ce qui devient zéro, en mettant $x = 0$, et $\frac{\pi}{4}$, en mettant $x = 1$ (où π indique la circonférence d'un cercle, dont le diamètre est $= 1$), il est évident que $s = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{9\cdot 11} + \frac{1}{13\cdot 15} + \text{etc.} = \frac{\pi}{8}.$$

§. 6. Ayant déterminé de cette manière la formule sommatoire

intégrale de la série proposée, et sa somme même, il ne sera pas sans intérêt de démontrer, par une voye un peu différente, que :

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \frac{1}{13.15} \text{ etc.}$$

Pour cet effet nous convertirons en série la fraction

$$\frac{1}{1+xx} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^3 - \text{ etc.},$$

et multipliant par la différentielle ∂x nous aurons :

$$\frac{\partial x}{1+xx} = \partial x - x^2\,\partial x + x^4\,\partial x - x^6\,\partial x + x^8\,\partial x - \text{etc.},$$

ce que nous présenterons sous cette forme :

$$\frac{\partial x}{1+xx} = \left\{\begin{array}{l} \partial x + x^4\,\partial x + x^8\,\partial x + \text{ etc.} \\ - x^2\,\partial x - x^6\,\partial x - x^{10}\,\partial x - \text{ etc.} \end{array}\right\}.$$

et en prenant les intégrales nous obtiendrons :

$$\text{A . tg. } x = \left\{\begin{array}{l} \frac{x}{1} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{13}}{13} + \text{ etc.} \\ - \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7} - \frac{x^{11}}{11} - \frac{x^{15}}{15} - \text{ etc.} \end{array}\right.$$

où il n'est pas nécessaire d'ajouter une constante, parceque tout s'évanouit en mettant $x = 0$.

Mettant donc $x = 1$ il résulte

$$\frac{\pi}{4} = \left\{\begin{array}{l} 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \text{etc.} \\ - \frac{1}{3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} - \frac{1}{15} - \frac{1}{19} - \text{etc.} \end{array}\right.$$

ou bien, en additionnant les fractions correspondantes et divisant par 2 :

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \frac{1}{13.15} + \text{etc.}$$

§. 7. Voyons aprésent comment on pourra transformer cette série en une autre qui soit plus convergente ; où il faut observer d'abord que ce but peut être atteint de différentes manières. 1°) On peut partir de la formule sommatoire intégrale $\int \frac{\partial x}{1+xx}$ et la transformer en une série dont les termes décroissent plus rapi-

dement que les termes de la série proposée: 2°) on peut transformer en série plus convergente l'intégrale même de cette formule, savoir A . tg. $x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} +$ etc.; 3°) enfin on peut chercher une série plus convergente pour la circonférence π. Or comme les deux derniers moyens sont assez connus, et ne sauroient d'ailleurs s'appliquer à la série générale du programme, je m'attacherai au premier moyen, comme à celui que la Société paroît avoir eu principalement en vuë, et qui fournira les moyens d'opérer une transformation semblable, lorsqu'il sera question de la série générale.

§. 8. Ayant vu ci-dessus (§. 6.) que

$$\frac{\partial x}{1+xx} = \begin{cases} \partial x + x^4\,\partial x + x^8\,\partial x + \text{etc.} \\ - x^2\,\partial x - x^6\,\partial x - x^{10}\,\partial x - \text{etc.} \end{cases}$$

je multiplie par x^4, et en prenant les intégrales j'aurai:

$$\int \frac{x^4\,\partial x}{1+xx} = \begin{cases} -\frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{13}}{13} + \frac{x^{17}}{17} + \text{etc.} \\ \frac{x^7}{7} - \frac{x^{11}}{11} - \frac{x^{15}}{15} - \frac{x^{19}}{19} - \text{etc.} \end{cases}$$

et pour les termes établis d'intégration il résulte que:

$$\int \frac{x^4\,\partial x}{1+xx} \begin{bmatrix} \text{de } x = 0 \\ \text{à } x = 1 \end{bmatrix} = \begin{cases} \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \text{etc.} \\ -\frac{1}{7} - \frac{1}{11} - \frac{1}{15} - \frac{1}{19} - \text{etc.} \end{cases}$$

c'est-à-dire que

$$\frac{1}{2} \int \frac{x^4\,\partial x}{1+xx} \begin{bmatrix} \text{de } x = 0 \\ \text{à } x = 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \frac{1}{13 \cdot 15} + \text{etc.}$$

et de là il suit que la somme de notre série, que nous avons nommée s, pourra aussi être exprimée de cette manière:

$$s = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2} \int \frac{x^4\,\partial x}{1+xx} \begin{bmatrix} \text{de } x = 0 \\ \text{à } x = 1 \end{bmatrix}.$$

§. 9. Maintenant pour transformer en une série plus conver-

gente la formule intégrale $\int \frac{x^4 \partial x}{1+xx}$, je la représente ainsi: $\int \frac{x^4 \partial x}{2(1-\frac{1}{2}(1-x^2))}$;
et comme la fraction

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}(1-x^2)} = 1 + \frac{1}{2}(1-x^2) + \frac{1}{4}(1-x^2)^2 + \frac{1}{8}(1-x^2)^3 + \text{etc.},$$

il est évident que

$$\int \frac{x^4 \partial x}{1+xx} = \frac{1}{2}\int x^4 \partial x [1 + \frac{1}{2}(1-x^2) + \frac{1}{4}(1-x^2)^2 + \frac{1}{8}(1-x^2)^3 + \text{etc.}],$$

Or en prenant les intégrales depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, nous aurons :

$$\frac{1}{2}\int x^4 \partial x = \frac{1}{2.5};$$

$$\frac{1}{4}\int x^4(1-x^2)\,\partial x = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5.7} = \frac{2}{2.7}\ \text{P};$$

$$\frac{1}{8}\int x^4(1-x^2)^2 \partial x = \frac{1}{8}\cdot\frac{8}{5.7.9} = \frac{4}{2.9}\ \text{P};$$

$$\frac{1}{16}\int x^4(1-x^2)^3 \partial x = \frac{1}{16}\cdot\frac{48}{5.7.9.11} = \frac{6}{2.11}\ \text{P}.$$

etc. etc.

Ici, pour simplifier les formules, aussi bien que le calcul numérique, j'indique dans chaque expression par P la valeur de l'intégrale immédiatement précédente. En substituant donc ces valeurs à la place des intégrales de la série précédente, nous aurons pour les termes d'intégration établis, c'est-à-dire depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$:

$$\int \frac{x^4 \partial x}{1+xx} = \frac{1}{2.5} + \frac{2}{2.7}\ \text{P} + \frac{4}{2.9}\ \text{P} + \frac{6}{2.11}\ \text{P} + \text{etc.} = \alpha$$

et par conséquent

$$s = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2.5} + \frac{2}{2.7}\,\text{P} + \frac{4}{2.9}\,\text{P} + \frac{6}{2.11}\,\text{P} + \text{etc}\right].$$

ou bien $s = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2}\alpha$.

§. 10. La seule contemplation de cette série fait connoître que ses termes décroissent très-rapidement. Pour nous assûrer cependant plus complettement de sa plus grande convergence, comparativement avec la série proposée, nous allons calculer un même nombre de termes de l'une et de l'autre, et nommément les huit premiers de chacune. Voici le calcul :

Série proposée :	
$\frac{1}{1\cdot 3}$	$= 0{,}3333333$
$\frac{1}{5\cdot 7}$	$= 0{,}0285714$
$\frac{1}{9\cdot 11}$	$= 0{,}0101010$
$\frac{1}{13\cdot 15}$	$= 0{,}0051282$
$\frac{1}{17\cdot 19}$	$= 0{,}0030960$
$\frac{1}{21\cdot 23}$	$= 0{,}0020704$
$\frac{1}{25\cdot 27}$	$= 0{,}0014814$
$\frac{1}{29\cdot 31}$	$= 0{,}0011123$
s	$= 0{,}3848940$
Or $\frac{\pi}{8}$	$= 0{,}3926991$
faute	$= 0{,}0078051$

Série transformée :	
$\frac{1}{2\cdot 5}$	$= 0{,}1000000$
$\frac{2}{2\cdot 7}P$	$= 0{,}0142857$
$\frac{4}{2\cdot 9}P$	$= 0{,}0031746$
$\frac{6}{2\cdot 11}P$	$= 0{,}0008658$
$\frac{8}{2\cdot 13}P$	$= 0{,}0002664$
$\frac{10}{2\cdot 15}P$	$= 0{,}0000888$
$\frac{12}{2\cdot 17}P$	$= 0{,}0000313$
$\frac{14}{2\cdot 19}P$	$= 0{,}0000115$
α	$= 0{,}1187241$
$\frac{1}{2}\alpha$	$= 0{,}0593620$
$\frac{1}{1\cdot 3}$	$= 0{,}3333333$
s	$= 0{,}3926953$
Or $\frac{\pi}{8}$	$= 0{,}3926991$
faute	$= 0{,}0000038.$

Ce calcul nous fait voir qu'en additionnant les huit premiers termes de la série proposée, nous arrivons à une somme qui est déjà fautive dans les millièmes parties, et qu'en additionnant les huit premiers termes de la série transformée, la faute n'est que dans les millionnièmes. De plus cette seconde série a encore l'avantage d'être bien plus facile à calculer, parceque chaque terme se déduit de celui qui le précède.

RECHERCHES

SUR LA SÉRIE GÉNÉRALE :

$$\frac{a}{b(b+d)} + \frac{a}{(b+2d)(b+3d)} + \frac{a}{(b+4d)(b+5d)} + \text{etc.}$$

§. 11. Après avoir expédié, dans les paragraphes précédens, la série numérique, le chemin se trouve tout frayé pour la série

générale, à laquelle il nous sera facile àprésent d'appliquer notre méthode, soit pour trouver la formule sommatrice générale, soit pour en assigner l'intégrale complète, soit enfin pour transformer la série en une autre plus convergente, pour les cas qui n'admettroient pas une intégrale d'une forme assez commode pour le calcul numérique.

§. 12. Pour cet effet désignons la somme de la série proposée par la lettre S, de sorte que

$$\frac{1}{b(b+d)} + \frac{1}{(b+2d)(b+3d)} + \frac{1}{(b+4d)(b+5d)} + \text{etc.} = \frac{S}{a}.$$

Décomposons chaque terme de cette série en ses deux fractions partielles, et nous aurons

$$\frac{dS}{a} = \begin{cases} \frac{1}{b} + \frac{1}{b+2d} + \frac{1}{b+4d} + \frac{1}{b+6d} + \text{etc.} \\ -\frac{1}{b+d} - \frac{1}{b+3d} - \frac{1}{b+5d} - \frac{1}{b+7d} - \text{etc.} \end{cases}$$

§. 13. Transformons maintenant en série la fraction $\frac{1}{1+x^d}$, pour avoir

$$\frac{1}{1+x^d} = \begin{cases} 1 + x^{2d} + x^{4d} + x^{6d} + \text{etc.} \\ -x^d - x^{3d} - x^{5d} - x^{7d} - \text{etc.} \end{cases}$$

ce qui, multiplié par $x^{b-1}\partial x$, nous donne

$$\frac{x^{b-1}\partial x}{1+x^d} = \begin{cases} x^{b-1}\partial x + x^{b+2d-1}\partial x + x^{b+4d-1}\partial x + \text{etc.} \\ -x^{b+d-1}\partial x - x^{b+3d-1}\partial x - x^{b+5d-1}\partial x - \text{etc.} \end{cases}$$

et en prenant les intégrales on arrive à

$$\int\frac{x^{b-1}\partial x}{1+x^d} = \begin{cases} \frac{x^b}{b} + \frac{x^{b+2d}}{b+2d} + \frac{x^{b+4d}}{b+4d} + \text{etc.} \\ -\frac{x^{b+d}}{b+d} - \frac{x^{b+3d}}{b+3d} - \frac{x^{b+5d}}{b+5d} - \text{etc.} \end{cases}$$

Ici nous voyons que les intégrales évanouissent en mettant $x=0$; les étendant de là jusqu'à $x=1$ nous aurons

$$\int\frac{x^{b-1}\partial x}{1+x^d}\left[\begin{smallmatrix}\text{de } x=0\\ \text{à } x=1\end{smallmatrix}\right] = \begin{cases} +\frac{1}{b} + \frac{1}{b+2d} + \frac{1}{b+4d} + \frac{1}{b+6d} + \text{etc.} \\ -\frac{1}{b+d} - \frac{1}{b+3d} - \frac{1}{b+5d} - \frac{1}{b+7d} - \text{etc.} \end{cases}$$

Ainsi nous sommes arrivés à la formule sommatoire générale de notre serie proposée; car les deux séries que nous venons de trouver, prises ensemble, ont pour somme $\frac{dS}{a}$ (§. 12.), et cette même somme étant aussi $= \int \frac{x^{b-1}\,dx}{1+x^d} \left[\begin{smallmatrix}\text{de } x = 0\\ \text{à } x = 1\end{smallmatrix}\right]$, il est évident que

$$S = \frac{a}{b(b+d)} + \frac{a}{(b+d)(b+3d)} + \frac{a}{(b+4d)(b+5d)} + \text{etc.} = \frac{a}{d}\int \frac{x^{b-1}\,\partial x}{1+x^{d}}:$$

lorsque les intégrales sont prises depuis le terme $x = 0$ jusqu' au terme $x = 1$.

§. 14. Eclaircissons ceci par quelques exemples propres à faire voir tant la vérité que les avantages de cette sómmation générale. Soit d'abord $b = d$, et la somme de la série:

$$\frac{a}{d.2d} + \frac{a}{3d.4d} + \frac{a}{5d.6d} + \frac{a}{7d.8d} + \text{etc.}$$

sera exprimée ainsi:

$$S = \frac{a}{d}\int \frac{x^{d-1}\,\partial x}{1+x^d} \left[\begin{matrix}\text{de } x = 0\\ \text{à } x = 1\end{matrix}\right].$$

Or mettant $1 + x^d = z$, on aura $dx^{d-1}\partial x = \partial z$ et

$$\frac{a}{d}\int \frac{x^{d-1}\,\partial x}{1+x^d} = \frac{a}{dd}\int \frac{\partial z}{z} = \frac{a}{dd}\, lz + C, \text{ c'est à dire}$$

$$\frac{a}{d}\int \frac{x^{d-1}\,\partial x}{1+x^d} = l\,(1 + x^d) + C,$$

où la constante C devient zéro, en mettant $x = 0$. En mettant donc $x = 1$ on obtient

$$S = \frac{a}{d}\int \frac{x^{d-1}\,\partial x}{1+x^d} \left[\begin{matrix}\text{de } x = 0\\ \text{à } x = 1\end{matrix}\right] = \frac{a}{dd}\, l2,$$

c'est-à-dire la série proposée devient

$$\frac{a}{dd}\left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{7.8} + \text{etc.}\right] = \frac{a}{dd}.\, l\,2,$$

dont la vérité saute aux yeux, parceque

$$l\,2 = \begin{cases} \;\; 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \text{etc.} \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \text{etc.} \end{cases}$$

et par conséquent

$$l\,2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \text{etc.}$$

§. 15. Soit $d = 2\,b$, et la série proposée prendra cette forme :

$$\frac{a}{b \cdot 3b} + \frac{a}{5b \cdot 7b} + \frac{a}{9b \cdot 11b} + \frac{a}{13b \cdot 15b} + \text{etc.}$$

et sa somme sera

$$S = \frac{a}{2b} \int \frac{x^{b-1}\,\partial x}{1 + x^{2b}} \left[\begin{array}{l} \text{de } x = 0 \\ \text{à } x = 1 \end{array} \right].$$

Mais mettant $x^b = z$ on aura $x^{b-1}\,\partial x = \frac{\partial z}{b}$ et $1 + x^{2b} = 1 + zz$,

donc $\int \frac{x^{b-1}\,\partial x}{1 + x^{2b}} = \frac{1}{b} \int \frac{\partial z}{1 + zz} = \frac{1}{b}\,\text{A} \cdot \text{tg.}\, z + \text{C}$,

c'est - à - dire

$$\int \frac{x^{b-1}\,\partial x}{1 + x^{2b}} = \frac{1}{b}\,\text{A} \cdot \text{tg.}\, x^b + \text{C},$$

où la constante C peut être omise, parceque l'intégrale devient zéro, en mettant $x = 0$. Mettant donc $x = 1$ on aura

$$S = \frac{a}{2bb}\ \text{A. tg.}\ 1 = \frac{\pi a}{8bb}.$$

Voyons ce que donnera la série qu'on peut d'abord mettre sous cette forme :

$$\frac{a}{bb} \left[\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \frac{1}{13 \cdot 15} + \text{etc.} \right].$$

Mais nous avons vu au §. 5. que

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \frac{1}{13 \cdot 15} = \text{etc.}\ \frac{\pi}{8};$$

donc il est évident que

$$\frac{a}{b \cdot 3b} + \frac{a}{5b \cdot 7b} + \frac{a}{9b \cdot 11b} + \frac{a}{13b \cdot 15b} + \text{etc.} = \frac{\pi a}{8bb}.$$

§. 16. Soit $d = 4b$, et la série proposée prendra cette forme :

$$\frac{a}{b.5b} + \frac{a}{9b.13b} + \frac{a}{17b.21b} + \frac{a}{25b.29b} + \text{etc.},$$

et sa somme s'exprimera ainsi :

$$S = \frac{a}{4b}\int \frac{x^{b-1}\partial x}{1+x^{4b}} \begin{bmatrix} \text{de } x = 0 \\ \text{à } x = 1 \end{bmatrix},$$

ou bien, en mettant $x^b = z$, ainsi :

$$S = \frac{a}{4b^2}\int \frac{\partial z}{1+z^4} \begin{bmatrix} \text{de } z = 0 \\ \text{à } z = 1 \end{bmatrix}.$$

Quoique cette intégrale seroit facile à trouver, nous ne nous y arrêterons pas, préférant de chercher l'intégrale de notre formule générale $\int \frac{x^{b-1}\,dx}{1+x^d} \begin{bmatrix} \text{de } x = 0 \\ \text{à } x = 1 \end{bmatrix}$, laquelle étant trouvée, on pourra en déduire notre cas présent, aussi bien que tous les autres, pour des valeurs de a, b et d quelconques.

§. 17. Pour cet effet nous ferons usage de l'intégrale absolue et non-limitée qu'*Euler* a donnée de cette formule dans le Chapitre I. du Tome I de ses *Instit. Calc. integralis*, laquelle, en y mettant $x = 1$, et après y avoir fait quelques réductions assez faciles, fondées sur ce que $\sqrt{2 - 2\cos.\alpha} = 2\sin.\frac{1}{2}\alpha$ et

$$\text{A tg.}\,\frac{\sin.\alpha}{1-\cos.\alpha} = \text{A . tg. cot.}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2},$$

prendra cette forme pour les termes d'intégration établis ici, c'est-à-dire depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$:

$$\int \frac{x^{b-1}\,dx}{1+x^d} = \left\{ \begin{array}{l} +\frac{\pi(d-1)}{dd}\sin.\frac{b\pi}{d} - \frac{2}{d}\cos.\frac{b\pi}{d}\, l\,.\,2\sin.\frac{\pi}{2d} \\ +\frac{\pi(d-3)}{dd}\sin.\frac{3b\pi}{d} - \frac{2}{d}\cos.\frac{3b\pi}{d}\, l\,.\,2\sin.\frac{3\pi}{2d} \\ +\frac{\pi(d-5)}{dd}\sin.\frac{5b\pi}{d} - \frac{2}{d}\cos.\frac{5b\pi}{d}\, l\,.\,2\sin.\frac{5\pi}{2d} \\ - \;-\;-\;-\;-\;-\;-\;- \\ - \;-\;-\;-\;-\;-\;-\;- \\ +\frac{\pi(d-\lambda)}{dd}\sin.\frac{\lambda b\pi}{d} - \frac{2}{d}\cos.\frac{\lambda b\pi}{d}\, l\,.\,2\sin.\frac{\lambda\pi}{2d} \\ \hfill \pm\frac{1}{d}\, l\,.\,2. \end{array} \right.$$

Dans cette expression finie λ indique le plus grand nombre impair plus petit que d, et le dernier terme $\pm \frac{1}{d} l 2$ ne s'ajoute que dans les cas où d est un nombre impair ; avec le signe $+$, lorsque b est un nombre impair ; avec le signe $-$, lorsque b est un nombre pair.

§. 18. D'après ce que nous venons d'exposer la somme de notre série générale proposée sera exprimée ainsi :

$$S = \frac{2a}{dd} \left\{ \begin{array}{l} + \frac{\pi(d-1)}{2d} \sin. \frac{b\pi}{d} - \cos. \frac{b\pi}{d} \; l \,.\, 2 \sin. \frac{\pi}{2\,d} \\ + \frac{\pi(d-3)}{2d} \sin. \frac{3b\pi}{d} - \cos. \frac{3b\pi}{d} \; l \,.\, 2 \sin. \frac{3}{2}\frac{\pi}{d} \\ + \frac{\pi(d-5)}{2d} \sin. \frac{5b\pi}{d} - \cos. \frac{5b\pi}{d} \; l \,.\, 2 \sin. \frac{5}{2}\frac{\pi}{d} \\ - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \\ - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \\ + \frac{\pi(d-\lambda)}{2d} \sin. \frac{\lambda b\pi}{d} - \cos. \frac{\lambda b\pi}{d} \; l \,.\, 2 \sin. \frac{\lambda\pi}{2\,d} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \pm \frac{1}{2} l \,.\, 2 \end{array} \right\}.$$

Il est évident que cette expression sera plus ou moins simple, plus ou moins facile à calculer, selon les valeurs de b et d de la série ; et qu'il y a une infinité de cas où elle se simplifie et se réduit à un assez petit nombre de termes. Dans les cas contraires il peut arriver que le calcul se fera plus avantageusement d'après la série convergente, dans laquelle nous allons transformer la proposée, après avoir éclairci par quelques exemples l'usage de la formule ci-dessus rapportée.

§. 19. Pour cet effet nous donnerons une valeur déterminée numérique à d, en mettant $d = 2$ et laissant a et b indéterminées. La série prendra cette forme :

$$\frac{a}{b(b+2)} + \frac{a}{(b+4)(b+6)} + \frac{a}{(b+8)(b+10)} + \text{etc.}$$

et sa somme sera exprimée ainsi :

$$S = \frac{a}{2} \left[\frac{\pi}{4} \sin. \frac{b\pi}{2} - \cos. \frac{b\pi}{2} \,.\, l \,.\, \sqrt{2}\right].$$

Que si nous mettons ici $b = 1$, nous aurons :

$$\frac{a}{1\cdot 3} + \frac{a}{5\cdot 7} + \frac{a}{9\cdot 11} + \frac{a}{13\cdot 15} + \text{etc.} = \frac{a\pi}{8},$$

sommation dont la vérité a déjà été démontrée au §. 5. En mettant $b = 2$, nous aurons :

$$\frac{a}{2\cdot 4} + \frac{a}{6\cdot 8} + \frac{a}{10\cdot 12} + \frac{a}{14\cdot 16} + \text{etc.} = \frac{a}{2}\,.\,l\sqrt{2},$$

ou bien, ce qui revient au même,

$$\frac{a}{1\cdot 2} + \frac{a}{3\cdot 4} + \frac{a}{5\cdot 6} + \frac{a}{7\cdot 8} + \text{etc.} = a\,l\,2,$$

dont la vérité a déjà été prouvée au §. 14.

§. 20. Prenons $d = 3$, et notre série prendra cette forme :

$$\frac{a}{b(b+3)} + \frac{a}{(b+6)(b+9)} + \frac{a}{(b+12)(b+15)} + \text{etc.}$$

dont la somme se trouvera exprimée ainsi :

$$S = \frac{2a}{9}\left[\frac{\pi}{3}\sin.\frac{b\pi}{3} \pm \frac{1}{2}l\,2\right].$$

En mettant ici $b = 1$, on obtient la sommation suivante :

$$\frac{a}{1\cdot 4} + \frac{a}{7\cdot 10} + \frac{a}{13\cdot 16} + \frac{a}{19\cdot 22} + \text{etc.} = \frac{2a}{9}\left[\frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2}l\,2\right].$$

En mettant $b = 2$, on obtient celle-ci :

$$\frac{a}{2\cdot 5} + \frac{a}{8\cdot 11} + \frac{a}{14\cdot 17} + \frac{a}{20\cdot 23} + \text{etc.} = \frac{2a}{9}\left[\frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2}l\,2\right].$$

En mettant $b = 3$, on aura

$$\frac{a}{3\cdot 6} + \frac{a}{9\cdot 12} + \frac{a}{15\cdot 18} + \frac{a}{21\cdot 24} + \text{etc.} = \frac{a\,l\,2}{9},$$

laquelle se reduit à

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \frac{1}{7\cdot 8} + \text{etc.} = l\,2,$$

sommation connue et démontrée au §. 14. Quant aux deux precédentes :

$$\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{7\cdot 10} + \frac{1}{13\cdot 16} + \frac{1}{19\cdot 22} + \text{etc.} = \frac{2}{9}\left[\frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2}l\,2\right]$$

$$\frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{8\cdot 11} + \frac{1}{14\cdot 17} + \frac{1}{20\cdot 23} + \text{etc.} = \frac{2}{9}\left[\frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2}l\,2\right];$$

on pourra facilement s'assùrer de leur vérité, en les présentant sous cette forme :

$$\text{A)}\ \left\{\begin{array}{l} 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{13} + \frac{1}{19} + \frac{1}{25} + \text{etc.} \\ - \frac{1}{4} - \frac{1}{10} - \frac{1}{16} - \frac{1}{22} - \frac{1}{28} - \text{etc.} \end{array}\right\} = \frac{2}{3}\left[\frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\, l\, 2\right].$$

$$\text{B)}\ \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{14} + \frac{1}{20} + \frac{1}{26} + \text{etc.} \\ - \frac{1}{5} - \frac{1}{11} - \frac{1}{17} - \frac{1}{23} - \frac{1}{29} - \text{etc.} \end{array}\right\} = \frac{2}{3}\left[\frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\, l\, 2\right].$$

Leur somme A + B fournit

$$\left.\begin{array}{l} 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \text{etc.} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \text{etc.} \end{array}\right\} = \frac{2\pi}{2\sqrt{3}}.$$

Or nous savons que la première de ces deux séries a pour somme $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ et l'autre $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$ (*Euleri Introd. in Anal. inf. p.* 139 *et* 138); ainsi leur somme sera $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. La différence A − B fournit :

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} - \text{etc.} = + \frac{2\, l\, 2}{\sqrt{3}}.$$

Or nous savons que

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \text{etc.} = l\, 2$$

$$\text{et}\quad \frac{1}{3} \qquad - \frac{1}{6} \qquad + \frac{1}{9} \qquad - \frac{1}{12} + \text{etc.} = \frac{1}{3}\, l\, 2$$

par conséquent, en ôtant la seconde série de la première, il est évident que

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \text{etc.} = \frac{2\, l\, 2}{3}.$$

§. 21. Reprenons le cas $d = 4b$, commencé ci-dessus (§. 16), et pour l'achever observons que

$$\int \frac{\partial z}{1 + z^4} \left[\begin{array}{l} \text{de } z = 0 \\ \text{à } z = 1 \end{array}\right] = \frac{1}{2} \left\{\begin{array}{l} + \frac{3\pi}{8} \sin. \frac{\pi}{4} - \cos. \frac{\pi}{4}\, l\, 2 \sin. \frac{\pi}{8} \\ + \frac{\pi}{8} \sin. \frac{3}{4} - \cos. \frac{3\pi}{4}\, l\, 2 \sin. \frac{3}{8} \end{array}\right\}.$$

et que partant la somme de la série

$$\frac{a}{bb}\left[\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \frac{1}{17 \cdot 21} + \frac{1}{25 \cdot 29} + \text{etc.}\right],$$

à cause de $\sin. \frac{\pi}{4} = \cos. \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin. \frac{3\pi}{4} = - \cos. \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, sera exprimée ainsi :

$$S = \frac{a}{8\,bb}\left[\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,l\,\frac{\sin.\frac{3\pi}{8}}{\sin.\frac{\pi}{8}}\right],$$

ou bien, à cause de $\sin.\frac{3\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}$ et $\sin.\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$,

$$S = \frac{a}{8bb}\left[\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\,l\,\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right],$$

ou bien enfin, à cause de $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{1}$,

$$S = \frac{a}{8bb}\left[\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,l\,(\sqrt{2}+1)\right].$$

§. 22. Le programme de la société Royale exigeoit des deux choses l'une: ou qu'on cherche la formule sommatoire générale de la série, ou que du moins on fasse voir comment elle peut être transformée en une autre série qui soit plus convergente. Nous venons de remplir la premiere condition dans toute sa plénitude; mais nous allons satisfaire aussi à la seconde, en cherchant une série assez convergente, au moyen de laquelle on puisse trouver la somme de la proposée avec plus de facilité dans les cas, où l'expression du §. 18. devient trop compliquée pour le calcul numérique. Nous nous servirons de la même méthode que nous avons employée au §. 9. pour la série numérique, et dont nous avons prouvé les avantages au §. 10, en faisant voir la convergence bien plus grande de la série obtenue par la transformation.

§. 23. Ayant fait voir au §. 13. que la somme de notre série s'exprime ainsi :

$$S = \frac{a}{d}\int\frac{x^{b-1}\,\partial x}{1+x^d}\left[\begin{array}{l}\text{de } x = 0\\ \text{à } x = 1\end{array}\right],$$

il s'agit maintenant de transformer la valeur de cette intégrale en une série plus convergente que la proposée. Pour arriver à ce but j'observe que

$$\int \frac{x^{b-1}\,\partial x}{1+x^d} = \tfrac{1}{2}\int \frac{x^{b-1}\,\partial x}{1-\frac{1}{2}(1-x)^d}.$$

Or comme la fraction

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}(1-x^d)} = 1 + \tfrac{1}{2}(1-x^d) + \tfrac{1}{4}(1-x^d)^2 + \tfrac{1}{8}(1-x^d)^3 + \text{etc.}$$

notre formule intégrale sera exprimée ainsi :

$$\int \frac{x^{b-1}\,\partial x}{1+x^d} = \tfrac{1}{2}\int x^{b-1}\,\partial x\,[1+\tfrac{1}{2}(1-x^d)+\tfrac{1}{4}(1-x^d)^2+\tfrac{1}{8}(1-x^d)^3+\text{etc.}].$$

§. 24. En prenant les intégrales depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, nous aurons :

$$\tfrac{1}{2}\int x^{b-1}\,\partial x = \frac{1}{2b};$$
$$\tfrac{1}{4}\int x^{b-1}(1-x^d)\,\partial x = \frac{1.d}{4b(b+d)};$$
$$\tfrac{1}{8}\int x^{b-1}(1-x^d)^2\,\partial x = \frac{2d^2}{8b(b+d)(b+2d)};$$
$$\tfrac{1}{16}\int x^{b-1}(1-x^d)^3\,\partial x = \frac{6d3}{16b(b+d)(b+2d)(b+3d)};$$
$$\tfrac{1}{32}\int x^{b-1}(1-x^d)^4\,\partial x = \frac{24d4}{32b(b+d)(b+2d)(b+3d)(b+4d)};$$

etc. etc.

ou bien, en indiquant par P chaque valeur immédiatement précédente, les mèmes intégrales seront exprimées ainsi:

$$\tfrac{1}{2}\int x^{b-1}\,\partial x = \frac{1}{2b}$$
$$\tfrac{1}{4}\int x^{b-1}(1-x^d)\,\partial x = \frac{1.d}{2(b+b)}\,P;$$
$$\tfrac{1}{8}\int x^{b-1}(1-x^d)^2\,\partial x = \frac{2.d}{2(b+2d)}\,P;$$
$$\tfrac{1}{16}\int x^{b-1}(1-x^d)^3\,\partial x = \frac{3.d}{2(b+3d)}\,P;$$
$$\tfrac{1}{32}\int x^{b-1}(1-x^d)^4\,\partial x = \frac{4.d}{2(b+4d)}\,.\,P.$$

etc. etc.

§. 25. En substituant ces valeurs à la place des intégrales dans l'expression trouvée à la fin du §. 23, nous obtiendrons :

$$S = \frac{a}{d}\left[\frac{1}{2b} + \frac{d}{2(b+d)}P + \frac{2d}{2(b+2d)}P + \frac{3d}{2(b+3d)}P + \text{etc.}\right],$$

série dont ouvertement chaque terme est plus de deux fois plus grand que son précédent et qui, par conséquent, est incomparablement, plus convergente que la proposée, et cette convergence devient d'autant plus petite dans la proposée, et d'autant plus grande dans la transformée, plus que le nombre b sera grand.

§. 26. Quoique nous ayons déjà fait voir au §. 10. l'avantage de cette transformation, par l'exemple de la série numérique du programme, nous l'appliquerons encore à une autre série, dont la somme seroit pénible à calculer au moyen de la sommation générale du §. 18. Nous mettrons $b = 11$ et $d = 10$, pour avoir la série :

$$\frac{a}{11 \cdot 21} + \frac{a}{31 \cdot 41} + \frac{a}{51 \cdot 61} + \frac{a}{71 \cdot 81} + \text{etc.}$$

et nous calculerons sa somme d'après la serie du §. précédent, qui devient dans ce cas :

$$S = \frac{a}{10}\left[\frac{1}{2 \cdot 11} + \frac{10}{2 \cdot 21}P + \frac{20}{2 \cdot 31}P + \frac{30}{2 \cdot 41}P + \text{etc.}\right].$$

Voici le calcul :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2 \cdot 11} \quad &= 0,045454 \\
\frac{10}{2 \cdot 21}P &= 0,010822 \\
\frac{20}{2 \cdot 31}P &= 0,003491 \\
\frac{30}{2 \cdot 41}P &= 0,001277 \\
\frac{40}{2 \cdot 51}P &= 0,000500 \\
\frac{50}{2 \cdot 61}P &= 0,000205 \\
\frac{60}{2 \cdot 71}P &= 0,000086 \\
\frac{70}{2 \cdot 81}P &= 0,000037 \\
\frac{80}{2 \cdot 91}P &= 0,000016 \\
\frac{90}{2 \cdot 101}P &= 0,000007 \\
\hline
& 0,061895.
\end{aligned}$$

§. 27. On obtient une série encore plus convergente, en représentant la proposée ainsi :

$$S = \frac{a}{b(b+d)} + \Sigma$$

et transformant d'après la même méthode, employée aux §§. 23, 24 et 25, la série

$$\Sigma = \frac{a}{(b+2d)(b+3d)} + \frac{a}{(b+4d)(b+5d)} + \frac{a}{(b+6d)(b+7d)} \text{ etc.}$$

Pour cet effet on multiplie

$$\frac{1}{1+x^d} = \begin{cases} 1 + x^{2d} + x^{4d} + x^{6d} + x^{8d} + \text{etc.} \\ - x^d - x^{3d} - x^{5d} - x^{7d} - x^{9d} - \text{etc.} \end{cases}$$

par $x^{b+2d-1}\partial x$, pour avoir

$$\frac{x^{b+2d-1}\partial x}{1+x^d} = \begin{cases} x^{b+2d-1}\partial x + x^{b+4d-1}\partial x + x^{b+6d-1}\partial x + \text{etc.} \\ - x^{b+3d-1}\partial x - x^{b+5d-1}\partial x - x^{b+7d-1}\partial x - \text{etc.} \end{cases}$$

et en prenant les intégrales depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, on aura

$$\int \frac{x^{b+2d-1}\partial x}{1+x^d} = \begin{cases} \frac{1}{b+2d} + \frac{1}{b+4d} + \frac{1}{b+6d} + \text{etc.} \\ - \frac{1}{b+3d} - \frac{1}{b+5d} - \frac{1}{b+7d} - \text{etc.} \end{cases}$$

d'où l'on voit que

$$\frac{1}{d}\int \frac{x^{b+2d-1}\partial x}{1+x^d} \begin{bmatrix} \text{de } x = 0 \\ \text{à } x = 1 \end{bmatrix} = \frac{\Sigma}{a},$$

et par conséquent

$$\Sigma = \frac{a}{d}\int \frac{x^{b+2d-1}\partial x}{1+x^d} \begin{bmatrix} \text{de } x = 0 \\ \text{à } x = 1 \end{bmatrix}.$$

§. 28. Que si nous multiplions la fraction :

$$\frac{1}{1+x^d} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}(1-x^d)} = 1 + \frac{1}{2}(1-x^d) + \frac{1}{4}(1-x^d)^2 + \frac{1}{8}(1-x^d)^3 + \text{etc.}$$

par $x^{b+2d-1}\partial x$ et que nous prenons les intégrales depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, nous aurons

$$\Sigma = \frac{a}{d}\left[\frac{1}{2(b+2d)} + \frac{dP}{2(b+3d)} + \frac{2dP}{2(b+4d)} + \frac{3dP}{2(b+5d)} + \text{etc.}\right]$$

et par conséquent

$$S = \frac{a}{b(b+d)} + \frac{a}{d}\left[\frac{1}{2(b+2d)} + \frac{dP}{2(b+3d)} + \frac{2dP}{2(b+4d)} + \text{etc.}\right.$$

où P indique dans chaque terme le terme précédent.

§. 29. Pour l'exemple du §. 26. nous aurons

$$S = \frac{a}{11\ 21} + \frac{a}{10}\left[\frac{1}{2.31} + \frac{10\ P}{2.41} + \frac{20\ P}{2.51} + \frac{30\ P}{2.61} + \text{etc.}\right]$$

Voici le calcul jusqu'au 6me terme de la série :

$$\frac{1}{2.31} = 0{,}016129$$
$$\frac{10\ P}{2.41} = 0{,}001967$$
$$\frac{20\ P}{2.51} = 0{,}000386$$
$$\frac{30\ P}{2.61} = 0{,}000095$$
$$\frac{40\ P}{2.71} = 0{,}000027$$
$$\frac{50\ P}{2.81} = 0{,}000008$$
$$0{,}018612$$
$$\Sigma = 0{,}0018612$$
$$\frac{1}{11.21} = 0{,}0043290$$
$$\frac{S}{a} = 0{,}0061902$$

La valeur S, qui en résulte, ne diffère de celle du §. 26. que de 7 dixmillionnièmes parties.

Ainsi les six premiers termes nous donnent ici par un calcul, rendu très aisé au moyen des P, la somme cherchée de la série $\frac{S}{a} = 0{,}0061902$ juste jusqu'aux parties millionnièmes inclusivement. Il est bon d'observer que la proposée est si peu convergente, que la différence entre le 2^{d} et 1^{r} terme n'excède pas $\frac{1}{182}$, et qu'entre le 6me et 5me elle n'excède pas $\frac{1}{29000}$.

§. 30. Les recherches instituées ici dans la vue de trouver la formule sommatrice de la série générale proposée, d'assigner l'intégrale finie de cette formule, et de transformer la série proposée en une autre plus convergente, m'ont fourni encore plusieurs autres résultats neufs et intéressans; mais comme la question proposée se bornoit à l'alternative du premier et troisième des objets mentionnés, je me suis abstenu de grossir le présent mémoire par des horsd'oeuvres, qui seront mieux à leur place dans un autre mémoire que je me propose de présenter à l'Académie à la suite de celui-ci.



SUPPLEMENTUM

AD DISSERTATIONEM MEAM:

INVESTIGATIO TERMINORUM SERIEI

EX DATIS PRODUCTIS TERMINORUM CONTIGUORUM,

AUCTORE

N. FUSS.

Conventui exhibuit die 30 Oct. 1816.

§. 1. In memorata dissertatione, Tomo VI novissimorum Academiae Commentationum (Mémoires de l'Académie) inserta, tradidi completam solutionem problematis pro binis et ternis terminis contiguis, quorum producta sunt data, facta quoque applicatione methodi adhibitae ad series geometricas et hypergeometricas. Reliquos casus, pro productis ex quaternis, quinis, senis, etc. per inductionem, legitimam quidem, expedivi. Postmodum animadverti, adhibendo signandi modum magis idoneum, omnia methodo non solum faciliori, sed etiam magis directa latiusque patente, absolvi posse, quam igitur in hoc supplemento exposuisse juvabit.

Problema 1.

§. 2. *Invenire seriem numerorum* a, b, c, d, *etc. ex datis binorum contiguorum productis* $ab = (1)$, $bc = (2)$, $cd = (3)$, $de = (4)$, *etc.*

Solutio.

Cum sit $\frac{c}{a} = \frac{(2)}{(1)}$, ideoque $c = a\frac{(2)}{(1)}$, eodem modo invenitur $d = b\frac{(3)}{(2)}$; porro

$$e = c\frac{(4)}{(3)} = a\frac{(2)}{(1)}\cdot\frac{(4)}{(3)} \quad g = a\frac{(2)}{(1)}\cdot\frac{(4)}{(3)}\cdot\frac{(6)}{(5)}$$
$$f = d\frac{(5)}{(4)} = b\frac{(3)}{(2)}\cdot\frac{(5)}{(4)} \quad h = b\frac{(3)}{(1)}\cdot\frac{(5)}{(4)}\cdot\frac{(7)}{(6)}$$

hocque modo omnes termini seriei per binos primos a et b definiuntur.

Quod si igitur series, in infinitum continuata, habeat terminos aequales, inde a et b, ideoque et reliqui, determinari poterunt. Si enim termini infinitesimi fuerint aA et bB, his aequalibus positis erit $\frac{B}{A} = \frac{a}{b}$. Est vero $b = \frac{(1)}{a}$, ideoque $\frac{B}{A} = \frac{a^2}{(1)}$, sive $a^2 = (1)\frac{B}{A}$; quocirca, ob

$$B = \frac{(3)}{(2)}\cdot\frac{(5)}{(4)}\cdot\frac{(7)}{(6)}\cdot\frac{(9)}{(8)}\cdot\frac{(11)}{(10)} \text{ etc.}$$

$$A = \frac{(2)}{(1)}\cdot\frac{(4)}{(3)}\cdot\frac{(6)}{(5)}\cdot\frac{(8)}{(7)}\cdot\frac{(10)}{(9)} \text{ etc.}$$

nanciscimur sequentem valorem:

$$a^2 = (1)\frac{(1)(3)}{(2)(2)}\cdot\frac{(3)(5)}{(4)(4)}\cdot\frac{(5)(7)}{(6)(6)}\cdot\frac{(7)(9)}{(8)(8)}\cdot \text{etc.}$$

qui convenit cum illo quem §. 5. prioris dissertationis inveneram. Simili prorsus modo nanciscimur:

$$b^2 = (2)\frac{(2)(4)}{(3)(3)}\cdot\frac{(4)(6)}{(5)(5)}\cdot\frac{(6)(8)}{(7)(7)}\cdot \text{etc.}$$

$$c^2 = (3)\frac{(3)(5)}{(4)(4)}\cdot\frac{(5)(7)}{(6)(6)}\cdot\frac{(7)(9)}{(8)(8)}\cdot \text{etc.}$$

$$d^2 = (4)\frac{(4)(6)}{(5)(5)}\cdot\frac{(6)(8)}{(7)(7)}\cdot\frac{(8)(10)}{(9)(9)}\cdot \text{etc.}$$

Corollarium.

§. 3. Hae expressiones autem, ut jam innuimus, tum tantum locum habebunt, quando termini seriei (1), (2), (3), etc, in infinitum continuatae, ad aequalitatem tendunt; si enim seriem divergentem, sive geometricam, sive hypergeometricam constituant, quaestio peculiarem requirit solutionem, quam in sequenti paragrapho exhibebimus.

Problema 2.

§. 4 *Invenire seriem numerorum* a, b, c, d, *etc. ex datis binorum*

contiguorum productis, (1), (2), (3). *etc. quando termini in infinitum continuati non sunt aequales.*

Solutio.

Analysis instituatur ut ante, hoc tantum discrimine, quod termini infinitesimi non amplius aequales sunt statuendi, quippe ad progressionem geometricam tendentes. Ita positis terminis infinitesimis aA et bB, cum non sit $bB = aA$, statuatur $bB = aAp$, ita ut $abB = a^2 Ap$, atque ob $ab = (1)$ erit $a^2 = (1)\frac{B}{Ap}$, quod a valore pro a^2 in problemate praecedente invento: $a^2 = \frac{B}{A}$, tantum in eo differt, quod hic accesserit factor $\frac{1}{p}$, qui, si in praecedentes ita transferatur, ut debitum locum obtineat, valori a^2 dabit hanc formam:

$$a^2 = \frac{(1)}{(2)} \cdot \frac{(1)(3)}{(2)(4)} \cdot \frac{(3)(5)}{(4)(6)} \cdot \frac{(5)(7)}{(6)(8)} \cdot \text{ etc.}$$

Similique modo erit:

$$b^2 = \frac{(2)}{(3)} \cdot \frac{(2)(4)}{(3)(5)} \cdot \frac{(4)(6)}{(5)(7)} \cdot \frac{(6)(8)}{(7)(9)} \cdot \text{ etc.}$$

et ita porro pro c^2, d^2, etc. secundum legem jam satis manifestam.

Problema 3.

§. 5. *Invenire seriem numerorum* a, b, c, d, *etc.*, *ex datis ternorum contiguorum productis, scil.* abc = (1), bcd = (2), cde = (3), *etc.*

Solutio.

Si calculus ut in problemate primo instituatur, termini seriei secundum a, b, c, ita procedent:

$$a,\; a\frac{(2)}{(1)},\; a\frac{(2)}{(1)}\cdot\frac{(5)}{(4)},\; a\frac{(2)}{(1)}\cdot\frac{(5)}{(4)}\cdot\frac{(8)}{(7)}, \text{ etc.}$$
$$b,\; b\frac{(3)}{(2)},\; b\frac{(3)}{(2)}\cdot\frac{(6)}{(5)},\; b\frac{(3)}{(2)}\cdot\frac{(6)}{(5)}\cdot\frac{(9)}{(8)}, \text{ etc.}$$
$$c,\; c\frac{(4)}{(3)},\; c\frac{(4)}{(3)}\cdot\frac{(7)}{(6)},\; c\frac{(4)}{(3)}\cdot\frac{(7)}{(6)}\cdot\frac{(10)}{(9)}, \text{ etc.}$$

eruntque postremi hujus ternionis termini:

$$a\frac{(2)}{(1)}\cdot\frac{(5)}{(4)}\cdot\frac{(8)}{(7)}\cdots\cdot\frac{(3n+2)}{(3n+1)}=a\mathrm{A}$$

$$b\frac{(3)}{(2)}\cdot\frac{(6)}{(5)}\cdot\frac{(9)}{(8)}\cdots\cdot\frac{(3n+3)}{(3n+2)}=b\mathrm{B}$$

$$c\frac{(4)}{(3)}\cdot\frac{(7)}{(6)}\cdot\frac{(10)}{(9)}\cdots\cdot\frac{(3n+4)}{(3n+3)}=c\mathrm{C}$$

pro quorum primo terminus sequens est $a\mathrm{A}\frac{(3n+5)}{(3n+4)}$, et nunc, sumto n infinito, duo casus sunt distinguendi.

Casus I.

Sit $\frac{(3n+5)}{(3n+4)}=1$, et omnes illi termini $a\mathrm{A}$, $b\mathrm{B}$, $c\mathrm{C}$, erunt aequales, unde concluditur fore $b=\frac{a\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ et $c=\frac{a\mathrm{A}}{\mathrm{C}}$; quorum productum, per a multiplicatum, suppeditat aequationem:

$$a\,b\,c=(1)=\frac{a^3\,\mathrm{A\,A}}{\mathrm{B\,C}},$$

ex qua sequitur fore $a^3=(1)\frac{\mathrm{B\,C}}{\mathrm{A\,A}}$. Si vero ad postremos modo factores spectemus, quoniam est

$$\mathrm{A\,A}=\frac{(3n+2)^2}{(3n+1)^2}\text{ et }\mathrm{B\,C}=\frac{(3n+4)}{(3n+2)},$$

hinc intelligitur fore:

$$a^3=(1)\,\frac{(3n+1)^2(3n+4)}{(3n+2)^3}.$$

Eodem prorsus modo, ob $c=\frac{b\mathrm{B}}{\mathrm{C}}$ et $d=\frac{b\mathrm{B}}{\mathrm{D}}$, habebimus:

$$b\,c\,d=(2)=\frac{b^3\,\mathrm{B\,B}}{\mathrm{C\,D}}$$

ideoque $b^3=(2)\frac{\mathrm{C\,D}}{\mathrm{B\,B}}$, qui valor, ob

$$\mathrm{B\,B}=\frac{(3n+3)^2}{(3n+2)^2}\text{ et }\mathrm{C\,D}=\frac{(3n+5)}{(3n+3)}$$

nobis suppeditat:

$$b^3=(2)\,\frac{(3n+2)^2(3n+5)}{(3n+3)^3}.$$

Similique modo invenietur

$$c^3=(3)\,\frac{(3n+3)^2(3n+6)}{(3n+4)^3}.$$

Quodsi nunc loco n successive scribantur numeri 0, 1, 2, 3, etc., prodibit

$$a^3 = (1) \cdot \frac{(1)^2(4)}{(2)^3} \cdot \frac{(4)^2(7)}{(5)^3} \cdot \frac{(7)^2(10)}{(8)^3} \cdot \text{etc.}$$
$$b^3 = (2) \cdot \frac{(2)^2(5)}{(3)^3} \cdot \frac{(5)^2(8)}{(6)^3} \cdot \frac{(8)^2(11)}{(9)^3} \cdot \text{etc.}$$
$$c^3 = (3) \cdot \frac{(3)^2(6)}{(4)^3} \cdot \frac{(6)^2(9)}{(7)^3} \cdot \frac{(9)^2(12)}{(10)^3} \cdot \text{etc.}$$

qui valores perfecte congruunt cum illis quos in priore dissertatione exhibuimus.

Casus II.

Sit $\frac{(3n+5)}{(3n+4)} = p$, ita ut terminus ille, postremum ordinis a sequens, sit aAp, qui cum non amplius sit Aa, necesse est ut bB et cC procedant in progressione geometrica, eritque

$$bB = aA\sqrt[3]{p} \quad \text{et}$$
$$cC = aA\sqrt[3]{p^2}$$

quorum productum, si insuper ducatur in a, dabit

$$abcBC = a^3AAp$$

unde porro concluditur fore

$$a^3 = (1)\frac{BC}{AAp} = (1)\frac{BC}{AA} \cdot \frac{(3n+4)}{(3n+5)},$$

qui valor ab illo casus prioris tantum in hoc discrepat, quod in fine terminus insuper accessit, ita ut sit

$$a^3 = (1)\frac{(1)^2(4)}{(2)^3} \cdot \frac{(4)^2(7)}{(5)^3} \cdots \frac{(3n+1)^2(3n+4)}{(2n+2)^3} \cdot \frac{(3n+4)}{(3n+5)}$$

unde si primi factores singulorum membrorum removeantur in praecedentia, quo factor ille ultimus debitum locum obtineat, erit

$$a^3 = \frac{(\;)^2}{(\;)} \cdot \frac{(\;)(4)^2}{(2)^2(5)} \cdot \frac{(4)(7)^2}{(5)^2(8)} \cdot \frac{(7)(10)^2}{(8)^2(11)} \cdot \text{etc.}$$

Similique modo invenietur

$$b^3 = \frac{(2)^2}{(3)} \cdot \frac{(2)(5)^2}{(3)^2(6)} \cdot \frac{(5)(8)^2}{(6)^2(9)} \cdot \frac{(8)(11)^2}{(9)^2(12)} \cdot \text{etc.}$$

unde lex progressionis, qua reliqui valores procedunt, jam est perspicua.

Problema 4.

§. 6. *Invenire seriem numerorum* a, b, c, d, *etc. ex datis qua-*

ternorum contiguorum productis abcd $=(1)$, bcde $=(2)$, cdef $=(3)$, *etc.*

Solutio.

Hic igitur termini ordinum a, b, c, d, ita procedent:

$$a,\ a\frac{(2)}{(1)},\ a\frac{(2)(6)}{(1)(5)},\ a\frac{(2)(6)(10)}{(1)(5)(9)},\ \text{etc.}$$

$$b,\ b\frac{(3)}{(2)},\ b\frac{(3)(7)}{(2)(6)},\ b\frac{(3)(7)(11)}{(2)(6)(10)},\ \text{etc.}$$

$$c,\ c\frac{(4)}{(3)},\ c\frac{(4)(8)}{(3)(7)},\ c\frac{(4)(8)(12)}{(3)(7)(11)},\ \text{etc.}$$

$$d,\ d\frac{(5)}{(4)},\ d\frac{(5)(9)}{(4)(8)},\ d\frac{(5)(9)(13)}{(4)(8)(12)},\ \text{etc.}$$

eorumque postremi erunt:

$$a\,\frac{(2)\ (6)\ (10)\ (14) \dots (4n+2)}{(1)\ (5)\ (9)\ (13) \dots (4n+1)} = a\mathrm{A};$$

$$b\,\frac{(3)\ (7)\ (11)\ (15) \dots (4n+3)}{(2)\ (6)\ (10)\ (14) \dots (4n+2)} = b\mathrm{B};$$

$$c\,\frac{(4)\ (8)\ (12)\ (16) \dots (4n+4)}{(3)\ (7)\ (11)\ (15) \dots (4n+3)} = c\mathrm{C};$$

$$d\,\frac{(5)\ (9)\ (13)\ (17) \dots (4n+5)}{(4)\ (8)\ (12)\ (16) \dots (4n+4)} = d\mathrm{D},$$

quorum sequens in ordine a erit $a\mathrm{P} = \frac{(4n+6)}{(4n+5)}$. Prout igitur iste factor $p = \frac{(4n+6)}{(4n+5)}$ fuerit unitati aequalis, vel secus, utrumque casum seorsim evolvemus.

Casus I.

Sit $p = 1$, erit $a\mathrm{A} = b\mathrm{B} = c\mathrm{C} = d\mathrm{D}$, ideoque $b = \frac{a\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$, $c = \frac{a\mathrm{A}}{\mathrm{C}}$, $d = \frac{a\mathrm{A}}{\mathrm{D}}$, ergo

$$abcd = (1) = \frac{a^4\mathrm{A}^3}{\mathrm{BCD}},$$

unde adipiscimur

$$a^4 = (1)\,\frac{\mathrm{BCD}}{\mathrm{A}^3}.$$

Cum igitur sit

$$\mathrm{BCD} = \frac{(4n+5)}{(4n+2)} \quad \text{et} \quad \mathrm{A}^3 = \frac{(4n+2)^3}{(4n+1)^3},$$

his valoribus substitutis erit

$$a^4 = (1)\ \frac{(4n+1)^3\,(4n+5)}{(4n+\ )^4}.$$

Hinc si successive loco n scribantur numeri 0, 1, 2, 3, etc. reperietur

$$a^4 = (1)\ \frac{(1)^3\,(5)}{(2)^4}\cdot\frac{(5)^3\,(9)}{(6)^4}\cdot\frac{(9)^3\,(13)}{(10)^4}\cdot \text{etc.}$$

qui valor perfecte congruit cum illo, quem in priore dissertatione per inductionem derivavimus.

Pro b erit $bB = cC = dD = eE$, hinc $c = \frac{bB}{C}$, $d = \frac{bB}{D}$, $e = \frac{bB}{E}$, ideoque

$$b\,c\,d\,e = (2) = \frac{b^4\,B^3}{C\,D\,E}$$

ac proinde

$$b^4 = (2)\ \frac{C\,D\,E}{B^3} = (2)\ \frac{(4n+2)^3\,(4n+6)}{(4n+3)^4}.$$

Hoc igitur modo habebimus

$$b^4 = (2)\ \frac{(2)^3\,(6)}{(3)^4}\cdot\frac{(6)^3\,(10)}{(7)^4}\cdot\frac{(10)^3\,(14)}{(11)^4}\cdot \text{etc.}$$

Simili modo et reliqui determinantur.

Casus II.

Sit $\frac{(4n+6)}{(4n+5)} = p$, et cum terminus postremum in ordine a sequens sit aAp, medii bB et cC et dD formabunt progressionem geometricam, eritque

$$bB = aA\sqrt[6]{p}$$
$$cC = aA\sqrt[6]{p^2}$$
$$dD = aA\sqrt[6]{p^3}$$

quorum productum, si insuper in a ducatur, ob $abcd = (1)$ dabit

$$a^4 = (1)\ \frac{BCD}{A^3 . p},$$

qui valor ab illo casus prioris aliter non differt, nisi quod in fine insuper factor $\frac{1}{p}$ accesserit, ita ut nunc sit

$$a^4 = (1)\ \frac{(1)^3\,(5)}{(2)^4}\cdot\frac{(5)^3\,(9)}{(6)^4}\cdots\cdots\frac{(4n+1)^3\,(4n+5)^2}{4n+2}\cdot\frac{1}{(4n+6)}$$

unde si factores in numeratore ac in denominatore ita in praecedentes removeantur, ut postremus in denominatore debitum obtineat locum, habebimus pro nostro casu:

$$a^4 = \frac{(1)^3}{(2)} \cdot \frac{(1)(5)^3}{(2)^3(6)} \cdot \frac{(5)(9)^3}{(6)^3(10)} \cdot \frac{(9)(13)^3}{(10)^3(14)} \cdot \text{etc.}$$

Eadem methodo reperitur:

$$b^4 = \frac{(2)^3}{(3)} \cdot \frac{(2)(6)^3}{(3)^3(7)} \cdot \frac{(6)(10)^3}{(7)^3(11)} \cdot \frac{(10)(14)^3}{(11)^3(15)} \cdot \text{etc.}$$

Problema generale.

§. 7. *Invenire seriem numerorum* a, b, c, d, *etc: ex datis productis* ν *contiguorum.*

Solutio.

Perspicuum est methodum in praecedentibus solutionibus adhibitam aeque commode problemati huic generali accommodari posse. Si enim ponantur producta ex illis ν terminis contiguis:

$$a\,b\,c\,d\,e = \text{-- -- -- --}\; z = (1),$$
$$b\,c\,d\,e\,f = \text{-- -- -- --}\; z' = (2),$$
$$c\,d\,e\,f\,g = \text{-- -- -- --}\; z'' = (3),$$

et ita porro, termini ordinum a, b, c, d --- z ita procedent:

$$a,\; a\frac{(2)}{(1)},\; a\frac{(2)\,(\nu+2)}{(1)\,(\nu+1)},\; a\frac{(2)\,(\nu+2)\,(2\nu+2)}{(1)\,(\nu+1)\,(2\nu+1)}\; \text{etc.}$$
$$b,\; b\frac{(3)}{(2)},\; b\frac{(3)\,(\nu+3)}{(2)\,(\nu+2)},\; b\frac{(3)\,(\nu+3)\,(2\nu+3)}{(2)\,(\nu+2)\,(2\nu+2)}\; \text{etc.}$$
$$c,\; c\frac{(4)}{(3)},\; c\frac{(4)\,(\nu+4)}{(3)\,(\nu+3)},\; c\frac{(4)\,(\nu+4)\,(2\nu+4)}{(3)\,(\nu+3)\,(2\nu+3)}\; \text{etc.}$$

-- -- -- -- -- -- -- -- -- -- --

-- -- -- -- -- -- -- -- -- -- --

-- -- -- -- -- -- -- -- -- -- --

$$x,\; x\frac{(\nu-1)}{(\nu-2)},\; x\frac{(\nu-1)\,(2\nu-1)}{(\nu-2)\,(2\nu-2)},\; x\frac{(\nu-1)\,(2\nu-1)\,(3\nu-1)}{(\nu-2)\,(2\nu-2)\,(3\nu-2)}\; \text{etc.}$$
$$y,\; y\frac{(\nu)}{(\nu-1)},\; y\frac{(\nu)\,(2\nu)}{(\nu-1)\,(2\nu-1)};\; y\frac{(\nu)\,(2\nu)\,(3\nu)}{(\nu-1)\,(2\nu-1)\,(3\nu-1)}\; \text{etc.}$$
$$z,\; z\frac{(\nu+1)}{(\nu)},\; z\frac{(\nu+1)\,(2\nu+1)}{(\nu)\,(2\nu)};\; z\frac{(\nu+1)\,(2\nu+1)\,(3\nu+1)}{(\nu)\,(2\nu)\,(3\nu)}\; \text{etc.}$$

eorumque postremi erunt:

$$a\,\frac{(2)\,(\nu+2)\,(2\nu+2)\,(3\nu+2)\,---\,(n\nu+2)}{(1)\,(\nu+1)\,(2\nu+1)\,(3\nu+2)\,---\,(n\nu+1)} = a\,A$$

$$b\,\frac{(3)\,(\nu+3)\,(2\nu+3)\,(3\nu+3)\,---\,(n\nu+3)}{(2)\,(\nu+2)\,(2\nu+2)\,(3\nu+2)\,---\,(n\nu+2)} = b\,B$$

$$c\,\frac{(4)\,(\nu+4)\,(2\nu+4)\,(3\nu+4)\,---\,(n\nu+4)}{(3)\,(\nu+3)\,(2\nu+3)\,(3\nu+3)\,---\,(n\nu+3)} = c\,C$$

- - - - - - - - - -
- - - - - - - - - -
- - - - - - - - - -

$$x\,\frac{(\nu-1)\,(2\nu-1)\,(3\nu-1)\,(4\nu-1)\,---\,(n\nu+\nu-1)}{(\nu-2)\,(2\nu-2)\,(3\nu-2)\,(4\nu-2)\,---\,(n\nu+\nu-2)} = x\,X$$

$$y\,\frac{(\nu)\,(2\nu)\,(3\nu)\,(4\nu)\,---\,(n\nu+\nu)}{(\nu-1)\,(2\nu-1)\,(3\nu-1)\,(4\nu-1)\,---\,(n\nu+\nu-1)} = y\,Y$$

$$z\,\frac{(\nu+1)\,(2\nu+1)\,(3\nu+1)\,(4\nu+1)\,---\,(n\nu+\nu+1)}{(\nu)\,(2\nu)\,(3\nu)\,(4\nu)\,---\,(n\nu+\nu)} = u\,Z.$$

Terminorum postremum sequens in ordine a erit $aA\,\frac{(n\nu+\nu+2)}{(n\nu+\nu+1)}$. Prout igitur iste novus factor, quem vocemus $= p$, fuerit vel unitati aequalis, vel secus, utroque casu procedendum erit ut sequitur.

Casus I.

Sit $p = 1$, eritque $aA = bB = cC = ---- zZ$, ideoque
$b = \frac{aA}{B}$, $c = \frac{aA}{C}$, $d = \frac{aA}{D}$ ---- $z = \frac{aA}{Z}$,

quorum productum dat

$$a\,b\,c\,d\,----\,z = (1) = \frac{a^\nu A^{\nu-1}}{BCD\,---\,Z};$$

ex qua aequatione eruitur

$$a^\nu = (1)\,\frac{BCDE\,---\,Z}{A^{\nu-1}}.$$

Cum igitur sit

$$A^{\nu-1} = \frac{(n\nu+2)^{\nu-1}}{(n\nu+1)^{\nu-1}} \quad \text{et}$$

$$BCDE\,----\,Z = \frac{(n\nu+\nu+1)}{n\nu+2}$$

facta substitutione prodit

$$a^\nu = (1)\,\frac{(n\nu+1)^{\nu-1}\,(n\nu+\nu+1)}{(n\nu+2)^\nu}.$$

Quod si jam successive loco n scribantur numeri 0, 1, 2, 3, etc. orietur valor

$$a^{\nu} = (1)\,\frac{(1)^{\nu-1}(\nu+1)}{2^{\nu}} \cdot \frac{(\nu+1)^{\nu-1}(2\nu+1)}{(\nu+2)^{\nu}} \cdot \frac{(2\nu+1)^{\nu-1}(3\nu+1)}{(2\nu+2)^{\nu}} \text{ . etc.}$$

atque perspicuum est simili prorsus modo determinari b^{ν}. Instituto enim calculo reperitur:

$$b^{\nu} = (2)\,\frac{(2)^{\nu-1}(\nu+2)}{3^{\nu}} \cdot \frac{(\nu+2)^{\nu-1}(2\nu+2)}{(\nu+3)^{\nu}} \cdot \frac{(2\nu+2)^{\nu-1}(3\nu+2)}{(2\nu+3)^{\nu}} \text{ . etc.}$$

et ita de reliquis, quorum lex progressionis est manifesta.

Casus II.

Sit $\frac{(n\nu + \nu + 2)}{(n\nu + \nu + 1)} = p$, et quoniam hoc casu aA, bB, $c\mathfrak{C}$, etc. non amplius ad aequalitatem tendunt, sed ad progressionem geometricam, statuatur

$$b = \frac{a\,A\,\sqrt[\alpha]{p}}{B}$$

$$c = \frac{a\,A\,\sqrt[\alpha]{p^2}}{C}$$

$$d = \frac{a\,A\,\sqrt[\alpha]{p^3}}{D}$$

- - - -

- - - -

$$z = \frac{a\,A\,\sqrt[\alpha]{p^{\nu-1}}}{Z}$$

eritque productum ex omnibus

$$abcd \text{ - - - - } z = (1) = \frac{a^{\nu}\,A^{\nu-1}\,\sqrt[\alpha]{p^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}}}{BCDE \text{ - - - - } Z}$$

unde posito $\alpha = \frac{\nu(\nu-1)}{2}$ erit

$$a^{\nu} = (1)\ \frac{BCDE \ldots Z}{A^{\nu-1}\, p},$$

qui valor ab illo, quem casu primo invenimus, in eo tantum discrepat, quod hic insuper accesserit factor $\frac{1}{p} = \frac{(n\nu + \nu + 1)}{(n\nu + \nu + 2)}$, ita ut pro isto casu II. habeamus

$$a^{\nu} = (1)\ \frac{(1)^{\nu-1}(\nu+1)}{(2)^{\nu}} \cdot \frac{(\nu+1)^{\nu-1}(2\nu+1)}{(\nu+2)^{\nu}} \ldots \frac{(n\nu+\nu+1)}{(n\nu+\nu+2)}$$

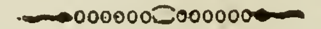
ita ut, si hic postremus factor in praecedentes ita transferatur, ut debitum locum obtineat, se praebeat ista expressio:

$$a^{\nu} = \frac{(1)^{\nu-1}}{(2)} \cdot \frac{(1)(\nu+1)^{\nu-1}}{(2)^{\nu-1}(\nu+2)} \cdot \frac{(\nu+1)(2\nu+1)^{\nu-1}}{(\nu+2)^{\nu-1}(2\nu+2)} \cdot \frac{(2\nu+1)(3\nu+1)^{\nu-1}}{(2\nu+2)^{\nu-1}(3\nu+2)} \text{ etc.}$$

Eaedem operationes si repetantur, dabunt valores pro b^{ν}, c^{ν}, d^{ν}, etc. Ita verbi gratia habebimus

$$b^{\nu} = \frac{(2)^{\nu-1}}{(3)} \cdot \frac{(2)(\nu+2)^{\nu-1}}{(3)^{\nu-1}(\nu+3)} \cdot \frac{(\nu+2)(2\nu+2)^{\nu-1}}{(\nu+3)^{\nu-1}(2\nu+3)} \cdot \frac{(2\nu+2)(3\nu+2)^{\nu-1}}{(2\nu+3)^{\nu-1}(3\nu+3)} \text{. etc.}$$

Reliquos ex sola lege progressionis, jam satis perspicua, derivare licebit.



VÉRIFICATION DE LA LATITUDE

DE L'OBSERVATOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

PAR

V. WISNIEWSKI.

Présenté à la Conférence le 2. Octobre 1816.

Les premières observations, pour la détermination de la latitude de l'Observatoire académique, ont été faites par *De l'Isle*. Cet Astronome rapporte dans le Vol. II. des *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* pag. 495. et suivantes, les hauteurs méridiennes de l'étoile polaire, et celles du soleil aux solstices, observées pour cet effet dans le courant de l'an 1727 et 1728; et il y détermine la latitude de l'Observatoire, par les observations de la Polaire $= 59^\circ\ 56'\ 13''$, et par celles des solstices $= 59^\circ\ 55'\ 50''$. Ayant égard à l'incertitude de la table des réfractions, dont il a fait usage dans le calcul de ces observations, il donne la préférence au premier résultat.

Pour vérifier cette latitude, *Grischow* détermina en 1752 la différence des paralleles entre *Arensbourg* et l'Observatoire de *St. Pétersbourg*, en observant des hauteurs méridiennes de *Procyon*. Ces observations se trouvent à la fin du VIII. Tome des *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, et on y voit dans le sommaire pag. 70. la latitude de l'Observatoire qui en résulte $= 59^\circ\ 56'\ 23'',5$ ou $24'',5$. Enfin Mr. de *Roumofski*, ayant observé le solstice d'été de l'an 1763, détermina cette même latitude $= 59^\circ\ 56\ 23'$, comme l'on voit dans le XII. Tome des *Novi Commentarii*. Et cette dernière détermination a été adoptée jusqu'à présent pour la latitude de l'Observatoire de l'Académie.

Quoique plusieurs observations du soleil, faites par moi en 1804 avec différens sextans à réflexion, m'avaient deja indiqué la nécessité d'une petite augmentation de cette latitude, je n'osai cependant alors rien décider par rapport à la quantité de cette correction, vu que les instruments de cette espèce ne peuvent pas servir à une détermination définitive de la latitude d'un Observatoire. Mais l'Observatoire ayant été muni depuis d'un cercle répétiteur, je repris la vérification de la latitude au moyen de cet instrument; et j'ai l'honneur de présenter ici à l'Académie Impériale les observations, que je viens de faire pour cet effet.

Le cercle répétiteur mentionné est construit par Mr. *Troughton*, célèbre artiste anglais, d'après les principes de Mr. *de Borda*. Il a dix-huit pouces anglais de diamètre, et ses deux lunettes achromatiques ont vingt-cinq pouces de foyer et vingt-cinq lignes d'ouverture. La lunette supérieure porte quatre verniers, qui indiquent immédiatement dix secondes sexagésimales; et le niveau est assez sensible, parce que la bulle s'y déplace de trois dixiemes d'une ligne pour une seconde d'inclinaison. Avant d'opérer avec cet instrument, je l'ai vérifié avec soin. Ayant rendu l'axe optique de la lunette supérieure sensiblement parallèle au limbe du cercle, j'ai examiné la position de l'axe rotatoire du limbe. Pour cet effet, ayant mis le limbe dans une position sensiblement verticale, j'ai placé le fil parallèle au limbe, sur un objet terrestre assez éloigné; puis après avoir donné au limbe un mouvement d'un demi tour, et ayant remis la lunette sur l'objet, j'ai observé si le fil le tranchait encore dans le même point; et s'il y avait quelque déviation, je l'ai remarqué sur le cercle azimuthal, dont les verniers indiquent immédiatement dix secondes. Ayant fait cette opération sur différens points du limbe, j'ai reconnu, que l'axe rotatoire du limbe penchait vers le 330me degré de la division, et que sa déviation de la position verticale était seulement de $50''$ sexagésimales. Les corrections, dues à cette petite déviation, deviennent insensibles, parce

que les distances au zénith observées sont assez grandes. Pour mettre le cercle dans la position verticale, aussi exactement que cela se peut faire dans ces circonstances, j'attachai les pinces avec le fil-à plomb très près du diamètre, qui passe par 60° et 240° de la division; j'éludai ainsi l'erreur, qui pourrait avoir lieu dans cette opération, à cause de l'inclinaison de l'axe du limbe, ci-dessus mentionnée. Afin d'anéantir aussi tout le jeu de l'axe qui porte la lunette supérieure, je serrai fortement la vis, adaptée pour cet effet à l'extremité inférieure de cet axe; et j'eus encore d'autres attentions, pour éviter toute source d'erreur, qui aurait pu attaquer le principe de répétition.

Nonobstant toutes ces vérifications du cercle, je pris le parti d'observer avec cet instrument des étoiles, qui culminent au sud et au nord du zénith à des hauteurs peu différentes: afin que l'erreur de l'instrument, s'il en restait encore, n'influat pas sur la détermination de la latitude de l'Observatoire. Ces étoiles sont les quatre suivantes: la *Polaire*, α de la *grande Ourse*, α de l'*Aigle* et α d'*Andromède*. J'adoptai leur position moyenne d'après les déterminations les plus récentes, et nommément pour la Polaire d'après la détermination donnée par Mr. *Bessel* dans les Éphémérides de Berlin de l'an 1818, savoir: ascension droite moyenne le 1er Janvier 1816 $= 0^h\ 56'\ 2'',71$; déclinaison moyenne à la même époque $= 89°\ 19'\ 36'',68$; la précession avec le mouvement propre, en ascension droite $= + 14'',18$, et en déclinaison $= + 19',47$. Quant aux autres trois étoiles, c'est, par rapport à leur déclinaison, la détermination de Mr. *Pond*, qui mérite la plus grande confiance, vu qu'elle est faite récemment avec un excellent cercle entier de nouvelle construction. Voici ces déclinaisons moyennes pour le 1er Janvier 1813: α *grande Ourse* $= 62°\ 45'\ 28'',5$, α *Aigle* $= 8°\ 23'\ 1'',2$ et α *Andromède* $= 28°\ 3'\ 30'',4$. La précession annuelle de ces étoiles en déclinaison, y compris le mouvement propre, a été adoptée telle, que l'a donnée Mr. *Piazzi* dans les

29 *

Éphémérides de Berlin de l'an 1811; où j'ai pris aussi l'ascension droite moyenne de ces étoiles avec son changement annuel. Dans le calcul de l'aberration de ces étoiles, j'ai mis la constante de l'aberration = 20″,25; et pour les nutations lunaire et solaire, j'ai fait usage des constantes determinées par Mr. *Laplace*.

Le tems de l'observation a été marqué d'après un chronomètre d'*Arnold*, comparé chaque fois avant et après l'observation, avec une excellente pendule de *Brockbanks*, reglée sur le tems sidéral par des observations de quelques étoiles à la lunette méridienne. C'est ainsi que j'ai déterminé le tems du chronomètre au moment de la culmination de chaque étoile, qu'on voit ci-dessous à la tête des observations. J'ai pris les réfractions dans les tables données récemment par Mr. *Bessel*.

Voici mes observations:

Vendredi le $\frac{25 \text{ Août}}{6 \text{ Septembre}}$ 1816.

Distances au Zénith de l'étoile α de la grande Ourse.

Tems du Chronomètre au moment du passage inférieur de l'étoile - - - = 11^h 49′ 47″,2.

N°. de l'observation.	Tems du chronomètre.	Angle horaire en tems.	Réduction au méridien.	Barom. = 28 :4 pouc. Therm de *Réaumur* = + 2°,7.
1.	11^h 39′ 51″,2	9′ 57″,6	+ 53″,1	L'arc total parcouru = 687° 3′ 11″,25
2.	.. 43 5, 6	6 42, 7	+ 24, 1	
3.	.. 47 9, 6	2 38, 0	+ 3, 7	
4.	.. 50 32, 4	0 45, 3	+ 0, 3	
5.	.. 54 17, 6	4 31, 1	+ 10, 9	
6.	.. 56 42, 8	6 56, 7	+ 25, 8	
7.	12 1 52, 4	12 7, 2	+ 78, 6	
8.	.. 4 15, 2	14 30, 3	+ 112, 6	
9.	.. 8 52, 0	19 7, 9	+ 195, 8	
10.	.. 11 18, 0	21 34, 3	+ 249, 0	
11.	.. 15 34, 4	25 51, 4	+ 357, 6	
12.	.. 18 9, 6	28 27, 0	+ 432, 9	

Somme = 1544′,4.

Distance zénithale moyenne observée - - = 57° 15′ 15″,94

Réfraction - - - - + 1 28, 39

Réduction au méridien - - + 2 8, 70.

Distance zénithale méridienne de α *grande Ourse* = 57° 18′ 53″,03.

Le même jour.

Observations des distances au Zénith de l'étoile α d'Andromède.

Tems du Chronomètre au moment du passage au méridien - - - - = 12h 56′ 17″,2.

N°.	Tems de l'observation.	Angle horaire en tems.	Réduction au méridien.	Barom. franç 28,24 p. Therm. de *Réaumur* + 12°,7.
1.	12h 45′ 43″,2	10′ 35″,7	— 184″,5	L'arc total parcouru = 255° 2′ 50″,00
2.	.. 49 38, 0	6 40, 3	— 73, 2	
3.	.. 52 28, 0	3 49, 8	— 24, 1	
4.	.. 54 12, 0	2 5, 5	— 7, 2	
5.	.. 59 6, 8	2 50, 1	— 13, 2	
6.	13 1 26, 8	5 10, 4	— 44, 0	
7.	.. 6 54, 4	10 38, 9	— 186, 3	
8.	.. 9 20, 8	13 5, 7	— 281, 8	

Somme = 814″,3.

Distance zénithale moyenne observée - = 31° 52′ 51″,25
Réfraction calculée - - - + 35, 47
Réduction au méridien - - — 1 41, 79

Distance zénithale méridienne de α d'*Andromède* = 31° 51′ 44″,93.

Samedi le $\frac{2}{14}$ Septembre 1816.

Observations de α de la grande Ourse au passage inférieur.

La culmination de l'étoile a eu lieu à 11^h 19′ 21″,9, tems du chronomètre.

N°.	Tems de l'observation.	Angle horaire en tems.	Réduction.	Barom. = 28,42 p. Therm. = + 5°,2.
1.	11^h 5′ 34″,0	13′ 50″,1	+ 102″,4	L'arc parcouru = 572° 38′ 8″,75
2.	.. 9 22, 8	10 0, 7	+ 53, 6	
3.	.. 13 46, 0	5 36, 8	+ 16, 9	
4.	.. 17 28, 4	1. 53, 8	+ 1, 9	
5.	.. 25 21, 2	6 0, 3	+ 19, 3	
6.	.. 28 41, 6	9 21, 2	+ 46, 8	
7.	.. 32 39, 2	13 19, 5	+ 95, 0	
8.	.. 35 17, 4	15 58, 1	+ 136, 4	
9.	.. 38 42, 4	19 23, 7	+ 201, 3	
10.	.. 42 6, 0	22 47, 8	+ 278, 0	
			Somme = 951″,6	

Distance zénithale moyenne observée - — = 57° 15′ 48″,87

Réfraction - - - - + 1 32, 48

Réduction moyenne - - - + 1 35, 16

Distance méridienne au zénith de *α grande Ourse* = 57° 18′ 56″,51.

Le même jour.

Observations de l'étoile polaire au passage supérieur.

Tems du chronomètre au moment de la culmination de la *Polaire* - - $= 13^h\ 23'\ 23'',7$.

N°.	Tems de l'observation.	Angle horaire en tems.	Réduction.	Barom. 28,42 p. Therm. + 5°,0.
1.	$12^h\ 59'\ 26'',0$	$24'\ 1'',5$	$-\ 34'',8$	L'arc total parcouru $= 454^\circ\ 5'\ 8'',75$
2.	13 3 8, 4	20 18, 5	— 24, 9	
3.	.. 6 6, 0	17 20, 4	— 18, 1	
4.	.. 8 29, 6	12 56, 5	— 13, 5	
5.	.. 11 29, 6	11 56, 0	— 8, 6	
6.	.. 14 15, 2	9 10, 0	— 5, 1	
7.	.. 20 6, 4	3 17, 8	— 0, 7	
8.	.. 23 48, 0	0 24, 3	— 0, 0	
9.	.. 27 17, 6	3 54, 5	— 0, 9	
10.	.. 31 52, 8	8 30, 4	— 4, 4	
11.	.. 34 36, 0	11 14, 1	— 7, 6	
12.	.. 37 43, 6	14 22, 2	— 12, 5	
13.	.. 41 36, 0	18 15, 2	— 20, 1	
14.	.. 48 33, 2	25 13, 5	— 38, 4	
15.	.. 51 49, 6	28 30, 4	— 49, 0	
16.	.. 56 22, 0	33 3, 5	— 65, 9	
		Somme	$= 304',5$	

Distance zénithale moyenne observée - $= 28^\circ\ 22'\ 49'',30$

Réfraction - - - - - - $+\ 32,\ 20$

Réduction - - - - - - $-\ 19,\ 03$

Distance zénithale méridienne de la *Polaire* - $= 28^\circ\ 23'\ 2'',47$.

Vendredi le $\frac{8}{20}$ Septembre 1816.

Distances au zénith de α de l'Aigle.

Tems du chronomètre au passage de l'étoile = $7^h 46' 24'',0$.

N°.	Tems de l'observation.	Angle horaire en tems.	Réduction.	Barom. = 28,09 p. Therm. = + 8°,0.
1.	$7^h 23' \; 9'',2$	$23' \; 18'',6$	— 673 ",6	L'arc parcouru = 619° 20' 34",37
2.	. 27 38, 0	18 49, 1	— 439, 3	
3.	. 31 28, 0	14 58, 4	— 278, 3	
4.	. 34 25, 2	12 0, 8	— 179, 2	
5.	. 37 44, 8	8 40, 6	— 93, 5	
6.	. 42 0, 0	4 24, 7	— 24, 2	
7.	. 52 57, 2	6 34, 3	— 53, 6	
8.	. 56 20, 0	9 57, 6	— 123, 2	
9.	. 59 31, 6	13 9, 7	— 215, 1	
10.	8 2 35, 2	16 13, 8	— 326, 9	
11.	. 7 21, 6	21 1, 0	— 547, 8	
12.	. 11 14, 0	24 54, 1	— 763, 5	

Somme = 3723, 2

Distance moyenne observée	- -	= 51° 36' 42",86
Réfraction	- - -	+ 1 13, 16
Réduction	- - -	— 5 10, 27

Distance zénithale méridienne de *α de l'Aigle* = 51° 32' 45",75.

Samedi le $\frac{9}{21}$ Septembre.

Distances au zénith de α de l'Aigle.

Passage de l'étoile au méridien à = 7h 42′ 31″,8 tems du chronomètre.

N°.	Tems de l'observation.	Angle horaire en tems.	Réduction.	Barom. = 27,98 p. Therm. + 9°,2.
1.	7h 39 5″,6	3′ 26″,7	— 14″,7	L'arc parcouru = 619° 28′ 42″,50
2.	. 41 6, 4	1 25, 6	— 2, 5	
3.	. 46 15, 2	3 44, 0	— 17, 3	
4.	. 48 44, 4	6 13, 6	— 48, 2	
5.	. 52 31, 2	10 1, 0	— 124, 7	
6.	. 54 18, 0	11 48, 1	— 173, 0	
7.	. 56 58, 8	14 29, 4	— 260, 7	
8.	. 59 16, 4	16 47, 3	— 349, 8	
9.	8 3 27, 2	20 58, 8	— 545, 9	
10.	. 6 31, 6	24 3, 7	— 717, 6	
11.	. 9 40, 8	27 13, 4	— 918, 0	
12.	. 11 40, 6	29 13, 6	— 1057, 6	
		Somme	= 4230, 0	

Distance moyenne observée - - = 51° 37′ 23″,54

Réfraction - - - + 1 12, 47

Réduction - - - — 5 52, 50

Distance au zenith méridienne de α de *l'Aigle* = 51° 32′ 43″,51.

Le même jour.

Observations de α de la grande Ourse au passage inférieur.

Passage de l'étoile au méridien à = $10^h\ 52'\ 26'',8$.

N°.	Tems de l'observation.	Angle horaire en tems.	Réduction au méridien.	Barom. = 27,96 p. Therm. = + 9°,2.
1.	$10^h\ 41'\ 42'',0$	$10'\ 46'',6$	+ 62″,1	L'arc parcouru = 458° 2′ 45″,00
2.	.. 56 37, 2	4 11, 1	+ 9, 4	
3.	11 1 36, 8	9 11, 5	+ 45, 2	
4.	.. 3 47, 2	11 22, 3	+ 69, 2	
5.	.. 9 0, 4	16 36, 3	+ 147, 5	
6.	.. 10 42, 0	18 18, 2	+ 179, 2	
7.	.. 13 40, 0	21 16, 7	+ 242, 2	
8.	.. 15 30, 4	23 7, 4	+ 286, 0	

Somme = 1040″,8.

Distance moyenne observée - - -	= 57° 15′ 20″,62
Réfraction calculée - - -	+ 1 29, 09
Réduction au méridien - -	+ 2 10, 10
Distance zénithale méridienne de *α de la grande Ourse* - - -	= 57° 18′ 59″,81.

Le même jour.

Observations de α d'Andromède.

Passage de l'étoile au méridien à $= 11^h\,58'\,56'',0$.

N°.	Tems de l'observation	Angle horaire en tems.	Réduction.	Barom. = 27,94 p. Therm. = + 9°,3.
1.	11h 45 17″,6	13 40″,6	— 307″,0	L'arc parcouru = 383° 14′ 18″,12
2.	.. 48 37, 6	10 20, 1	— 175, 4	
3.	.. 52 18, 8	6 38, 3	— 72, 4	
4.	.. 55 52, 8	3 3, 7	— 15, 4	
5.	.. 59 27, 2	0 31, 3	— 0, 4	
6.	12 2 23, 2	3 27, 8	— 19, 7	
7.	.. 7 20, 8	8 26, 2	— 116, 9	
8.	.. 10 52, 4	11 58, 4	— 235, 4	
9.	.. 14 38, 0	15 44, 6	— 406, 6	
10.	.. 17 9, 2	18 16, 2	— 547, 2	
11.	.. 21 0, 8	22 8, 4	— 802, 6	
12.	.. 23 12, 4	24 20, 4	— 969, 2	
			Somme = 3668″,2	

Distance moyenne observée - - = 31° 56′ 11″,51

Réfraction - - - - + 0 35, 72

Réduction - - - - - — 5 5, 68

Distance zénithale méridienne de *α d'Andromède* = 31° 51′ 41″,55.

Le même jour.

Observations de la Polaire au passage supérieur.

Passage de la Polaire au méridien à = 12h 56′ 31″,0.

N°.	Tems de l'observation.	Angle horaire en tems.	Réduction.	Barom. = 27,94 p. Therm. = + 9°,3.
1.	12h 54′ 18″,0	2′ 13″,4	— 0″,3	L'arc parcouru = 397° 26′ 42″,5
2.	.. 57 45, 6	1 14, 8	— 0, 1	
3.	13 3 39, 6	7 9, 8	— 3, 1	
4.	.. 5 46, 0	9 16, 5	— 5, 2	
5.	.. 11 29, 6	15 1, 1	— 13, 6	
6.	.. 14 34, 0	18 6, 0	— 19, 8	
7.	.. 18 6, 8	21 39, 3	— 28, 3	
8.	.. 21 48, 8	25 22, 0	— 38, 8	
9.	.. 27 40, 8	31 14, 9	— 58, 9	
10.	.. 30 3, 2	33 37, 7	— 68, 2	
11.	.. 33 8, 0	36 43, 0	— 81, 3	
12.	.. 36 40, 0	40 15, 6	— 97, 3	
13.	.. 39 54, 0	43 30, 1	— 114, 0	
14.	.. 42 56, 0	46 32, 6	— 130, 4	

Somme = 659″,3

Distance zénithale moyenne observée -	= 28° 23′ 20″,18
Réfraction - - - -	+ 31, 00
Réduction - - - -	— 47, 09
Distance au zénith méridienne de *la Polaire*	= 28° 23′ 4″,09.

Mecredi le $\frac{13}{25}$ Septembre.

Observations de α de la grande Ourse au passage inférieur.

Passage de l'étoile au méridien à $10^h\ 36'\ 0'',1$.

N°.	Tems de l'observation.	Angle horaire en tems.	Réduction.	Barom. = 28,34 p. Therm. = + 4°,0.
1.	$10^h\ 20'\ 10'',0$	$15'\ 52'',7$	+ 134'',9	L'arc parcouru = 687° 1' 7'',50
2.	.. 23 38, 0	12 24, 1	+ 82, 3	
3.	.. 26 32, 4	9 29, 2	+ 48, 2	
4.	.. 29 42, 8	6 18, 3	+ 21, 3	
5.	.. 36 8, 0	0 7, 9	+ 0, 0	
6.	.. 40 2, 4	4 3, 0	+ 8, 8	
7.	.. 44 53, 6	8 55, 0	+ 42, 5	
8.	.. 48 52, 8	12 54, 8	+ 89, 2	
9.	.. 56 1, 6	20 4, 8	+ 215, 7	
10.	.. 58 34, 8	22 38, 4	+ 274, 2	
11.	11 1 25, 2	25 29, 3	+ 347, 5	
12.	.. 4 36, 4	28 41, 0	+ 440, 0	
		Somme	= 1704'',6	

Distance moyenne observée - -	= 57° 15' 5'',62
Réfraction - - - -	+ 1 32, 64
Réduction moyenne - - -	+ 2 22, 05
Distance zénithale méridienne de *α de la grande Ourse* - - -	= 57° 19' 0'',31.

Jeudi le $\frac{14}{26}$ Septembre.

Observations de α de l'Aigle.

Tems du passage au méridien = $7^h\ 22'\ 19'',1$.

N°.	Tems de l'observation.	Angle horaire en tems.	Réduction.	Barom. 28,42 p. Therm. + 4°,7.
1.	7^h 7′ 0″,0	15′ 21″,6	−292″,9	L'arc parcouru = 722° 38′ 58″,13
2.	.. 9 52, 8	12 28, 3	−193, 1	
3.	.. 13 3, 6	9 17, 0	−107, 0	
4.	.. 15 56, 8	6 23, 3	− 50, 7	
5.	.. 18 58, 4	3 21, 2	− 14, 0	
6.	.. 27 25, 6	5 7, 3	− 32, 6	
7.	.. 29 26, 0	7 8, 1	− 63, 2	
8.	.. 31 56, 4	9 38, 9	−115, 6	
9.	.. 37 11, 6	14 54, 9	−276, 1	
10.	.. 41 39, 6	19 23, 7	−466, 6	
11.	.. 43 42, 0	21 26, 4	−570, 0	
12.	.. 45 54, 4	23 39, 2	−693, 5	
13.	.. 48 8, 0	25 53, 1	−830, 2	
14.	.. 49 48, 0	27 33, 4	−940, 6	

Somme = 4646″,1

Distance moyenne observée - -	= 51° 37′ 4″,15
Réfraction - - - - -	+ 1 15, 25
Réduction - - - - -	— 5 31, 86
Distance zénithale méridienne de α de *l'Aigle*	= 51° 32′ 47″,54.

Le même jour.

Observations de α d'Andromède.

Tems du passage de l'étoile au méridien = $11^h\ 38'\ 42'',4$.

N°. de l'observation.	Tems du chronomètre.	Angle horaire en tems.	Réduction au méridien.	Barom. = 28 41 pouc. Therm + 3°,7.
1.	$11^h 26' 51'',2$	$11' 53',1$	— 231″,9	L'arc parcouru = 383° 7′ 56″,88
2.	.. 31 15, 2	7 28, 4	— 91, 8	
3.	.. 33 30, 0	5 13, 2	— 44, 8	
4.	.. 35 39, 2	3 3, 7	— 15, 4	
5.	.. 40 0, 0	1 17, 8	— 2, 8	
6.	.. 43 0, 0	4 18, 3	— 30, 4	
7.	.. 45 8, 0	6 26, 6	— 68, 2	
8.	.. 50 24, 0	11 43, 5	— 225, 7	
9.	.. 54 0, 8	15 20, 9	— 386, 5	
10.	.. 56 14, 0	17 34, 4	— 506, 4	
11.	.. 59 34, 0	20 55, 0	— 716, 6	
12.	12 3 4, 8	24 26, 4	— 977, 2	

Somme = 3297″,7.

Distance moyenne observée	=	31° 55′ 39″,74
Réfraction	+	37, 37
Réduction au méridien	—	4 34, 81

Distance zénithale méridienne de *α d'Andromède* = 31° 51′ 42″,30.

Le même jour.

Observations de la Polaire au passage supérieur.

Tems du passage au méridien = $12^h\ 36'\ 18'',7$.

N°.	Tems de l'observation.	Angle horaire en tems.	Réduction.	Barom. 28,41 p. Therm. + 4°,5.
1.	$12^h\ 26'\ 53'',6$	$9'\ 26'',6$	— 5″,4	L'arc parcouru = 464° 10′ 8″,75
2.	.. 29 32, 0	6 47, 8	— 2, 8	
3.	.. 31 56, 4	4 23, 0	— 1, 2	
4.	.. 35 8, 4	1 10, 5	— 0, 1	
5.	.. 39 57, 2	3 39, 1	— 0, 8	
6.	.. 42 39, 2	6 21, 5	— 2, 4	
7.	.. 46 57, 2	10 40, 2	— 6, 9	
8.	.. 50 10, 0	13 53, 6	— 11, 7	
9.	.. 56 12, 0	19 56, 6	— 24, 0	
10.	.. 59 16, 0	23 1, 1	— 32, 0	
11.	13 2 20, 0	26 5, 6	— 41, 1	
12.	.. 5 33, 6	29 19, 7	— 51, 9	
13.	.. 8 24, 4	32 11, 0	— 62, 5	
14.	.. 11 24, 0	35 11, 0	— 74, 6	
15.	.. 16 32, 0	40 19, 9	— 98, 0	
16.	.. 19 28, 8	43 17, 2	—112, 8	
			Somme = 528″,2	

Distance moyenne observée - -		= 28° 23′ 8″,05
Réfraction - - - - -	+	32, 27
Réduction moyenne - - - -	—	33, 01
Distance zénithale méridienne de la *Polaire*		= 28° 23′ 7″,31.

En réduisant toutes ces distances zénithales méridiennes à une même époque celle du $\frac{7}{19}$ Septembre, moyennant le changement calculé de la déclinaison apparente, on aura le tableau suivant :

L'étoile polaire.

Jour de l'observation.	Distance méridienne observée.	Réduction.	Distance zénithale réduite au $\frac{7}{15}$ Sept.	Nombre des observations.
le $\frac{2}{14}$ Sept.	28° 23′ 2″,47	+ 1″,83	28° 23′ 4″,30	16.
— $\frac{9}{21}$ —	- - 4, 09	— 0, 75	- - 3, 34	14.
— $\frac{14}{26}$ —	- - 7, 31	— 2, 63	- - 4, 68	16.

Distance zénithale méridienne le $\frac{7}{19}$ Sept. 28° 23′ 4″,14 46.

α Andromède.

le $\frac{25 \text{ Août}}{6 \text{ Sept.}}$	31° 51′ 44″,93	— 2″,91	31° 51′ 42″,02	8.
— $\frac{9}{21}$ Sept.	- - 41, 55	+ 0, 40	- - 41, 95	12.
— $\frac{14}{26}$ —	- - 42, 30	+ 1, 40	- - 43, 70	12.

Distance zénithale méridienne le $\frac{7}{19}$ Sept. 31° 51′ 42″,65 32.

α grande Ourse.

le $\frac{25 \text{ Août}}{6 \text{ Sept.}}$	57° 18′ 53″,03	+ 4, 34	57° 18′ 57″,37	12.
— $\frac{2}{14}$ Sept.	- - 56, 51	+ 1, 67	- - 58, 18	10.
— $\frac{9}{21}$ —	- - 59, 81	— 0, 66	- - 59, 15	8.
— $\frac{13}{25}$ —	- 19 0, 31	— 1, 99	- - 58, 32	12.

Distance zénithale méridienne le $\frac{7}{19}$ Sept. 57° 18′ 58″,17 42.

α Aigle.

le $\frac{8}{20}$ Sept.	51° 32′ 45″,75	+ 0, 02	51° 32′ 45″,77	12.
— $\frac{9}{21}$ —	- - 43, 51	+ 0, 04	- - 43, 55	12.
— $\frac{14}{26}$ —	- - 47, 54	+ 0, 14	- - 47, 68	14.

Distance zénithale méridienne le $\frac{7}{19}$ Sept. 51° 32′ 45″,77 38.

Nous avons donc le $\frac{7}{19}$ Sept. la somme des distances zénithales observées de *l'étoile polaire* et de *α Andromède* = 60° 14′ 46″,79. Mais la différence de la déclinaison apparente de ces étoiles, calculée pour

le même jour, est de 60° 14′ 55″,80; il-y-a donc 9″,01 de moins; ce qui provient de la somme des erreurs du cercle répétiteur, correspondante aux distances zénithales de dites étoiles. Pareillement la somme des distances zénithales de *α grande Ourse* et *α Aigle* a été observée ci-dessus = 108° 51′ 43″, 94. Mais on a la somme des complémens de la déclinaison apparente de dites étoiles le $\frac{7}{19}$ Septembre = 108° 51′ 57″, 33; la somme des erreurs du cercle répétiteur, correspondante aux distances zénithales de ces étoiles, est donc de 13″, 39. De même en combinant les observations de la *Polaire* avec celles de *α de l'Aigle*, on trouve la somme des erreurs = 11″, 25; et par les observations de *α d'Andromède* et de *α grande Ourse* on a pour la même somme = 11″, 15.

Les précautions nécessaires ayant été prises, pour éviter toute source d'erreur qui pourrait attaquer le principe de repétition, on doit être surpris de voir neanmoins si peu d'accord dans les résultats ci-dessus rapportés. On serait peut-être tenté, d'attribuer ces erreurs du cercle à quelque jeu de la vis de rapel de la lunette supérieure; mais dans ce cas les erreurs devraient être à peu près constantes pour toutes les distances au zénith, ce qui pourtant n'a pas lieu dans les sommes des erreurs ci-dessus rapportées. Au reste il faut remarquer que, pour obvier à une erreur de ce genre, la vis de rapel a été munie d'un ressort et d'une chaine de montre, moyennant quoi elle est pressée continuellement contre son écrou et contre ses collets, de sorte qu'elle ne peut y vaciller d'aucune maniere. Je me suis aussi assuré par des expériences réiterées, que la vis de pression destinée à fixer l'alidade sur le limbe du cercle, remplit très bien sa fonction. Après d'infructueuses recherches sur la source des erreurs mentionnées du cercle, je remarquai enfin que la lunette supérieure, étant attachée à la pièce du centre sur une base trop petite, savoir de cinq pouces seulement, pourrait être sujette à une petite flexion. Pour m'en convaincre, ayant mis le cercle dans une position verticale,

je pointai les deux lunettes, supérieure et inférieure, sur un objet terrestre, et j'attachai ensuite un poids de quatre onces près de l'objectif de la lunette supérieure. Je remarquai alors comme je l'ai présumé, que la lunette supérieure avait subi évidemment une flexion: car le fil horisontal de cette lunette ne couvrait plus l'objet terrestre, quoique cela avait lieu à la lunette inférieure. Cette flexion était à-peu-près de quinze secondes, et elle avait encore augmenté par un autre poids pareil, ajouté ensuite au premier. Ainsi il devient vraisemblable par ces expériences, que les erreurs du cercle ci-dessus mentionnées, tirent leur origine de cette source. Or une telle flexion de la lunette supérieure devant être dans son maximum à 90° du zénith, et nulle dans le zénith même, on pourra supposer par approximation l'erreur du cercle x', sur une distance au zénith observée α', à-peu-près égale à $A \sin \alpha'$; où A est une constante à déterminer par l'observation. Soient donc pour la *Polaire*, *α d'Andromède*, *α de la grande Ourse*, et *α de l'Aigle*, les distances au zénith observées et les erreurs du cercle correspondantes: α', x'; α'', x''; α''', x'''; et α^{IV}, x^{IV}; en faisant usage des quatre sommes des erreurs du cercle ci-dessus rapportées, nous aurons pour la détermination de la constante A, les quatre équations suivantes :

$$A = \frac{x' + x''}{\sin\alpha' + \sin\alpha''} = \frac{9'',01}{1,0033} = 8'',98$$

$$= \frac{x''' + x^{IV}}{\sin\alpha''' + \sin\alpha^{IV}} = \frac{13'',39}{1,6248} = 8'',24$$

$$= \frac{x' + x^{IV}}{\sin\alpha' + \sin\alpha^{IV}} = \frac{11'',25}{1,2585} = 8'',94$$

$$= \frac{x'' + x'''}{\sin\alpha'' + \sin\alpha'''} = \frac{11,15}{1,3696} = 8'',14.$$

Les quatre valeurs obtenues ainsi pour la constante A, s'accordent assez bien pour justifier notre hypothèse; nous adopterons donc pour la valeur de A la moyenne $8'',575$, et nous ajouterons aux distances au zénith observées de quatre étoiles mentionnées, les corrections respectives: $A \sin\alpha'$, $A \sin\alpha''$, $A \sin\alpha'''$ et $A \sin\alpha^{IV}$. Nous obtiendrons ainsi pour la latitude de l'Observatoire les résultats suivans :

Nombre d'observations	Nom de l'étoile.	Jour de l'observation.	Correction des distances au zénith, $A \sin \alpha$.	Distance au zénith observée et corrigée.	Déclinaison apparente calculée.	Latitude de l'Observatoire de l'Académie.
12.	*α. grande Ourse*	♀ $\frac{25.\ \text{Août}}{6.\ \text{Sept.}}$	+7″,22	57°19′ 0″,25	62°44′28″,42	59°56′31″,33
8.	*α. d'Andromède*	- - -	+4, 53	31 51 49, 46	28 4 41, 01	- - 30, 47
10.	*α. gr. Ourse*	♄ le $\frac{2}{14}$ Sept.	+7, 22	57 19 3, 73	62 44 25, 73	- - 30, 54
16.	*la Polaire*	- - -	+4, 08	28 23 6, 55	88 19 37, 92	- - 31, 37
12.	*α. de l'Aigle*	♀ le $\frac{8}{20}$ Sept.	+6, 71	51 32 52, 46	8 23 38, 63	- - 31, 09
12.	*α. de l'Aigle*	♄ le $\frac{9}{21}$ —	+6, 71	51 32 50, 22	8 23 38, 66	- - 28, 88
8.	*α gr. Ourse*	- - -	+7, 22	57 19 7, 03	62 44 23, 40	- - 29, 57
12.	*α. d'Andromède*	- - -	+4, 53	31 51 46, 08	28 4 44, 38	- - 30, 46
14.	*la Polaire*	- - -	+4, 08	28 23 8, 17	88 19 40, 51	- - 32, 34
12.	*α. gr. Ourse*	☿ le $\frac{13}{25}$ Sept.	+7, 22	57 19 7, 53	62 44 22, 07	- - 30, 40
14.	*α. de l'Aigle*	♃ le $\frac{14}{26}$ Sept	+6, 71	51 32 54, 25	8 23 38, 76	- - 33, 01
12.	*α d'Andromède*	- - -	+4, 53	31 51 46, 83	28 4 45, 38	- - 32, 21
16.	*la Polaire*	- - -	+4, 08	28 23 11, 39	88 19 42, 39	- - 31, 00

158. Latitude moyenne dans le rapport du nombre d'observations = 59°56′31″,08.

Cette détermination fait voir que la latitude de l'Observatoire de l'Académie a été supposée jusqu'à présent trop petite de 8″; dorénavant nous la supposerons en nombres ronds = 59° 56′ 31″.

Les résultats obtenus pour la latitude, par les observations des quatre étoiles mentionnées, s'accordent assez bien, comme l'on voit dans le tableau suivant :

	Latitude de l'Observatoire.	Nombre d'observations.
Polaire - -	59° 56″ 31″,54	46.
α d'Andromède	- - 31, 15	32.
α grande Ourse	- - 30, 54	42.
α de l'Aigle -	- - 31, 09	38.

DE L'ABERRATION DES ÉTOILES FIXES.

PAR

F. T. SCHUBERT.

Présenté à la Conférence le 26 Février 1817.

§. 1. L'aberration des corps célestes est une fonction de leur vitesse et de celle de la lumière. Cette dernière étant regardée comme constante, quelle que soit la nature et la distance des astres, les seules variables dont l'aberration dépend, sont les vitesses de la terre et de l'astre dont il s'agit. De plus, le mouvement des étoiles fixes étant tout-à-fait insensible, leur aberration est donnée par une fonction, dans laquelle il n'entre qu'une seule variable, savoir la vitesse de la terre, ou plutôt son rapport à celle de la lumière. Il est vrai que cette vitesse, dans toute l'étendue de l'orbe terrestre, ne change que de sa 30me partie, de sorte que la vitesse et l'aberration vraie ne s'écarte jamais de la moyenne que de sa 60me partie. Les astronomes se sont donc permis, dans leurs calculs des aberrations, de regarder comme constant le mouvement de la terre, ou le rapport qui existe entre sa vitesse et celle de la lumière; et j'avais pris la même liberté dans mon traité d'*Astronomie théorique*. Mais comme il est indispensable, d'avoir égard à la variabilité du mouvement, lorsqu'il s'agit des planètes, dont la vitesse ou ses variations sont plus considérables, ce qui est surtout le cas de Mercure qui a la plus grande vitesse et excentricité, il paraît naturel, d'apporter le même soin au mouvement de la terre, et par conséquent aux aberrations des étoiles fixes. Les formules que j'avais trouvées pour cet effet, et qui sont contenues dans ce mémoire, sont à peu près les mêmes que celles données par Mr. *Delambre* dans son excellent ouvrage d'*A-*

stronomie théorique et pratique, qui vient de paraître. Mais comme je les ai trouvées d'une autre manière, et que cet objet mérite d'être envisagé sous plusieurs points de vue, je crois que ce petit mémoire ne sera pas tout-à-fait inutile.

§. 2. La sensation de la vue est l'effèt d'une liaison entre notre oeil et un objet éloigné, produite par la lumière, et nous voyons l'objet suivant la direction, dans laquelle le rayon sorti de cet objet vient frapper nos yeux. Cette direction, à l'instar de tous les effèts mécaniques, est composée de la vitesse et de la direction de ces trois corps, l'objet, l'oeil, et la lumière, ou des deux derniers seulement, lorsqu'il s'agit des étoiles fixes dont le mouvement n'est pas sensible. Leur aberration dépend donc 1) du rapport qui existe entre les vitesses de la lumière et de la terre, 2) de l'angle que fait le mouvement de la terre avec la direction du rayon de lumière qui frappe nos yeux, c'est-à-dire, de l'angle formé par la tangente de l'orbe terrestre et la ligne droite menée de la terre à l'étoile, angle que nous nommerons Φ. Or on sait, par le théorème de la composition des vitesses et des forces, connu sous le nom du parallélogramme des forces, que la déviation de la lumière de sa direction originaire, ou l'aberration que nous appellerons ω, est donnée par cette proportion:

> sin Φ est à sin ω ou à ω, comme la vitesse de la lumière est à celle de la terre.

Nommant donc V, v, ces vitesses, le lieu apparent de l'étoile s'inclinera du lieu vrai vers la tangente de l'orbe terrestre, d'un angle $\omega = \frac{v}{V} \sin \Phi$. Pour déterminer le rapport $\frac{v}{V}$, nous suivrons Mr. *Delambre* qui a trouvé, par une foule d'observations d'éclipses des satellites de Jupiter, que la lumière parcourt le grand axe de l'orbe terrestre en 16 min. 26 sec. Pendant le même tems, la terre décrit autour du Soleil, avec sa vitesse moyenne, un angle de $40'',5$; et comme le moyen mouvement d'une planète est égal à un arc circulaire, dont le rayon est le demi-grand axe de son

ellipse, la valeur moyenne de $\frac{v}{V}$ est $\frac{\sin 20'',25}{1}$, ou en secondes d'un degré, $\frac{v}{V} = 20'',25$. En nommant μ, ν, le moyen et le vrai mouvement de la terre, la véritable valeur de $\frac{v}{V}$, dans un point donné de l'orbite de la terre, sera $\frac{\nu}{\mu}\, 20'',25$. Faisant donc, pour abréger,

$20'',25 = m$ et $\nu = \xi\mu$, nous aurons

(A) $\omega = \xi m \sin \Phi$.

§. 3. Soit (*Fig.* 2.) T la terre, Tt la direction de son mouvement, ou la tangente de son orbite, TF la droite menée au vrai lieu d'une étoile, qui serait aussi la direction suivant laquelle nous verrions l'étoile, si la terre était immobile. Alors, menant dans le plan FTt, entre TF et Tt, une droite Tf qui fait avec TF l'angle ω, le lieu apparent de l'étoile sera déterminé par la ligne Tf; et FT$f = \omega$ sera l'aberration, laquelle doit être décomposée en deux directions, dont l'une est perpendiculaire à l'Ecliptique, et l'autre parallele à elle. Tab. II. Fig. 2.

§. 4. Soit ATB l'orbite elliptique de la terre, le Soleil se trouvant au foyer S, et qu'on abaisse, d'un point quelconque F de la droite TF, une ligne FG perpendiculaire au plan de l'écliptique, qui rencontre ce plan au point G. Ayant mené du point T occupé par la terre, TG et la tangente de l'ellipse Tt, le plan FTG sera perpendiculaire au plan de l'écliptique GSTt; et nommant $\odot$, λ, les longitudes du Soleil et de l'étoile, β la latitude de celle-ci, et ψ l'angle S T t formé par la tangente et le rayon vecteur de l'ellipse, on aura

$$\text{FTG} = \beta,\ \text{GTS} = \odot - \lambda = \eta,\ \text{GT}t = \psi - \eta.$$

Il y a donc, autour du centre de la sphère T, un triangle sphérique, formé par les deux cathètes FTG $= \beta$, GT$t = \psi - \eta$, et l'hypothénuse FT$t = \Phi$ (§. 2.), dans laquelle se trouve aussi la droite Tf, formant avec TF l'angle FT$f = \omega$ (§. 2.).

Tab. II. Fig. 3. §. 5. On voit ce triangle dans la 3. *figure*, où T, F, f, G, t, désignent les mêmes points que dans la 2. *figure*, en sorte que le lieu de l'étoile F est transporté par l'aberration en f. Menant donc l'arc d'un grand cercle fb perpendiculaire à l'écliptique, et le petit cercle $f\beta$ parallèle à l'écliptique, Fβ sera le décroissement de la latitude, et Gb celui de la longitude, parce que les longitudes sont comptées dans le sens tTG (Voy. *Fig.* 2.). On a donc l'aberration en latitude, $\partial\beta = -F\beta$, et l'aberration en longitude, $\partial\lambda = -G\beta = -\frac{f\beta}{\cos\beta}$. Le petit triangle F$\beta f$, ayant pour hypothénuse l'arc Ff ou l'angle FT$f = \omega$ qui ne surpasse jamais $20''$ (§. 2.), se confond avec un triangle rectiligne: on aura donc $F\beta = \omega \cos F$, $f\beta = \omega \sin F$, ce qui donne, en restituant la valeur de $\omega = \xi m \sin\Phi$ (§. 2.),

$$\partial\beta = -\xi m \sin\Phi \cos F, \quad \partial\lambda = -\xi m \frac{\sin\Phi \sin F}{\cos\beta}.$$

§. 6. La trigonométrie sphérique fournissant les équations $\sin\Phi \sin F = \sin Gt = \sin(\psi - \eta)$, et $\operatorname{tg}\Phi \cos F = \operatorname{tg} FG = \operatorname{tg}\beta$, il viendra $\partial\beta = -\xi m \operatorname{tg}\beta \cos\Phi$, et $\partial\lambda = -\xi m \frac{\sin(\psi - \eta)}{\cos\beta}$, où à cause de $\cos\Phi = \cos FG \cos Gt = \cos\beta \cos(\psi - \eta)$,

$$\partial\beta = -\xi m \sin\beta \cos(\psi - \eta).$$

Comme l'angle $\psi = STt$ (Fig. 2.) diffère très-peu d'un angle droit, dans toute l'étendue de l'orbe terrestre, à cause de son excentricité peu considérable, nous ferons $\psi = 90^\circ - \kappa$, κ étant un très-petit arc dépendant de l'excentricité e de la terre; d'où il vient

$$\partial\beta = -\xi m \sin\beta \sin(\eta + \kappa), \quad \partial\lambda = -\xi m \frac{(\cos\eta + \kappa)}{\cos\beta}.$$

Nous verrons qu'il serait tout-à-fait inutile de porter la précision, dans le développement des aberrations, au delà de la seconde puissance de l'excentricité e. Cela posé, on aura $\sin\kappa = \operatorname{tang}\kappa = \kappa$, et $\cos\kappa = 1 - \frac{\kappa^2}{2}$, d'où il vient

$$\text{(B)} \quad \partial\beta = -\xi m \sin\beta \left(\sin\eta + \kappa\cos\eta - \frac{\kappa^2}{2}\sin\eta\right)$$

$$\text{(C)} \quad \partial\lambda = -\xi m \sec\beta \left(\cos\eta - \kappa\sin\eta - \frac{\kappa^2}{2}\cos\eta\right).$$

§. 7. Pour exprimer ξ et $\varkappa$ en fonction de l'excentricité e, la nature de l'ellipse donne d'abord $\tan \psi = \frac{1 - e \cos \alpha}{e \sin \alpha}$, α étant l'anomalie vraie du soleil, comptée de son apogée. Or, $\varkappa$ étant $= 90^\circ - \psi$, on a $\tan \varkappa = \cot \psi$, ou $\varkappa = \frac{e \sin \alpha}{1 - e \cos \alpha} = e \sin \alpha (1 + e \cos \alpha)$. D'ailleurs les lois de *Kepler* donnent (§. 2.) $\nu = \mu \sqrt{\frac{1 - 2e\cos\alpha + e^2}{1 - e^2}}$, d'où il suit $\xi = (1 - 2e\cos\alpha + e^2)^{\frac{1}{2}} (1 - e^2)^{-\frac{1}{2}}$, ou

$$\xi = 1 - e\cos\alpha + \tfrac{e^2}{4}(3 - \cos 2\alpha).$$

En substituant cette valeur, celle de $\varkappa$, et $\varkappa^2 = e^2 \sin^2 \alpha = \frac{e^2}{2}(1 - \cos 2\alpha)$, on aura $\xi\varkappa = e \sin\alpha$, $\xi\varkappa^2 = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2}\cos 2\alpha$, et les équations (B) (C) deviendront

$$\partial\beta = - m \sin\beta\,[(1 + \tfrac{e^2}{2}) \sin\eta + e(\sin\alpha \cos\eta - \cos\alpha \sin\eta)],$$
$$\partial\lambda = - m \sec\beta\,[(1 + \tfrac{e^2}{2}) \cos\eta - e(\cos\alpha\cos\eta + \sin\alpha \sin\eta)], \text{ ou}$$
$$\partial\beta = - m \sin\beta\,((1 + \tfrac{e^2}{2}) \sin\eta + e \sin(\alpha - \eta)),$$
$$\partial\lambda = - m \sec\beta\,((1 + \tfrac{e^2}{2}) \cos\eta - e \cos(\alpha - \eta)).$$

L'excentricité de la terre étant $e = 0{,}0168$, et $m = 20'',25$ (§. 2.), il viendra $me = 0'',3402$: $\frac{me^2}{2} = 0'',0029$. En nommant donc ϖ la longitude de l'apogée du soleil, et restituant les valeurs $\eta = \odot - \lambda$, $\alpha = \odot - \varpi$, on aura $\alpha - \eta = \lambda - \varpi$; d'où l'on tirera

aberr. lat. $\partial\beta = - 20'',253 . \sin\beta \sin(\odot - \lambda) - 0'',34 . \sin\beta \sin(\lambda - \varpi)$;

aberr. long. $\partial\lambda = - 20'',253 . \frac{\cos(\odot - \lambda)}{\cos\beta} + 0'',34 . \frac{\cos(\lambda - \varpi)}{\cos\beta}$.

§. 8. Comme ces corrections sont renfermées dans la période d'une année et dans les limites de 20'' à 21'', les premières différentielles des formules trigonométriques suffiront, pour en conclure les aberrations en déclinaison et en ascension droite. En nommant ε l'obliquité de l'écliptique, δ et ϱ la déclinaison et l'ascension droite de l'etoile, la trigonométrie fournit les équations suivantes, en faisant pour abréger, $\sin\varepsilon = h$, $\cos\varepsilon = k$;

I. $\sin\delta = k \sin\beta + h \cos\beta \sin\lambda$; II. $\tan\varrho = \frac{k \sin\lambda - h \tan\beta}{\cos\lambda}$;

III. $\frac{\sin\beta}{\cos\delta} = k \tan\delta - h \sin\varrho = A$; IV. $\cos\varrho \tan\lambda = h \tan\delta + k \sin\varrho = B$;

V. $\cos\beta \cos\lambda = \cos\delta \cos\varrho$;

d'où il suit d'abord, $Ak + Bh = \text{tang}\,\delta$, $Bk - Ah = \sin\varrho$.
La différentiation des équations I. II. donnera

$$\partial\delta\cos\delta = \partial\beta\,(k\cos\beta - h\sin\beta\sin\lambda) + h\,.\,\partial\lambda\cos\beta\cos\lambda,$$

$$\frac{\partial\varrho}{\cos^2\varrho} = -\frac{h\,\partial\beta}{\cos^2\beta\cos\lambda} + \frac{k - h\,\text{tang}\,\beta\sin\lambda}{\cos^2\lambda}\,\partial\lambda.$$

En faisant encore pour abréger, $\sin\odot = m$, $\cos\odot = n$, $\sin\varpi = p$, $\cos\varpi = q$, $20'',253 = a$; $0'',34 = b$; les valeurs précédentes de $\partial\beta$, $\partial\lambda$, deviendront

$$\partial\beta = -\sin\beta\,((am - bp)\cos\lambda - (an - bq)\sin\lambda),$$
$$\partial\lambda = -\sec\beta\,((an - bq)\cos\lambda + (am - bp)\sin\lambda).$$

En introduisant ces valeurs, on trouvera

$$\partial\delta\cos\delta = -(am - bp)\cos\lambda\,(k\sin\beta\cos\beta + h\cos^2\beta\sin\lambda)$$
$$+ (an - bq)\,(k\sin\beta\cos\beta\sin\lambda - h + h\cos^2\beta\sin^2\lambda),$$

$$\frac{\partial\varrho}{\cos^2\varrho} = \frac{am - bp}{\cos\beta\cos\lambda}\left(\frac{h\sin\beta}{\cos\beta\cos\lambda} - k\,\text{tang}\,\lambda\right) - \frac{an - bq}{\cos\beta\cos\lambda}\,k;$$

et en substituant III. IV. V.

$$\partial\delta\cos\delta = -(am - bp)\cos^2\delta\cos\varrho\,(Ak + Bh) + (an - bq)\,(ABk\cos^2\delta - h + B^2h\cos^2\delta),$$

$$\frac{\partial\varrho}{\cos^2\varrho} = \frac{am - bp}{\cos\delta\cos^2\varrho}\,(Ah - Bk) - \frac{an - bq}{\cos\delta\cos\varrho}\,k,$$

et en vertu des équations $Ak + Bh = \text{tg}\,\delta$, $Bk - Ah = \sin\varrho$,

$$\partial\delta = -(am - bp)\sin\delta\cos\varrho + (an - bq)\left(B\sin\delta - \frac{h}{\cos\delta}\right), \text{ ou}$$
$$\partial\delta = -(am - bp)\sin\delta\cos\varrho + (an - bq)(k\sin\delta\sin\varrho - h\cos\delta), \text{ et}$$
$$\partial\varrho = -(am - bp)\sec\delta\sin\varrho - (an - bq)\,k\sec\delta\cos\varrho.$$

§. 9. Pour les deux siècles prochains, on peut, sans erreur sensible, supposer $\varepsilon = 23°\,27'$, ce qui donne

$ah = 8'',0597$; $ak = 18'',5803$; $bh = 0'',1353$; $bk = 0'',3119$.

Il en résulte

$$\partial\delta = \sin\delta\begin{bmatrix} 18'',58\,.\,\cos\odot\sin\varrho - 20'',253\,.\,\sin\odot\cos \\ + 0'',34\,.\,\sin\varpi\cos\varrho - 0'',312\,.\,\cos\varpi\sin\varrho \end{bmatrix}$$
$$- \cos\delta\,[8'',06\,.\,\cos\odot - 0'',135\,.\,\cos\varpi],$$

$$\partial\varrho = -\sec\delta\begin{bmatrix} 18'',58\,.\,\cos\odot\cos\varrho + 20'',253\,.\,\sin\odot\sin\varrho \\ - 0'',312\,.\,\cos\varpi\cos\varrho - 0'',34\,.\,\sin\varpi\sin\varrho \end{bmatrix}.$$

On peut donner à ces équations la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\partial\delta = {} & \sin\delta\,[19'',417 \,.\, \sin(\varsigma - \odot) - 0'',836 \,.\, \sin(\varsigma + \odot)] \\
& - 4'',03 \,.\, \cos(\odot - \delta) - 4'',03 \,.\, \cos(\odot + \delta) \\
& + \sin\delta\,[0'',326 \,.\, \sin(\varpi - \varsigma) + 0'',014 \,.\, \sin(\varpi + \varsigma)] \\
& + 0'',068 \,.\, \cos(\varpi - \delta) + 0'',068 \,.\, \cos(\varpi + \delta) \\
\partial\varsigma = {} & - \sec\delta\,[19'',417 \,.\, \cos(\varsigma - \odot) - 0'',836 \,.\, \cos(\varsigma + \odot)] \\
& + \sec\delta\,[0'',326 \,.\, \cos(\varpi - \varsigma) - 0'',014 \,.\, \cos(\varpi + \varsigma)].
\end{aligned}$$

La premiere équation peut encore prendre cette forme, en négligeant les termes qui sont au dessous de $0'',01$;

$$\begin{aligned}
\partial\delta = {} & + 9'',708 \,.\, \cos(\odot + \delta - \varsigma) - 9'',708 \,.\, \cos(\varsigma + \delta - \odot) \\
& - 4'',03 \,.\, \cos(\odot - \delta) \quad - 4'',03 \,.\, \cos(\odot + \delta) \\
& + 0'',418 \,.\, \cos(\odot + \varsigma - \delta) - 0'',418 \,.\, \cos(\odot + \varsigma + \delta) \\
& + 0'',163 \,.\, \cos(\varsigma + \delta - \varpi) - 0'',163 \,.\, \cos(\varpi + \delta - \varsigma) \\
& + 0'',068 \,.\, \cos(\varpi - \delta) \quad + 0'',068 \,.\, \cos(\varpi + \delta).
\end{aligned}$$

§. 10. Le même procédé donnera aux aberrations en latitude et en longitude (§. 7.), cette forme :

$$\begin{aligned}
\partial\beta = {} & + 10'',126 \,.\, \cos(\odot + \beta - \lambda) - 10'',126 \,.\, \cos(\lambda + \beta - \odot) \\
& + 0'',17 \,.\, \cos(\lambda + \beta - \varpi) - 0'',17 \,.\, \cos(\varpi + \beta - \lambda) ; \\
\partial\lambda = {} & \sec\beta\,(- 20'',253 \,.\, \cos(\odot - \lambda) + 0'',34 \,.\, \cos(\lambda - \varpi)).
\end{aligned}$$

§. 11. Si l'on suppose $\varepsilon = 23^\circ\, 26'$ et $\varepsilon = 23^\circ\, 28'$, au lieu de $23^\circ 27'$, les coëfficiens $19'',417$; $9'',708$; $4'',03$; $0'',836$; $0'',418$; deviennent $19'',418$ et $19'',415$; $9'',709$ et $9'',708$; $4'',027$ et $4'',033$; $0'',835$ et $0'',837$; $0'',418$ et $0'',419$; et les changemens des autres termes sont tout-à-fait insensibles. On voit donc que les équations précédentes peuvent être employées, sans aucun changement, pendant plus de mille ans avant et après 1800, si l'on donne à δ, ς, les valeurs qui répondent à l'époque donnée. Il faut cependant faire une exception relativement à l'aberration en ascension droite, si les étoiles sont très-peu éloignées du pole.

§. 12. L'arc $\lambda - \varpi$ ne changeant que de $12''$ par an, on peut regarder comme constans, pendant un long intervalle de tems, les termes ayant pour argumens β et $\lambda - \varpi$, d'autant que ces termes eux-mêmes sont très-petits. La longitude de l'apogée ϖ sera $= 100^\circ$ l'an 1830: en donnant donc à β, λ, les valeurs qu'elles auront à la même époque, on peut calculer, pour chaque étoile; les quantités, $0'',34 \,.\, \sin\beta \sin(\lambda - 100^\circ) = A$, et

$$0'',34 \,.\, \sec\beta \cos(\lambda - 100^\circ) = B.$$

Alors il viendra

$$\textit{aberr. lat.} = 10'',126 \,.\, \cos(\odot + \beta - \lambda) - 10'',126 \,.\, \cos(\lambda + \beta - \odot) - A,$$

$$\textit{aberr. long.} = -20'',253 \,.\, \frac{\cos(\odot - \lambda)}{\cos\beta} + B\,;$$

équations dont on peut se servir pendant tout le siècle présent.

MÉMOIRE

SUR L'APPLICATION À LA GÉOMÉTRIE PLANE

DE PLUSIEURS PROPRIÉTÉS DE L'HYPERBOLOÏDE DE REVOLUTION ET DU CÔNE, ET RÉSOLUTION DE QUELQUES PROBLÊMES RELATIFS AUX COURBES DU SECOND DÉGRÉ.

PAR

P. D. BAZAINE,

COLONEL DU CORPS DES INGÉNIEURS DES VOIES DE COMMUNICATION.

Présenté à la Conférence le 6 Mai 1818.

L'Analyse appliquée à la géométrie dans l'espace, ne donne pas seulement la solution de tous les problêmes qui dépendent de la considération des surfaces ou des corps dont la génération est connue ; elle fournit encore la démonstration d'une foule de propriétés particulières qui appartiennent à des figures planes, et que leur importance et l'usage qu'on en peut faire rendent également propres à étendre le domaine de la géométrie ordinaire.

J'essayerai dans ce mémoire de donner une première preuve de cette assertion, et de faire voir comment on peut déduire de considérations analytiques, qui se rapportent à deux des surfaces les plus connues du second dégré, plusieurs propriétés dont l'application offre un nouveau moyen de solution pour un assez grand nombre de problêmes relatifs à des courbes planes.

Considérons dans l'espace deux droites A et B situées d'une manière quelconque l'une par rapport à l'autre ; menons par la ligne qui rencontre à la fois ces deux droites et qui mesure

leur plus courte distance, un plan perpendiculaire à l'une d'elles, à A par exemple. Par cette plus courte distance et par la seconde droite B, faisons passer un nouveau plan; supposons enfin que ce dernier plan tourne autour de la droite A, en faisant toujours le même angle avec le plan mené perpendiculairement à cette droite; il est visible que dans ce mouvement, la seconde droite B engendrera autour de la première A, une surface composée de deux nappes égales et symétriques réunies par un cercle qui aura pour rayon la plus courte distance des deux droites.

C'est de cette surface que nous allons nous occuper, et d'abord nous nous proposerons de déterminer son équation.

Tab. III. Fig. 1. Prenons pour plan des x, y, (Fig. 1.) le plan du cercle décrit par la plus courte distance des deux droites, et supposons que l'axe fixe soit l'axe des z lui-même: cet axe fixe sera projeté en A. Soit M la projection de l'un des points de la surface; la génératrice qui passera par ce point se projetera évidemment suivant la tangente MC au cercle AC, et d'après le mode de génération de la surface, le rapport de z à MC étant égal à la tangente de l'angle que forme la génératrice avec le plan des x, y, sera constant pour tous les points de la surface. En appelant m cette tangente, on aura donc $\frac{z}{MC}=m$. Or $MC=\sqrt{\overline{AM}^2-\overline{AC}^2}$, ou si l'on fait $AC=r$, $MC=\sqrt{x^2+y^2-r^2}$: donc il viendra pour l'équation de la surface:

$$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2-r^2}}=m.$$

Ou bien $z^2=m^2x^2+m^2y^2-m^2r^2$ - - - - - - - - - (1).

Cette équation donnant pour z deux valeurs égales et de signes contraires, fait voir comme nous l'avons observé déjà, que la surface est formée de deux nappes égales et parfaitement symétriques par rapport au plan des xy.

Si dans l'équation (1) on fait successivement $x = 0$, $y = 0$, on obtiendra :

$$z^2 = m^2 y^2 - m^2 r^2$$
$$z^2 = m^2 x^2 - m^2 r^2,$$

Equations qui toutes deux appartiennent à la même hyperbole située sur des plans différents, et comme la position des axes AX et AY est absolument arbitraire, on en conclut immédiatement qu'un plan quelconque passant par la droite fixe, coupe la surface suivant une hyperbole qui est la même pour tous les plans coupants. La surface proposée peut donc être considérée comme engendrée par la révolution de cette hyperbole constante tournant autour de l'axe fixe. Cette propriété remarquable a fait donner à cette surface le nom d'*hyperboloïde de révolution.*

En supposant que le point M fût la projection d'un point de la surface, supérieur au plan des xy, nous avons obtenu l'équation de cette surface, en menant par le point M la tangente MC, et en regardant cette tangente comme la projection de la génératrice, c'est-à-dire en considérant la surface comme engendrée par une droite qui se meut de C en C′: mais si par le même point M, nous menons la ligne MC′ tangente au cercle AC, et si nous regardons cette ligne comme la projection de la génératrice, nous parviendrons évidemment à la même équation. La surface proposée peut donc être considérée comme engendrée, soit par la droite projetée en CM, et qui se meut de C en C′, soit par la droite projetée en C′M, et qui se meut de C′ en C. L'hyperboloïde de révolution jouit ainsi de cette nouvelle propriété, que par chacun de ses points on peut toujours mener deux droites entièrement comprises sur la surface, et qui toutes deux sont des génératrices de cette surface.

Nous allons maintenant faire voir que ce même hyperboloïde de révolution, coupé par un plan disposé d'une manière con-

venable, donne ainsi que le cône, toutes les courbes du second dégré.

Pour rendre notre démonstration plus facile, et montrer en même temps la liaison qui existe entre les courbes données par une même section dans le cône et l'hyperboloïde de révolution,
Tab. 3. Fig. 2. nous menerons par l'origine A (Fig. 2.), une droite AB qui fasse avec l'axe des x un angle égal à celui que forme la génératrice de l'hyperboloïde avec le plan des xy. Cette droite en tournant autour de l'axe des z sans changer d'inclinaison, engendrera un cône droit dont le sommet sera l'origine A, et dont la projection sur le plan des xz rabattu sur celui des xy, sera représentée par DAB. L'équation de cette surface conique sera évidemment :

$$z^2 = m^2 x^2 + m^2 y^2.$$

Pour remplir le but que nous nous proposons, nous devrions prendre l'équation générale d'un plan quelconque P,

$$z = Ax + By + C,$$

et combinant cette équation avec celles du cône et de l'hyperboloïde, faire voir que les équations résultantes de cette combinaison donnent des courbes du second dégré dépendantes de la relation qui existe entre les coëfficients A, B et C. Mais nous pouvons simplifier de beaucoup les calculs, en prenant pour axe des y par exemple, une parallèle à la trace du plan P sur le plan des xy. Cette transformation dans les coordonnées ne changera rien aux équations du cône et de l'hyperboloïde ; elle réduira seulement l'équation du plan sécant à $z = Ax + C$, et les considérations relatives aux sections dans les deux surfaces, n'en seront pas moins générales.

Tous les cas à examiner nous seront donnés en faisant successivement les hypothèses suivantes : $A = 0$; $A < m$; $A = m$; $A > m$.

1er *Cas :* L'hypothèse $A = 0$ en réduisant l'équation du plan à $z = C$, donne pour les sections faites par ce plan dans le cône et l'hyperboloïde, les équations suivantes :

$$C^2 = m^2 x^2 + m^2 y^2 \ : \ C^2 + m^2 r^2 = m^2 x^2 + m^2 y^2.$$

Ces équations appartiennent toutes deux à des cercles dont les rayons sont pour le 1er, $\frac{C}{m}$; pour le 2eme, $\sqrt{\frac{C^2}{m^2} + r^2}$.

Non seulement ce résultat apprend, comme on devait s'y attendre, que les sections faites dans les deux surfaces, par des plans parallèles au plan des xy, sont des cercles dont les centres se trouvent sur l'axe fixe, mais il fournit encore un moyen simple et élégant de tracer par points une hyperbole dont on connaît les axes principaux.

Nous avons vu en effet que le plan des xz coupait l'hyperboloïde de révolution suivant une hyperbole dont l'équation est $z^2 = m^2 x^2 + m^2 r^2$. Une simple discussion de cette équation ferait voir que les points S et S′ où le cercle S′KS rencontre l'axe des x, ne sont autre chose que les sommets de la courbe, et que les génératrices extrêmes du cône projeté en DAB, sont les asymptotes de cette même courbe. En considérant donc GG′ comme la projection d'une section parallèle au plan des xy, on aura d'après ce qui précède :

$$FH = \frac{C}{m} ; \ FG = \sqrt{\frac{C^2}{m^2} + r^2}.$$

Ainsi en prenant $AI = FH$, l'hypothénuse IK du triangle rectangle IAK sera égale à FG. Si donc on ramène au moyen d'un arc de cercle, IK de I en L, et si l'on mène LG parallèle à l'asymptote AB, l'intersection de cette parallèle avec la ligne FH prolongée, donnera un point G de l'hyperbole.

2eme *Cas:* $(A < m)$: L'équation du plan sécant $z = Ax + C$ qu'on peut écrire ainsi : $z = A(x + b)$, devient en élevant ses deux membres au quarré :

$$z^2 = A^2 x^2 + 2 A^2 b x + A^2 b^2,$$

qui retranchée de l'équation $z^2 = m^2 x^2 + m^2 y^2$ appartenante au cône, donne pour l'équation de la courbe d'intersection projetée sur le plan des xy;

$$(m^2 - A^2) x^2 + m^2 y^2 - 2 A^2 b x - A^2 b^2 = 0 \quad . \; . \; . \; (2).$$

En discutant cette équation, on reconnaîtra aisément qu'elle appartient à une ellipse rapportée à deux axes rectangulaires qui passent par un de ses foyers, et dont l'un suit la direction de son grand axe. Les coordonnées de ses sommets se déduiront de l'équation :

$$(m^2 - A^2) x^2 - 2 A^2 b x - A^2 b^2 = 0,$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$\big((m + A) x + A b\big)\big((m - A) x - A b\big) = 0,$$

et donne par conséquent : $x = -\frac{A b}{m + A}$ et $x = \frac{A b}{m - A}$.

On trouvera d'ailleurs pour l'expression du demi-grand axe a et du demi-petit axe a' de cette ellipse : $a = \frac{m A b}{m^2 - A^2}$; $a' = \frac{A b}{\sqrt{m^2 - A^2}}$, et l'abscisse du centre sera égale à $\frac{A^2 b}{m^2 - A^2}$.

La seule disposition du plan coupant fait voir que la courbe qui résulte de l'intersection de ce plan et du cône, qui se projette suivant l'ellipse dont nous venons de parler, a pour valeurs de ses demi-axes principaux, $\frac{m A b \sqrt{1 + A^2}}{m^2 - A^2}$ et $\frac{A b}{\sqrt{m^2 - A^2}}$. La première de

Tab. III. Fig. 3. ces quantités représente EF (Fig. 3.), et la seconde, la corde LM du cercle horisontal qui passe par le point G milieu de EF.

La combinaison des équations de l'hyperboloïde et du plan sécant, donne pour la projection de leur intersection sur le plan des xy;

$$(m^2 - A^2) x^2 + m^2 y^2 - 2 A^2 b x - A^2 b^2 - m^2 r^2 = 0,$$

équation qui ne diffère de la précédente (2) que par le terme constant $-m^2 r^2$; elle appartient à une ellipse rapportée à deux axes rectangulaires qui passent par un des points de son grand axe et dont l'un se confond avec ce grand axe lui-même.

Pour connaître les coordonnées des sommets de cette nouvelle courbe, on résoudra l'équation :

$$(m^2 - A^2)\, x^2 - 2\, A^2 bx - A^2 b^2 - m^2 r^2 = 0\,,$$

qui donne : $x = \frac{A^2 b}{m^2 - A^2} \pm \frac{m\sqrt{A^2(b^2 - r^2) + m^2 r^2}}{m^2 - A^2}$.

Cette valeur de x apprend que l'abscisse du centre $\frac{A^2 b}{m^2 - A^2}$, est la même que pour l'ellipse résultante de l'intersection du plan sécant et du cône. Elle fait voir aussi que le demi-grand axe α de la courbe nouvelle a pour expression $\frac{m\sqrt{A^2(b^2 - r^2) + m^2 r^2}}{m^2 - A^2}$, ou bien $\sqrt{\frac{m^2 A^2 b^2}{(m^2 - A^2)^2} + \frac{m^2 r^2}{m^2 - A^2}}$: d'où $\alpha = \sqrt{a^2 + \frac{m^2 r^2}{m^2 - A^2}}$, a étant, comme on l'a vu, le demi-grand axe de l'ellipse obtenue précédemment.

On trouverait par un calcul fort simple, pour le demi-petit axe α' de la nouvelle ellipse :

$$\alpha' = \frac{\sqrt{A^2(b^2 - r^2) + m^2 r^2}}{\sqrt{m^2 - A^2}} = \sqrt{a'^2 + r^2}.$$

Si l'on remarque que le point g (fig. 4.) étant la projection Tab. III.
du centre de l'ellipse, on a $ge = gf = a$, et $gp = gn = \alpha$; on en Fig. 4.
conclura immédiatement que $pe = fn$, et que par conséquent PE = FN, c'est-à-dire que les parties d'une droite quelconque interceptées entre les asymptotes et l'hyperbole, sont égales entr'elles. Cette propriété a déjà été démontrée d'une autre manière dans plusieurs traités des sections coniques.

La construction des quantités qui déterminent la courbe résultante de l'intersection de l'hyperboloïde par un plan, ne présente aucune espèce de difficultés. Nous observerons seulement que dans l'expression de $\alpha = \sqrt{a^2 + \frac{m^2 r^2}{m^2 - A^2}}$, le terme $\frac{m^2 r^2}{m^2 - A^2}$ est le quarré du demi-grand axe de la section faite dans l'hyperboloïde par un plan mené par l'origine des coordonnées parallèlement au plan sécant. Et en effet ce plan ayant pour équation $z = Ax$,

coupe l'hyperboloïde suivant une courbe dont la projection sur le plan des xy a pour équation :

$$(m^2 - A^2)\, x^2 + m^2 y^2 = m^2 r^2.$$

Or cette équation est évidemment celle d'une ellipse rapportée à son centre et à ses axes, et si l'on y fait successivement $x = 0$, $y = 0$, on trouvera pour expressions de ses demi-axes principaux r et $\frac{m\,r}{\sqrt{m^2 - A^2}}$.

Tab. III. Fig. 5. Pour construire cette dernière quantité dont nous ferons usage par la suite, on menera par le point A (Fig. 5.) une parallèle au plan sécant. Par l'extrémité du rayon $AS = r$, on élevera la perpendiculaire BD. Du point S comme centre avec un rayon SB, on décrira le demi-cercle BED : par le point C où la parallèle au plan sécant rencontrera SB, on élevera CE perpendiculaire sur BD; on joindra le point E et le point S; on menera CF parallèle à ES, et l'on joindra les points F et D. AG menée parallèlement à FD, donnera SG pour la ligne cherchée.

Pour se rendre raison de cette construction, on observera que l'on a $SC = Ar$, et $SB = SD = mr$, donc aussi : $CD = mr + Ar$, $CB = mr - Ar$, et $CE = SF = \sqrt{m^2 r^2 - A^2 r^2}$.

De plus les triangles semblables FSD, ASG donnent la proportion :

$$SF : SA :: SD : SG,$$

ou bien $\sqrt{m^2 r^2 - A^2 r^2} : r :: m\,r : SG$;

donc $SG = \frac{m\,r^2}{\sqrt{m^2 r^2 - A^2 r^2}} = \frac{m\,r}{\sqrt{m^2 - A^2}}$.

3eme *Cas.* $(A = m)$: l'équation du plan sécant devient pour ce cas particulier : $z = m\,(x + b)$.

La courbe d'intersection de ce plan et du cône, projetée sur le plan des xy, a pour équation :

$$m^2\,(x + b)^2 = m^2 x^2 + m^2 y^2$$

ou bien : $y^2 = 2\,b\,x + b^2$ . . . . (3).

Cette équation appartient évidemment à une parabole rapportée à deux axes rectangulaires qui passent par son foyer, et dont l'un se confond avec son axe principal. Son paramètre est égal à $2b(1+\sqrt{2})$.

L'hyperboloïde de révolution est coupé par le même plan suivant une courbe dont la projection sur le plan des xy, a pour équation :

$$m^2(x+b)^2 = m^2x^2 + m^2y^2 - m^2r^2$$

$$\text{ou} \ldots y^2 = 2bx + b^2 + r^2 \quad \ldots \quad (4).$$

Cette courbe se projette donc comme la précédente suivant une parabole sur le plan des xy, et par conséquent est elle même une parabole située dans le plan sécant.

Si l'on compare les équations (3) et (4), on obtiendra en appelant Y, les ordonnées de la 2e parabole :

$$Y^2 = y^2 + r^2,$$

résultat très facile à construire, et qui montre la liaison qui existe entre les paraboles résultantes d'une même section faite dans le cône et l'hyperboloïde.

En faisant $b=0$ dans l'équation du plan sécant, c'est-à-dire en supposant qu'il passe par le centre du cône, on verra que ce plan rencontre le cône suivant l'arête située sur le plan xz, et coupe l'hyperboloïde suivant deux droites dont les équations sont : $\left[\begin{smallmatrix} y=r \\ z=mx \end{smallmatrix}\right.$ et $\left[\begin{smallmatrix} y=-r \\ z=mx \end{smallmatrix}\right.$. On conclura de là que tout plan tangent au cône, coupe l'hyperboloïde de révolution suivant deux génératrices parallèles à l'arête suivant laquelle le cône est touché par le plan.

4ème Cas. (A $>$ m) : Considérons d'abord le cas particulier où le plan sécant passe par le centre du cône. Son équation étant alors $z = Ax$, on obtient pour la projection de son intersection avec le cône, sur le plan des xy :

$$A^2 x^2 = m^2 x^2 + m^2 y^2$$

d'où l'on déduit : $\left\{\begin{array}{l} \sqrt{A^2 - m^2)}x + my = 0 \\ \sqrt{A^2 - m^2)}x - my = 0 \end{array}\right\}$ . . . . (5).

Ces deux équations appartiennent aux génératrices suivant lesquelles le cône est coupé par le plan.

Ce-même plan coupe l'hyperboloïde suivant une courbe qui projetée sur le plan des xy, a pour équation :

$$(A^2 - m^2)\, x^2 - m^2 y^2 = m^2 r^2 \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Cette projection est évidemment une hyperbole rapportée à ses axes et à son centre, et ses asymptotes sont précisément les projections des arêtes suivant lesquelles le cône a été coupé par le plan sécant.

Le demi axe réel de cette hyperbole est égal à r, et son demi-axe imaginaire à $\frac{mr}{\sqrt{A^2 - m^2}}$. Nous donnerons ici la construction de cette dernière quantité, comme devant servir à la résolution de plusieurs problèmes que nous nous proposerons par la suite. Cette construction est analogue à celle que nous avons indiquée page 262.

Tab. III. Fig. 6. Après avoir mené par l'origine A (Fig. 6.) une parallèle AC au plan sécant, on élève à l'extrémité S du rayon $AS = r$, la perpendiculaire GH : on prend $CH = CB$, et sur HD comme diamètre on décrit le demi-cercle HED. Par le point C on élève CE perpendiculaire à HD, et l'on achève la construction comme à la page 262. La ligne SG qu'on obtient ainsi est la grandeur cherchée. En effet on a : $SC = Ar$ et $SB = SD = mr$; donc $CD = Ar + mr$ et $CH = CB = Ar - mr$: de là on déduit $CE = SF = \sqrt{A^2 r^2 - m^2 r^2}$: de plus les triangles semblables ASG, FSD, donnent la proportion :

$$SF : SA :: SD : SG$$

ou bien $\sqrt{A^2 r^2 - m^2 r^2} : r :: m r : SG$

donc $SG = \frac{m r^2}{\sqrt{A^2 r^2 - m^2 r^2}} = \frac{m r}{\sqrt{A^2 - m^2}}$.

Passons maintenant au cas général où le plan sécant a pour équation : $z = A(x + b)$. En combinant cette équation avec celle du cône, on trouvera pour la courbe d'intersection projetée sur le plan des xy ;

$$(A^2 - m^2)x^2 - m^2 y^2 + 2A^2 b x + A^2 b^2 = 0 \quad . \; . \; . \; (7).$$

La discussion de cette équation fera voir qu'elle appartient à une hyperbole dont l'un des foyers est l'origine même des coordonnées.

Les abscisses des sommets de cette courbe se déduiront de l'équation :

$$A^2 (x + b)^2 - m^2 x^2 = 0 \quad \text{qui donne} \quad \begin{cases} x = -\frac{Ab}{A - m} \\ x = -\frac{Ab}{A + m} \end{cases}$$

et l'abscisse du centre sera par conséquent égale à

$$-\left(\frac{Ab}{A + m} + \frac{1}{2}\left(\frac{Ab}{A - m} - \frac{Ab}{A + m}\right)\right) = -\frac{A^2 b}{A^2 - m^2}.$$

On obtiendra pour les asymptotes de cette courbe :

$$y = \pm \frac{\sqrt{A^2 - m^2}}{m}\left(x + \frac{A^2 b}{A^2 - m^2}\right).$$

On en conclura par conséquent (voyez les équations (5) de la page 264.), que ces asymptotes sont parallèles aux arêtes suivant lesquelles le cône est coupé par un plan mené par son sommet parallèlement au plan sécant.

Enfin si l'on appelle a, a' le demi-grand axe et le demi-petit axe de cette hyperbole, on trouvera :

$$a = \frac{m A b}{A^2 - m^2}; \quad a' = \frac{A b}{\sqrt{A^2 - m^2}}.$$

Le même plan sécant coupera l'hyperboloïde de révolution suivant une courbe qui projetée sur le plan des xy, aura pour équation :

$$(A^2 - m^2)x^2 - m^2y^2 + 2A^2bx + A^2b^2 + m^2r^2 = 0,$$

qui ne diffère de l'équation (7) que par le terme constant m^2r^2.

Cette équation appartient à une hyperbole dont l'axe réel se confond avec l'axe des x.

Les coordonnées des sommets réels de cette courbe seront données par l'équation :

$$(A^2 - m^2)x^2 + 2A^2bx + A^2b^2 + m^2r^2 = 0$$

d'où l'on tire $x = -\frac{A^2 b}{A^2 - m^2} \pm \frac{m\sqrt{A^2(b^2 - r^2) + m^2r^2}}{A^2 - m^2}$.

Ce résultat fait voir que le centre de la nouvelle hyperbole est le même que celui de l'hyperbole du cône, et que son demi-axe réel a pour expression $\frac{m\sqrt{A^2(b^2 - r^2) + m^2r^2}}{A^2 - m^2}$.

En nommant donc β ce demi-axe, on aura :

$$\beta = \frac{m\sqrt{A^2(b^2 - r^2) + m^2r^2}}{A^2 - m^2} = \sqrt{\frac{m^2A^2b^2}{(A^2 - m^2)^2} - \frac{m^2r^2}{A^2 - m^2}}.$$

Ou bien $\beta = \sqrt{a^2 - \frac{m^2r^2}{A^2 - m^2}}$.

En appelant β' le demi-axe imaginaire, on trouvera :

$$\beta' = \sqrt{a'^2 - r^2}.$$

Les asymptotes de la courbe nouvelle ayant pour équation :

$$y = \pm \frac{\sqrt{A^2 - m^2}}{m}\left(x + \frac{A^2 b}{A^2 - m^2}\right),$$

se confondent par conséquent avec celles de l'hyperbole du cône.

Tab. III. Fig. 7. Soit EF (Fig. 7.) la trace du plan sécant ; soient LM et KI les projections des arêtes suivant lesquelles un plan mené par le point A parallèlement au plan sécant, coupe le cône projeté en DAB. Si le point C est le centre de la courbe d'intersection de l'hyperboloïde et du plan, projetée sur le plan des xy, les droites SR et PQ menées par ce point parallèlement à LM et KI, seront

d'après ce qui précède, les projections des asymptotes de la courbe, et leurs équations seront :

$$\left.\begin{aligned} y &= -\frac{\sqrt{A^2 - m^2}}{m}\left(x + \frac{A^2 b}{A^2 - m^2}\right) \\ y &= +\frac{\sqrt{A^2 - m^2}}{m}\left(x + \frac{A^2 b}{A^2 - m^2}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (8).$$

Cela posé, menons par le centre A, les lignes AH, Ah perpendiculaires aux droites KI et LM : ces perpendiculaires auront pour équations :

$$y = +\frac{m}{\sqrt{A^2 - m^2}}\,x.$$
$$y = -\frac{m}{\sqrt{A^2 - m^2}}\,x.$$

Combinant ces dernières équations avec les équations (8), on trouvera pour les abscisses des points d'intersection H et h, une valeur commune $x = b$, et l'on en conclura que ces points d'intersection sont situés sur la trace horisontale du plan secant : Mais la perpendiculaire AH est évidemment la trace horisontale du plan tangent au cône qui renferme à la fois les génératrices paralleles du cône et de l'hyperboloide projetees en AI et en GO; de plus AI est la projection de l'intersection de ce plan tangent par le plan mené par le point A, parallelement au plan sécant; donc HR est aussi la projection de l'intersection de ce même plan tangent par le plan qui coupe l'hyperboloide.

De là on deduit comme conséquence immédiate le principe suivant, dont on fait usage dans la géométrie descriptive; lorsqu'un plan coupe un hyperboloide de révolution suivant une courbe à deux branches, on doit pour obtenir les asymptotes de cette courbe, mener par le sommet du cône droit dont toutes les génératrices sont parallèles à celles de l'hyperboloide, un plan parallele au plan sécant; on determine ensuite les arêtes suivant lesquelles le cône est coupé par ce plan parallèle, et par chacune de ces arêtes on mène un plan tangent au cône; les intersections de ces plans tangents et du plan secant sont les asymptotes demandees.

APPLICATIONS DES FORMULES

QUI PRÉCÉDENT À PLUSIEURS PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE PLANE.

Quelle que soit une courbe du second dégré, on peut toujours la considérer comme la projection horisontale de la section faite par un plan dans un cône droit vertical dont le sommet est l'un des foyers de la courbe proposée. Ce principe qui n'est qu'une conséquence de ce qui précède, fournit un moyen de description qui s'applique à toutes les courbes du second ordre.

Tab. III. Fig. 8. 1°. Soit $S'S$ (Fig. 8.) le grand axe d'une ellipse : F' et F étant ses deux foyers, si l'on fait $S'F' = C$, $SF = C'$ on aura d'après les résultats obtenus page 260,

$$C = \frac{A\,b}{m + A}; \quad C' = \frac{A\,b}{m - A}$$

d'où : $m + A = \frac{A\,b}{C}$: $m - A = \frac{A\,b}{C'}$;

$$\text{et} \quad b = \frac{2\,C\,C'}{C' - C} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Substituant à la place de B cette valeur dans $m - A$, il vient :

$$m - A = \frac{2\,A\,C}{C' - C}:$$

mais l'une des quantités A, b ou m étant indéterminée, nous ferons $A = 1$; nous obtiendrons de cette manière :

$$m = \frac{C + C'}{C' - C} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Si donc on élève au point F, la perpendiculaire

$$F\,A = F\,A' = S'\,S = C + C',$$

et si l'on joint les points A et A' avec le point F', on pourra considérer les lignes $F'B$, $F'B'$ comme les projections des arètes extrêmes du cône vertical qui, coupé par le plan $C\,B$, donne une courbe qui se projette suivant l'ellipse dont il s'agit.

Pour décrire la courbe par points, menons une ligne quelconque GH perpendiculaire à l'axe $F'G$. Par le point E où cette

ligne rencontre CB, abaissons EN parallèle à GF′, et décrivons du point F′ comme centre, un cercle dont le rayon soit égal à GH. Ce cercle coupera la perpendiculaire EN en deux points M et N qui appartiendront à la courbe. Cette construction répétée pour une suite de perpendiculaires à l'axe du cône, fournira autant de points de la courbe qu'on voudra en obtenir.

2°. Pour trouver les valeurs de b et de m qui conviennent à l'hyperbole, il suffira de faire C′ négatif dans les expressions (1) et (2); il viendra ainsi :

$$b = \frac{2CC'}{C + C'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3);$$

$$m = \frac{C' - C}{C + C'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Si donc S et S′ (Fig. 9.) représentent les sommets d'une hyperbole dont F et F sont les foyers, on élevera au point F′ la perpendiculaire F′A; on prendra F A′ = F′A, et l'on menera par le 2ème foyer F, les deux droites A′D et AD′ qu'on devra considérer comme les projections des arètes extrêmes du cône qui est coupé par le plan CB suivant une courbe à deux branches dont la projection est l'hyperbole proposée. Tab. IV. Fig. 9.

Pour obtenir une suite de points de cette hyperbole, on menera une perpendiculaire quelconque GH à l'axe du cône. Du point E où cette perpendiculaire rencontrera CB, on abaissera EM, perpendiculaire sur l'axe de la courbe, et du point F comme centre avec un rayon égal à GH, on décrira un cercle qui coupera EM en deux points M et N qui appartiendront à l'hyperbole.

3°. L'équation obtenue pour la parabole page 262, étant indépendante de m et donnant $b = \frac{1}{2}p$ (p représentant le paramètre de la courbe) fait voir que si F et S (Fig. 10) sont le foyer et le sommet d'une parabole quelconque, cette parabole peut être considérée comme la projection de l'intersection d'un cône verti- Fig. 10.

cal arbitraire projeté en AFB, par un plan dont la trace est parallele à FB et qui passe par un point D de l'axe, tel que SD = SF.

La construction employée déjà précédemment pour l'ellipse et l'hyperbole, fournit autant de points de la courbe qu'on veut.

Les mêmes considérations donnent aussi un moyen général de mener une tangente à une courbe quelconque du 2e dégré. Supposons d'abord le point situé sur la courbe et proposons nous de mener, par exemple, une tangente à la parabole précédente par le point N. En joignant ce point et le foyer, la ligne FN sera évidemment la projection de l'arète du cône qui passe par le point E de la section du plan coupant; IF perpendiculaire à FN sera donc la trace du plan qui touchera le cône suivant cette arête, et le point I, intersection de IF avec la trace DK du plan coupant, appartiendra à la tangente cherchée. Ainsi pour obtenir cette tangente; il suffira de joindre le point I et le point N.

Cette construction n'est point particulière à la parabole: elle s'applique également à toutes les courbes du second ordre. Les
Tab. IV. deux figures 11. et 12. montrent son application à l'ellipse et à
Fig. 11. et 12. l'hyperbole.

Fig. 13. Supposons actuellement (Fig. 13.) le point N extérieur à la courbe. On pourra le considérer comme la projection d'un point de l'horisontale comprise dans le plan sécant, et abaissée de la quantité PQ au dessous du plan de projection. Menons par cette horisontale, un plan perpendiculaire à l'axe du cône. Ce plan coupera le cône suivant un cercle de rayon GH. Si du point F comme centre on décrit un cercle avec ce rayon, et si par le point donné N, on méne une tangente à ce cercle, cette tangente NO sera parallele à la trace horisontale du plan tangent au cône qui passe par le point N. FI parallèle à NO, sera donc la trace

de ce plan tangent sur le plan de projection, et la ligne NI sera par conséquent la tangente cherchée; le point de contact s'obtiendra immédiatement en élevant du foyer F la perpendiculaire FT sur la ligne FI.

Il est évident que le problème proposé aura deux solutions, puisqu'on pourra mener du point A deux tangentes au cercle de rayon GH.

Les deux figures 14. et 15. font connaître l'application de la même construction à l'hyperbole et à la parabole. Tab. IV. Fig. 14. et 15.

Si le point donné N (Fig. 16.) était situé sur la trace DK du plan sécant, la construction précédente ne pourrait plus être employée. Tab. V. Fig. 16.

Mais alors on remarquerait que la ligne NF est la trace du plan tangent au cône, qui passe par le point donné, et que par conséquent FA perpendiculaire à NF est la projection de l'arête suivant laquelle le cône est touché. On déterminerait ensuite la projection verticale FK de cette arête, et du point H où cette projection verticale rencontre le plan sécant DC, on abaisserait la perpendiculaire HT qui par son intersection avec FA, donnerait le point de tangence cherché: Joignant T et N, on obtiendrait la tangente demandée.

En représentant par $Ax^2 + By^2 = 1$ l'équation des courbes du second dégré qui ont un centre, on verra que les quantités C et C′ qui entrent dans la valeur de b sont égales, la 1ère à $\frac{1}{\sqrt{A}} - \sqrt{\frac{1}{A} - \frac{1}{B}}$, la seconde à $\frac{1}{\sqrt{A}} + \sqrt{\frac{1}{A} - \frac{1}{B}}$, et que parconséquent $b = \frac{\frac{1}{B}}{\sqrt{\frac{1}{A} - \frac{1}{B}}}$. Si l'on joint à cette expression la distance $\sqrt{\frac{1}{A} - \frac{1}{B}}$ du foyer au centre de la courbe, il viendra, en appelant X l'abscisse du point D par rapport au centre :

$$X = \frac{1}{A\sqrt{\frac{1}{A} - \frac{1}{B}}}.$$

Le demi grand axe $\frac{1}{\sqrt{A}}$ est donc moyenne proportionnelle entre cette abscisse et la distance du centre au foyer. De là on doit conclure que la trace DK n'est autre chose que le lieu de toutes les intersections des tangentes menées à la courbe par les points où cette courbe est rencontrée par des droites assujetties à passer par son foyer F. (Voyez la note jointe à ce mémoire page 278.)

Nous terminerons ces applications qu'on pourrait étendre beaucoup plus loin par la résolution du problème suivant :

Etant donnée une droite quelconque située dans le plan d'une courbe du second dégré, déterminer les intersections de cette droite et de la courbe, sans avoir besoin de construire cette courbe.

1°. Supposons d'abord qu'il s'agisse de déterminer les points d'intersection d'une hyperbole dont les axes principaux sont connus, et d'une droite quelconque XX.

Tab. V. Fig. 17. Par le centre A de la courbe, on menera les asymptotes, et des points B et C où la droite XX coupera ces asymptotes, on abaissera les perpendiculaires BG et CH. On prendra sur BG prolongée, une longueur GI ègale à la ligne SG dont nous avons indiqué la construction page 264. Du point E milieu de GH, on portera de côté et d'autre, des longueurs EL et EK égales à EI, et par les points L et K, on élevera des perpendiculaires qui couperont la ligne donnée XX en ses points d'intersection avec la courbe.

Fig. 18. La ligne GI restant constante pour une même inclinaison de droite, on déterminera aisément les intersections de la courbe par une série de parallèles à la droite donnée BC, et l'on obtiendra ainsi autant de points de l'hyperbole qu'on voudra.

Fig. 19. Si la ligne XX était située dans l'angle des asymptotes, on abaisserait des points B et C les lignes BG, CH perpendiculaires

sur l'axe, et par le milieu E de GH, on menerait une troisième perpendiculaire sur laquelle on prendrait une longueur EI égale à la ligne SG dont la construction est indiquée page 264. Du point I comme centre avec un rayon égal à EH, on décrirait un cercle qui couperait l'axe en deux points L et K, et par ces deux points élevant les perpendiculaires LM et KN, on aurait en M et N les intersections de la droite donnée et de l'hyperbole.

Les constructions précédentes supposent que la droite donnée XX rencontre à la fois les deux asymptotes de la courbe; si cette droite était parallèle à l'une de ces asymptotes, on observerait, en vertu des Equations obtenues pages 262 et 263 pour le cas ou $A = m$, que si AG est égale à b, on a : $AL = \frac{b^2 + r^2}{2b}$, en appelant r le demi-grand axe AS′. Tab. V. Fig. 20.

On prendrait donc sur la ligne AD perpendiculaire à l'axe, une longueur $AC = AS$; on menerait GC qu'on porterait de A en D; on prendrait $AE = 2AG$; on joindrait D et E, et l'on menerait DL perpendiculaire à DE; élevant enfin par le point L une perpendiculaire à l'axe, cette perpendiculaire couperait la ligne donnée en un point M qui serait le point d'intersection cherché de l'hyperbole et de la droite XX. Fig. 21.

On aurait en effet de cette manière :

$$AL = \frac{\overline{AD}^2}{AE} = \frac{\overline{CG}^2}{2AG} = \frac{b^2 + r^2}{2b}.$$

2°. Proposons nous actuellement de résoudre le problème proposé pour l'ellipse et la parabole.

SS′ Etant le grand axe d'une ellipse, A et F ses deux foyers, on demande de trouver les intersections de cette courbe par une droite XX. Tab. VI. Fig. 22.

Déterminons comme nous l'avons fait jusques ici, les arêtes extrêmes du cône qui coupé par le plan BC, donne pour projection de sa section, l'Ellipse proposée.

Il est évident que la droite XX pourra être considérée comme la projection horisontale d'une ligne qui serait située dans le plan sécant CB, et dont BC serait par conséquent la projection verticale. Or le plan vertical élevé suivant XX coupera le cône CAC′ suivant une hyperbole qui projetée sur le plan vertical de projection rencontrera BC en deux points R et R′, et ces deux points ramenés par des perpendiculaires sur la droite XX, donneront les intersections cherchées de cette droite et de l'ellipse; le problème est donc ramené à déterminer la position de ces points R et R′ sur la droite BC.

La ligne donnée XX ayant pour équation $y = ax + b$, le plan vertical mené par cette ligne coupe le cône suivant une hyperbole qui projeté sur le plan des XZ a pour équation :

$$Z^2 - m^2 (1 + a^2) x^2 - 2 m^2 a b x - m^2 b^2 = 0.$$

Le demi axe réel de cette hyperbole est conséquemment égal à mb, et si l'on abaisse AE perpendiculaire sur XX, et EG perpendiculaire sur SS′, les asymptotes auront pour équations :

$$Z = m \sqrt{1 + a^2} \; (x - \text{A G})$$
$$Z = - m \sqrt{1 + a^2} \; (x - \text{A G}).$$

Pour les construire, on observera qu'elles sont parallèles aux arêtes du cône déterminées par la section du plan vertical élevé sur AD parallèle à XX.

Connaissant ces asymptotes, on construira mb, en abaissant du point H pour lequel $AH = b$, une perpendiculaire sur AC. Cette perpendiculaire coupera l'axe SS′ en un point K tel que $AK = mb$.

Cela posé, il ne restera plus pour achever la solution du problème qu'à déterminer comme on l'a fait page 273, les points d'intersection de la droite BC et d'une hyperbole dont GL et GI sont les asymptotes, et dont le demi axe réel est égal à AK.

La même solution s'appliquerait à la parabole.

En présentant ici la construction précédente pour l'Ellipse et la parabole, j'ai prétendu seulement faire connaître une méthode générale de résoudre le problème proposé. Du reste cette méthode est beaucoup trop compliquée pour qu'on puisse l'employer avec succès dans la pratique; on peut lui substituer avec avantage les solutions suivantes, qui sont infiniment plus simples.

1°. Si l'on a deux sécantes CD et CE qui coupent une ellipse et son grand cercle en des points L, D, M, E, situés sur des lignes MN, EK, perpendiculaires à l'axe AB (p. 284), et si l'on mène à l'ellipse parallèlement à CD une tangente GF, qui coupe l'axe AB en un point F, je dis que la ligne FH menée par ce point tangentiellement au cercle, sera parallèle à la sécante CE. Tab. VI. Fig. 23.

En effet les points de contact H et G se trouvant sur une même perpendiculaire à l'axe AB (p. 284), les deux triangles DKC et GIF sont semblables et donnent la proportion :

DK : GI :: KC : IF,

mais on a aussi DK : GI :: EK : HI;

donc EK : HI :: KC : IF;

donc à cause de l'égalité des angles EKC, HIF, les deux triangles EKC, HIF sont semblables, et les lignes FH et CE sont parallèles.

De ce théorème on déduit la construction suivante pour déterminer les points d'intersection d'une droite XX et d'une ellipse dont le grand axe AB et les foyers F et F′ sont connus. Fig. 24.

On décrit d'abord le cercle AIBK sur le grand axe AB. On abaisse du point F la perpendiculaire FC sur la droit XX, et du point F′ comme centre avec un rayon égal au grand axe, on décrit un arc de cercle qui coupe cette perpendiculaire en un point C. Sur le milieu D de FC, on élève la perpendiculaire DE. Cette perpendiculaire est évidemment la tangente à l'ellipse, parallèle à la ligne donné XX. Du point E, on mène au cercle la tangente

EG, et par le point H où le grand axe est coupé par la droite donnée, on mène IK parallèle à EG ; enfin des points I et K où cette parallèle rencontre le cercle, on abaisse les ordonnées IL et KO qui par leurs intersections avec XX, donnent les points d'intersection cherchés de cette droite avec la courbe.

Tab. VI. Fig. 25. 2°. L'équation de la parabole étant $y^2 = px$, ses intersections par la droite XX dont l'équation est $y = -a(x-b)$, seront données par l'équation :

$$a^2x^2 - (2a^2b + p)x + a^2b^2 = 0$$

d'où l'on tire $x = b + \frac{p}{2a^2} \pm \frac{1}{a}\sqrt{bp + \frac{p^2}{4a^2}}$,

et . . . $ax = ab + \frac{p}{2a} \pm \sqrt{p\left(b + \frac{p}{4a^2}\right)}$.

Pour construire ces deux valeurs, on abaissera du foyer F sur la droite donnée XX, une perpendiculaire qui rencontrera l'axe des y, SB en un point D. On mènera DE parallèle à l'axe. Du point E, on élevera une perpendiculaire indéfinie sur l'axe, et l'on déterminera les points où cette perpendiculaire rencontre la courbe. Pour cela il suffira de prendre $SF' = SF$ et de décrire du foyer comme centre avec un rayon égal à $F'G$, un arc de cercle ; cet arc coupera la perpendiculaire qui passe par le point E, en deux points H et I. Portant de H en L et de I en K une longueur égale au double de SD et menant par les points L et K des parallèles à l'axe, on obtiendra par leurs intersections avec la droite XX, les points où cette droite coupe la parabole.

On a en effet d'après la position de la droite XX,

$\left.\begin{array}{l} SB = ab \\ SC = b \end{array}\right\}$ de plus $SF = \frac{p}{4}$; donc $\left\{\begin{array}{l} SD = \frac{p}{4a} \\ CG = \frac{p}{4a^2} \\ SG = b + \frac{p}{4a^2} \\ \text{et } GH = GI = \sqrt{p\left(b + \frac{p}{4a^2}\right)}. \end{array}\right.$

Enfin IK étant égal à HL et à 2SD ou $\frac{p}{2a}$, on a par-conséquent :

$$\left.\begin{array}{l} BO = BS + GI + IK = ab + \frac{p}{2a} + \sqrt{p\left(b + \frac{p}{4a^2}\right)} \\ \text{et } BP = BS - (GH - HI) = ab + \frac{p}{2a} - \sqrt{p\left(b + \frac{p}{4a^2}\right)} \end{array}\right\} = ax.$$

Si la ligne XX au lieu de s'étendre au dessous de l'axe des abscisses, s'étendait au dessus, il suffirait de faire b négatif dans la formule précédente, et l'on aurait :

$$ax = \frac{p}{2a} - ab \pm \sqrt{p\left(\frac{p}{4a^2} - b\right)}.$$

Pour construire cette quantité, on abaisserait du foyer F une perpendiculaire sur la ligne XX. Par le point D où cette perpendiculaire rencontrerait l'axe des y, on menerait DH parallèle à l'axe de la parabole. Abaissant du point H l'ordonnée HK, on chercherait le point I où cette ordonnée rencontre la courbe. On prendrait ensuite SE = 2SD, et l'on porterait de côté et d'autre du point E en G et en L une longueur égale à l'ordonnée KI. Les lignes GN, LM menées parallèlement à l'axe, détermineraient sur la droite donnée XX, les points d'intersections de cette droite et de la courbe. Tab. VI. Fig. 26.

On a en effet :

$$\left.\begin{array}{l} SB = ab \\ SC = b \\ SF = \frac{p}{4} \end{array}\right\} \text{conséquemment} \left\{\begin{array}{l} SD = \frac{p}{4a} \\ DH = \frac{p}{4a^2} - b \\ KI = \sqrt{p\left(\frac{p}{4a^2} - b\right)}. \end{array}\right.$$

Et comme $SE = 2SD = \frac{p}{2a}$ et $EL = EG = KI$,

il vient :
$$\left.\begin{array}{l} BG = SE - SB + EG = \frac{p}{2a} - ab + \sqrt{p\left(\frac{p}{4a^2} - b\right)} \\ BL = SE - SB - EL = \frac{p}{2a} - ab - \sqrt{p\left(\frac{p}{4a^2} - b\right)} \end{array}\right\} = ax.$$

NOTES ADDITIONNELLES,

et résolution de plusieurs problèmes relatifs aux courbes du second ordre.

Note 1ere. La conclusion que nous avons déduite page 272 de ce Mémoire est fondée sur une propriété fort remarquable qui n'est qu'un corollaire du problème suivant.

Tab. VI. Fig. 27. On considère le système de toutes les droites qui coupent en un même point A, l'un des diamètres d'une section conique. Par les points B et D où chacune de ces droites rencontre la courbe, on mène des tangentes à cette courbe. On demande quel sera le lieu de tous les points E d'intersection de ces tangentes.

Nous supposerons le point A situé sur le grand axe de la courbe. Les résultats auxquels nous parviendrons n'en seront pas moins généraux, et s'appliqueront à tous les diamètres des sections coniques.

Soit : $Ax^2+By^2=1$, l'équation de la courbe, et $mx+ny=1$, celle d'une droite quelconque BD passant par le point A. Faisons $CA=X$, et appelons x', y'; x'', y'' les coordonnées des points B et D. Ces coordonnées seront d'abord liées entr'elles par les relations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} Ax'^2+By'^2=1 \\ Ax''^2+By''^2=1 \end{array}\right\} \quad - - - \quad (1).$$

On aura de plus pour les tangentes BE et DE, les deux équations :

$$\left.\begin{array}{l} Ax'x+By'y=1 \\ Ax''x+By''y=1 \end{array}\right\} \quad - - - \quad (2).$$

Les points B, A et D étant d'ailleurs situés sur une même droite BD, on a aussi :

$$\left.\begin{array}{l} mx'+ny'=1 \\ mx''+ny''=1 \\ mX= \ldots 1 \end{array}\right\} \quad - - - - \quad (3).$$

Au moyen de ces sept équations, on éliminera aisément les coordonnées des points de contact, et l'on parviendra à un résultat qui étant indépendant de x' y', x'', y'', m et n, appartiendra à la ligne, lieu de toutes les intersections E.

Mais la forme des équations (1). (2), (3), est telle que les cinq dernières suffisent pour éliminer toutes les quantités qui dépendent de la considération particulière de la ligné BE. En effet on déduit des équations (3) :

$$m\,(x''-\mathrm{X})+n\,y''=0\,,$$
$$m\,(x''-x')+n\,(y''-y')=0\,,$$
et $$\frac{m}{n}=-\frac{y''}{x''-\mathrm{X}}=-\frac{y''-y'}{x''-x'}:$$

or les équations (2) donnent :

$$\mathrm{A}x\,(x''-x')+\mathrm{B}y\,(y''-y')=0\ ;\ \text{donc}$$
$$\frac{y''-y'}{x''-x'}=-\frac{\mathrm{A}x}{\mathrm{B}y}$$

et par conséquent ; $\frac{\mathrm{A}x}{\mathrm{B}y}=-\frac{y''}{x''-\mathrm{X}}$.

De là on tire : $\mathrm{AX}x=\mathrm{A}xx''+\mathrm{B}yy''$, qui en vertu des équations (2) se réduit à $\mathrm{AX}x=1$ (4). Cette dernière équation nous apprend que le lieu de toutes les intersections E des tangentes que l'on considère, est une droite perpendiculaire au grand axe, et située à une distance $\frac{1}{\mathrm{AX}}$ du centre de la courbe.

Cette même équation (4) fait voir encore 1°. que le demi-grand axe est toujours moyenne proportionnelle entre l'abscisse CA du point donné et l' abscisse CH du pied de la perpendiculaire, lieu de toutes les intersections E: 2°. que cette dernière abscisse CH est celle du point où la tangente menée par l'extrémité de AI perpendiculaire à CG, rencontre la direction du grand axe. En effet X et Y étant les coordonnées du point I, on a pour l'équation de cette tangente :

$\mathrm{AX}x+\mathrm{BY}y=1$, qui se réduit à $\mathrm{AX}x=1$,

lorsqu'on y fait $y=0$.

Si l'on combine les équations $AXx = 1$ et $Ax'x + By'y = 1$, et qu'on élimine entre elles l'abscisse x, on aura en appelant y''' l'ordonnée du point E, $y''' = \frac{X - x'}{BXy'}$.

Les équations des droites BD et AE étant :

$$m\,x + n\,y = 1,$$
$$m'\,x + n'\,y = 1,$$

on aura évidemment entre les quantités x', y', X, m, m', n, n', les équations suivantes :

$$m\,x' + n\,y' = 1,$$
$$m\,X = 1,$$
$$m'X = 1,$$
$$\frac{m'}{AX} + \frac{n'(X - x')}{BXy'} = 1.$$

Eliminant entre ces quatre équations x', y', X, nous obtiendrons la relation qui doit exister généralement entre les quantités m, m', n et n'.

Les trois premières équations donnent :

$$X - x' = \frac{ny'}{m}$$
$$\text{et} \quad m = m'.$$

Substituant dans la dernière, elle se réduit à :

$$\frac{m^2}{A} + \frac{nn'}{B} = 1, \quad \text{ou} \quad Ann' + Bm^2 = AB.$$

Pour connaître le cas dans lequel les deux lignes AE et BD sont perpendiculaires, il faut poser :

$$m^2 + nn' = 0.$$

De là on déduit : $m^2 = -nn'$,
et par conséquent : $m^2(B - A) = AB$,

$$\text{d'où} \quad m = \sqrt{\frac{AB}{B - A}}.$$

$CA = \frac{1}{m}$ devient donc dans ce cas particulier égal à $\sqrt{\frac{B-A}{AB}}$; c'est-à-dire que le point A n'est autre que le foyer de la courbe.

Les mêmes résultats s'appliquent immédiatement à tous les diamètres conjugués des courbes du second degré, et donnent une solution fort simple du problème suivant :

Connaissant le contour d'une courbe et son centre, mener une tangente à cette courbe par un point extérieur.

On joint le point donné M et le centre C de la courbe donnée, on détermine ensuite le diamètre conjugué de GH, en menant une droite quelconque *mn* parallèle à ce diamètre et en joignant le milieu de cette droite avec le centre. On élève au point C une perpendiculaire à GH, et l'on prend CB = CD : après avoir uni les points M et B, on mène BA perpendiculaire à MB, et l'on obtient ainsi une partie AC telle que le demi-diamètre CD est moyenne proportionnelle entre cette partie AC et l'abscisse CM du point donné. On porte donc CA de C en E, et l'on mène par le point E une parallèle à CD qui par ses intersections avec la courbe donne les points de contact cherchés. Tab. VII. Fig. 28.

S'il s'agissait de résoudre le même problême en prenant le point M sur la courbe donnée, il est évident qu'il suffirait de mener le diamètre CM, et de joindre le centre C avec le point O, milieu d'une droite quelconque *mn* parallèle à CM : MX parallèle à CO serait la tangente demandée. Fig. 29.

Les considérations précédentes fournissent encore le moyen de résoudre une classe de problèmes fort intéressants dont nous présenterons quelques exemples.

1°. Etant donnés le centre C d'une section conique, une tangente AT et son point de contact T, et la direction d'une seconde tangente AX, construire la courbe. Fig. 30.

Solution : Je joins le point A et le centre C, et je mène par le point T une ligne T*t* telle qu'on ait TB = B*t*. Pour satisfaire à cette condition on trace par le point A une ligne quel-

conque pn; on mène par le point T une parallèle à AC: on prend $An = Ap$ et l'on mène nt parallele à la même ligne AC: l'intersection de cette dernière parallèle avec la direction indéfinie AX, donne t pour le point de contact de la droite AX avec la courbe. Menant par le centre C une parallèle à Tt on a dans AC et CE les directions de deux diamètres conjugués de la courbe cherchée. Il ne reste plus qu'à trouver les grandeurs de ces diamètres ; or pour cela il suffit, d'après ce qui précède, de prendre deux moyennes proportionnelles, la première entre AC et CB, et la seconde entre CE et CD.

Tab. VII. Fig. 31. 2°. Etant donnés le centre C d'une section conique, un point M de cette section, et une tangente AT avec son point de contact T, construire la courbe.

Solution : Menant Mm par le centre donné C, et prenant Cm = CM, on obtient un diamètre de la courbe cherchée. On joint le point T avec les points M et m; par le milieu O de MT on mène On parallèle à mT, et d'après une propriété que nous démontrerons (page 285), Mn devient la tangente menée à la courbe par l'extrémité du diamètre Mm; CE parallèle à Mn est donc la direction du diamètre conjugué à Mm : pour avoir sa grandeur, il faut mener TD parallèle à Mm, et prendre une moyenne proportionnelle entre CE et CD.

Fig. 32. 3°. Etant donnés le centre C d'une section conique et les directions de trois de ses tangentes, construire la courbe.

Solution : Je joins les points A et C, et je détermine la ligne EF de manière à ce qu'on ait CE = CF. Pour cela je mène par le sommet de l'angle A une droite quelconque mn, et je prends Am = An. Par les points m et n, je mène des parallèles à AC, qui coupent les côtés de l'angle aux points p et q: EF parallèle à pq remplit la condition imposée. Je trace par le même

moyen les deux droites GH et IK, telles que CG = CH et CI = CK. Par les extrémités I et K, je mène IL et KL réciproquement parallèles à EF et GH ; je joins les points L et D. Par le point d'intersection M, je mène MN et MP parallèles à EF et à GH, et les trois points M, N, P, obtenus de cette manière sont les points de contact cherchés des trois tangentes. Cela posé, on détermine un système de diamètres conjugués comme dans la solution du problème premier.

4°. Etant donnés deux tangentes AB, BD avec leurs points de contact M, N, et un point O de la courbe, construire cette courbe. Tab. VII. Fig. 33.

Solution : Je joins les points O, M et N. Par un point quelconque *m* de la ligne BC qui partage MN en deux parties égales, je mène *mn* et *mp* parallèles a OM et ON; je joins *n* et *p* et la ligne AD menée par le point O parallèlement à *np*, est une troisième tangente à la courbe au point O. Le centre C de la courbe sera donné par l'intersection des deux lignes BC et AC qui divisent chacun des côtés MN et MO en deux parties égales.

Cette construction fort simple est fondée sur ce que dans la figure relative au probleme précédent, FH est évidemment parallèle à AB.

5°. Etant donnés un diamètre AB d'une section conique, et les directions AX et EF de la tangente à son extrémité et d'une autre tangente quelconque à la courbe, construire cette courbe. Fig. 34.

Solution : Le point C, milieu de AB étant nécessairement le centre de la courbe, j'élève à ce point une perpendiculaire CD = AC; je joins les points E et D : DG perpendiculaire à ED, donne CG pour l'abscisse du point de contact de la ligne EF avec la courbe; en effet la construction indiquée donne $\overline{AC}^2 = EC \times CG$: en prenant donc CH = CG et en menant HM parallèle à AX,

on obtient le point de contact M. Menant MI parallèle à AB et CK parallèle à AX, la moyenne proportionnelle entre CK et CI donnera la grandeur du diamètre conjugué de AB.

Tab. VII. Fig. 35. Si au lieu de la tangente EF, on donnait un point quelconque M, on prendrait $CG = CH$ et l'on joindrait le point G avec l'extrémité de CD perpendiculaire à AB et égale à AC : DE perpendiculaire à GD donnerait le point E qui joint avec le point donné M, ferait connaître la tangente au point M.

Fig. 36. 6°. Etant donnés un diamètre quelconque AB d'une section conique, et une tangente EX avec son point de contact M, construire la courbe.

Solution : Connaissant AC moitié de AB, et l'abscisse EC du point E, on détermine la grandeur CG de l'abscisse du point M. Portant CG de C en H, et joignant M et H, on a la direction du diamètre conjugué de AB ; sa grandeur s'obtient aisément au moyen des constructions précédentes.

Ces exemples suffisent pour faire voir combien sont variées les applications des principes dont il s'agit.

Note 2. La proposition démontrée page 275 n'est qu'un corollaire du théorème suivant.

Deux sécantes menées dans une ellipse et dans son cercle extérieur, par des points dont les abscisses sont égales, concourent en un même point du grand axe.

Fig. 37. En effet soit MN une sécante quelconque de l'ellipse ; *mn* sera sa correspondante dans le cercle extérieur ; or on a

$$\frac{MP}{mP} = \frac{NQ}{nQ} \text{ ou } \frac{MP}{NQ} = \frac{PO}{QO},$$

O étant le point d'intersection de la sécante MN avec le grand axe ; donc ce point O appartient à la fois aux deux droites MN et *mn*.

Il suit évidemment de ce même théorème que si d'un point O situé sur le grand axe, on mène une tangente OT′ au cercle extérieur à l'ellipse, et si l'on abaisse l'ordonnée T′Q, cette ordonnée coupera l'ellipse en un point T tel que la ligne OT sera tangente à la courbe. Tab. VIII. Fig. 38.

Note 3. Si par l'extrémité A′ d'un diamètre de l'ellipse, on mène la tangente A′D′; une ligne quelconque B′E′ coupera la courbe en un point M′ tel que la tangente en ce point divisera en deux parties égales la ligne A′E′. Fig. 39.

Je vais démontrer cette propriété pour les axes principaux de l'ellipse. Un calcul analogue au suivant ferait voir qu'elle est aussi générale que le suppose l'énoncé du théorème.

L'équation de l'ellipse rapportée à l'extrémité de son grand axe est $a^2y^2 + b^2x^2 - 2ab^2x = 0$. x' et y' étant les coordonnées d'un point quelconque M, on a pour l'équation de la tangente MG qui passe par ce point: $y - y' = \frac{b^2(a-x')}{a^2y'}(x - x')$. Faisant dans cette équation $x = 0$, on obtient : Fig 40.

$$AF = y' - \frac{b^2(a-x')x'}{a^2y'} = y'\left(1 - \frac{b^2(a-x')x'}{a^2y'^2}\right)$$

or $$a^2y'^2 = 2ab^2x' - b^2x'^2 : \text{ donc}$$

$$AF = y'\left(1 - \frac{b^2(a-x')x'}{2ab^2x' - b^2x'^2}\right) = \frac{ay'}{2a - x'}.$$

La ligne BE passant par les deux points M et B, a pour équation :

$$y - y' = \frac{y'}{x' - 2a}(x - x')$$

faisant $x = 0$, on a :

$$AE = y'\left(1 - \frac{x'}{x' - 2a}\right) = \frac{2ay'}{2a - x'} = 2AF; \text{ C. Q. F. D.}$$

OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES

FAITES À L'OBSERVATOIRE DE L'UNIVERSITÉ *IMPÉRIALE* DE WILNA EN 1817 ET 1818 NOUVEAU STYLE.

PAR

J. SNIADECKI.

Présenté à la Conférence le 12 Août 1818.

Uranus en 1817.

Jours du mois.	Tems moyen du passage.	Ascension droite apparente.	Déclinaison australe apparente.	Longitude géocentrique apparente.	Latitude géocentr. apparente.	Longitude de la terre lors du passage.
				8s.		8s.
Mai 24	12h42′ 50″9	252°53′ 24″8	22°32′ 3″0	14°13 55,5	0°0′ 9″1	3°20′ 19″8
— 25	- 38 44, 5	. 50 53, 7	. 31 58, 8	14 11 36,4	. 19, 7	4 17 41, 0
— 26	- 34 38, 0	. 48 14, 8	. 31 39	14 9 8.5	. . 17, 3	5 15 2, 9
— 27	- 30 32, 1	. 45 41, 5	. 31 23	14 6 46.0	. . 18, 2	6 12 24, 0
— 28	- 26 26, 5	. 43 3, 5	. 31 14, 2	14 4 19,6	. . 26, 9	7 9 43, 8
— 31	- 14 6, 1	. 35 14, 0	. 30 8, 5	13 57 1,4	. . 13, 0	10 1 36, 8
Juin 1	- 10 0	. 32 30, 3	. 39 58,	13 54 30	. . 20, 8	10 58 52, 8
— 3	- 1 48, 7	. 27 15, 8	. 29 26, 8	13 49 40,3	. . 24, 4	12 53 20, 4

On a employé l'obliquité de l'écliptique 23° 27′ 53″. Les étoiles de comparaison fûrent: δ du *Scorpion* et 190 *Ophiuchi*.

Lieux héliocentriques d'*Uranus*.

Jours du mois.	Longitudes observées.	Longitude hél. tables de *Delambre*.	Latitudes australes.		Différences.	
			observées.	Tables de *Delambre*.	en longitude.	en latitude.
	8s.	8s.				
Mai 24	13°39′ 25″7	13°38′ 57″8	0°0′ 8″6	0°0′ 34″6	+ 27″9	— 26″0
— 25	. 40 13, 4	. 39 40, 3	. . 18, 6	. . 35, 3	+ 33, 1	— 16, 7
— 26	. 40 53, 2	. 40 22, 8	. . 16, 0	. . 36, 0	+ 30.4	— 20, 0
— 27	. 41 38, 8	. 41 5, 3	. . 17, 2	. . 36, 7	+ 33, 5	— 19, 5
— 28	. 42 21, 1	. 41 47, 5	. . 25, 5	. . 37, 3	+ 33, 6	— 11, 8
— 31	. 44 31, 1	. 43 55 [illegible]	. . 1[illegible], 3	. . 39, 1	+ 36, 1	— 26, 8
Juin 1	. 45 9, 9	. 44 37, 6	. . 19, 7	. . 39, 6	+ 32, 3	— 19, 9
— 3	. 46 40, 3	. 46 2, 6	. . 23, 1	. . 40, 7	+ 37, 7	— 17 6
				moyen	+ 33, 1	— 19, 8

L'opposition ♅☉ tirée des tables de *Delambre*, après les avoir corrigées des erreurs, eût lieu à Wilna 1817 le 4 Juin n. st.

à $10^h\ 34'\ 43'',7$ t. m. astron.

lors de l'☍	longit. ♅	$8^s\ 13^\circ\ 47'\ 15'',3$
	celle de la terre	8 13 47 15, 3
	latit. hél. ♅	= 0 0 21, 4 austr.

Saturne en 1817.

Jours du mois.	Tems moyen du passage à Wilna.	Ascension droite apparente.	Déclinaison australe apparente.	Longitude géocentrique apparente.	Latitude géocentrique australe apparente.	Longitude héliocentr. tables de *Delambre*.
						11^s.
Août 22	$12^h 18'\ 32''3$	$335^\circ 30'\ 10''8$	$12^\circ\ 8'\ 6''8$	$332^\circ 53'\ 3'',6$	$1^\circ 48'\ 1''6$	$2^\circ 32'\ 31''7$
— 26	. 1 39, 7	. 12 59, 4	. 14 53, 9	. 34 55, 9	. 48 16, 1	. 40 9, 5
— 27	11 57 27, 1	. 8 42, 0	. 16 43, 1	. 30 22, 0	. 48 27, 0	. 42 4, 0
— 28	. 53 14, 6	. 4 25, 3	. 18 25, 8	. 25 50, 7	. 48 31, 8	. 43 58, 7
— 31	. 40 36, 0	334 51 36, 0	. 23 24, 4	. 12 22, 0	. 48 39, 5	. 49 43, 6

Jours du mois.	Longitudes hélio-centriques observées.	Différence.	Latitud. hél. australes. Tables de *Delambre*.	Observées.	Différences.	Tables de *Bouvard*. Longitudes héliocentriques.	Latitudes héliocentr. australes.	Différences. en longitude.	en latitude.
Août	11^s.					11^s.			
	° ′ ″	′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″	° ′ ″	° ′ ″	″	″
22	2 31 25,8	—1 5,9	1 37 9,0	1 36 52,6	— 16,4	2 31 36,1	1 37 3,9	— 10,3	— 11,3
26	. 39 3,6	—1 5,9	. . 24,2	. 37 5,2	— 19,0	. 39 15	. . 18,8	— 11,4	— 13,6
27	. 40 56,0	—1 8,0	. . 28,0	. . 17,3	— 10,7	. 41 9,8	. . 22,5	— 13,8	— 5,2
28	. 42 51,0	—1 7,7	. . 31,8	. . 19,9	— 11 9	. 43 4,5	. . 26,3	— 13,5	— 6,4
31	. 48 37,5	—1 6,1	. . 43,4	. . 30,0	— 13,4	. 48 48,0	. . 37,6	— 10,5	— 7,6
	Moyen	—1 6,7		Moyen	— 14,3		Moyen	— 11,9	— 8,82

L'opposition ♄☉ tirée des tables de *Delambre*, corrigées des erreurs, eût lieu à Wilna 1817 le 25. Août n. st. à $20^h 45'\ 15'',2$ t. m. astronom. Alors la longitude de Saturne et de la Terre $11^s\ 2^\circ\ 37'\ 49'',6$. Latitude héliocentrique ♄ = $1^\circ\ 37'\ 7'',5$ austr.

Les étoiles de comparaison furent : λ du *Capricorne*, *e* et λ du *Verseau*. On a employé l'obliquité de l'écliptique $23^\circ\ 27'\ 53'',5$.

L'opposition ☉♄ tirée des tables de *Bouvard*, corrigées des erreurs, eût lieu à Wilna 1817 le 25. Août n. st. à $20^h 45' 19'',6$ t. m. astronom. Alors longitude ♄ $11^s 2^\circ 37' 49'',8$
celle de la terre 11 2 37 49,8
Latitude héliocentrique ♄ 1 37 7,6 australe.

Junon en 1817.

Jours du mois.	Tems moyen du passage.	Ascension droite apparente.	Déclinaison australe apparente.	Longitude géocentrique apparente.	Latit. géocentr apparente boréale.
Sept. 4	12h 0′41″3	343 51′ 39″5	3°17′ 9″	343°52′ 4″6	°19′ 14″7
— 9	11 37 26,3	342 56 51	4 17 47	342 38 17,6	2 44 6,6
— 12	. 23 27,2	. 24 1	. 54 32	341 53 58,4	. 22 34,6
— 13	. 18 48,2	. 13 11	5 6 45	. 39 20,2	. 15 22,4
— 14	. 14 9,8	. 2 31	. 19 14,5	. 24 47,7	. 7 51
— 15	. 9 32,1	341 51 53	. 31 21	. 10 22,2	. 0 39
— 17	. 0 17,3	. 31 10,5	. 55 50	340 42 0,9	1 45 46,7
— 18	10 55 40,2	. 21 8	6 7 53	. 28 12,8	. 38 23,3
— 19	. 51 5,6	. 11 18	. 19 57	. 14 27	. 30 58
— 20	. 46 30,7	. 1 27	. 31 46	. 1 4,8	23 38,8
— 21	. 41 57,2	340 51 58,5	. 43 42	339 47 52	. 16 8
— 22	. 37 24,6	. 42 53	. 55 34	. 35 2	. 8 32
— 23	. 32 52,8	. 33 59	7 7 18,5	. 22 26	. 0 58,3
— 24	. 28 21,7	. 25 6	. 18 48	. 9 57	0 53 33
— 25	. 23 51,3	. 16 36	. 30 7	338 57 53 8	. 46 18
— 26	. 19 23,8	. 8 28	. 41 30 5	. 46 8 8	. 38 45,5
					australe
Oct. 7	9 31 40,4	339 1 7	9 33 23	337 2 37,3	0 40 11,3
— 8	. 27 31,3	338 57 4	. 42 22	336 55 34,2	. 47 3,2
— 9	. 23 20,1	. 53 45,5	. 50 59	. 49 20,9	. 53 50
— 10	. 19 12,5	. 50 49,5	. 59 33	. 43 28,6	1 0 42,7
— 14	. 3 0,7	. 43 30	10 30 39	. 25 14	. 26 54,8
— 17	8 51 9,1	. 42 39	. 51 44	. 16 38	. 46 10,8
— 18	. 47 17,8	. 43 19,4	. 58 9,5	. 14 51,4	. 52 23,3
— 19	. 43 25,6	. 44 27	11 4 17	. 13 36,6	. 58 29,3
— 20	. 39 36,2	. 46 6,4	. 10 11	. 12 55,7	2 4 34
— 21	. 35 46,4	. 48 8	. 15 46	. 12 42	. 10 29,5
— 22	. 31 59,6	. 50 35,6	. 21 12	. 12 55,2	. 16 25
— 23	. 28 16,7	. 53 31,6	. 26 19	. 13 41,3	. 22 15
— 24	. 24 31,4	. 56 44	. 31 17	. 14 45,6	. 28 2
Nov. 1	7 55 59	339 40 11	12 0 50,3	. 43 14,4	3 11 19

En interpolant ces observations par la méthode différentielle de *Newton*, on obtient ce qui suit :

Jours du mois.	Tems moyen du passage.	Ascension droite apparente.	Déclinaison boréale apparente.	Longitude géocentrique apparente.	Latitude géocentr. boréale apparente.	Longit. de la terre lors du passage.
Sept. 5	11h 56′ 1″,2	343° 40′ 41″,5	3° 29′ 17″	343° 37′ 17″,6	3° 11′ 55″,7	11s. 12° 55′ 39″,25
— 6	. 51 21,4	. 29 44	. 41 26	. 22 31	. 4 55	. 13 53 45,75

L'opposition de *Junon* est arrivée à Wilna 1817 le 6 Sept. nouv. st. à $1^h\,36'\,2'',6$ t. m. astron. Alors la longitude de *Junon* et celle de la terre $= 11^s\,13°\,28'\,51'',1$. Latitude géocentrique de *Junon* $= 3°\,7'\,55'',3$ boréale. Les étoiles de comparaison fûrent : 68, $\varkappa$, Φ, λ, et σ du *Verseau*. On a employé l'obliquité de l'écliptique $23°\,27'\,54'',3$.

Immersions des satellites de *Jupiter*.

1817. Avril 1. Immers. du I Satell. à $14^h\,11'\,33'',3$ tems vrai, gr. Lunette, observation bonne.

— — 8. Immers. du I Satell. à $16^h\,6'\,54'',2$ tems vrai, gr. Lunette, observation bonne.

— Mai 10. Immers. du I Satell. à $12^h\,44'\,59'',4$ tems vrai, petite Lunette, observation bonne.

1818. — 19. Immers. du II Satell. à $14^h\,55'\,41''$ tems vrai, gr. Lunette, observation passable.

— Juin 20. Immers. du II Satell. à $14^h\,22'\,1''$ tems vrai, gr. Lunette, observation assez bonne.

Mars en 1818.

Jours du mois.	Tems moyen du passage.	Ascension droite apparente.	Déclinaison boréale apparente.	Tables de *Lindenau*. Longitude héliocentr.	Tables de *Lindenau*. Latitude hélioc. boréale	Longit. de la terre lors du passage. Tables du Bureau de longit.
				4s.		
Mars 13	6h 11′ 24″,7	83° 33′ 19″,1	25° 37′ 5″,9	1° 30′ 29″,2	1° 46′ 28″,1	5s 22° 32′ 35″,5
— 14	. 9 28,9	84 3 21,6	. 37 39,7	1 57 36,8	. 46 42,9	. 23 32 14,3
— 15	. 7 31,9	. 33 8,6	. 37 57,7	2 24 38,8	. 46 57,3	. 24 31 51,1
— 16	. 5 36,6	85 3 31,5	. 38 7,8	2 51 33	. 47 11,3	. 25 31 27,4
— 18	. 1 44,8	86 3 55,8	. 38 38,7	3 45 18	. 47 39	. 27 30 27,6

Jours du mois.	Longit. géocentriques vraies		Latit. géoc. vraies bor.		Différences	
	observées.	Tables de *Lindenau.*	observées.	Tables de *Lindenau.*	en longitude.	en latitude.
	2s.	2s.				
Mars 13	24° 11′ 40″5	24° 11′ 43″2	2° 17′ 0″	2° 16′ 50″7	— 2″7	+ 9″3
— 14	24 38 43, 4	. 38 28, 8	. 16 24	. 16 9, 5	+ 14, 6	+ 14, 5
— 15	25 5 35, 1	25 5 23, 4	. 15 38	. 15 28, 4	+ 11, 7	+ 9, 6
— 16	25 32 59, 1	. 32 25, 0	. 14 49	. 14 47, 2	+ 34, 1	+ 1, 8
— 18	26 27 28, 5	26 27 6, 5	. 13 39	. 13 26, 2	+ 22, 0	+ 12, 8
				moyen	+ 15, 9	+ 9, 6

Les étoiles de comparaison fûrent: ε des *Gemeaux*, 132 et 125 du *Taureau*. On a employé l'obliquité de l'écliptique 23° 27′ 54″, 6.

La quadrature du *Mars* tirée des tables de *Lindenau*, corrigées des erreurs, est arrivée à Wilna le 16. Mars 1818 n. st. à 7h 1′ 12″,7 t. m. astron.

Lors de la □ { longit. géoc. vraie ♂ = 2s 25° 33′ 43″,6
longit. de la terre = 5 25 33 43, 6
latitude géocentr. ♂ = 2 14 55, 2 bor.

Vesta en 1818.

Jours du mois.	Tems moyen du passage.	Ascension droite apparente.	Déclinaison boréale apparente.
Mars 25	13h 30′ 21″,6	205° 25′ 41″,4	2° 56′ 47″,0
— 27	. 21 3,6	. 4 6,3	3 10 4,0
— 28	. 16 22,4	204 52 53,9	. 16 44,5
Avril 1	12 57 28,9	. 4 56,4	. 42 48,6
— 3	. 47 56,0	203 39 37,0	. 55 31,9
— 5	. 38 19,6	. 13 40,2	4 8 7,3
— 14	11 54 46,0	201 10 8,7	. 56 18,8
— 15	. 49 53,2	200 56 24,5	5 0 47,9
— 16	. 45 1,6	. 42 26,7	. 5 4,5
— 20	. 25 40,3	199 48 8	. 20 12,6
— 21	. 20 53,1	. 34 44,8	. 23 37,6
— 25	. 1 43,9	198 43 8,1	. 35 1,9
— 26	10 56 58,1	. 30 39	. 36 8,8
— 28	. 47 30,1	. 6 51,7	. 39 22,7
— 30	. 38 8,6	197 43 35,4	. 41 46,5
Mai 3	. 24 12,4	. 12 2,3	. 43 19,6
— 5	. 15 2	196 52 11,1	. 43 8,6
— 8	. 1 26,7	. 25 32,3	. 40 52,4
— 9	9 56 59,8	. 17 17,4	. 39 47,5
— 10	. 52 32,1	. 9 35,7	. 38 15,4
— 11	. 48 7,4	. 2 13,7	. 36 35,6
— 12	. 43 43,4	195 55 14,1	. 34 34,6
— 13	. 39 22,9	. 48 50,5	. 32 15,5
— 14	. 35 2	. 42 39,1	. 29 53,6
— 15	. 30 44	. 36 57,6	. 27 7
— 19	. 13 46,2	. 18 45,6	. 14 7
— 23	8 57 18	. 7 31,9	4 57 24,4
— 24	. 43 18,5	. 5 39,0	. 52 43,1
— 25	. 49 17,2	. 4 16,3	. 47 46,2
— 26	. 45 13,7	. 3 29,2	. 42 57,0

L'opposition de *Vesta* est arrivée à Wilna 1818 le 9. Avr. nouv. st. à $1^h\ 24'\ 57''$ t. m. astron. Lors de l'☍ longitude de *Vesta* $= 6^s\ 19^\circ\ 1'\ 43'',9$. Longitude de la terre $= 6^s\ 19^\circ\ 1'\ 43'',9$. Latitude géocentrique de *Vesta* $= 12^\circ\ 53'\ 23''$ boréale.

En interpolant ces observations par la méthode différentielle de *Newton*, on obtient ce qui suit :

Jours du mois.	Tems moyen du passage.	Ascens. droite apparente.	Déclinaison boréale apparente.	Longitude géocentrique apparente.	Latitude géocentrique boréale apparente	Lieu de la terre lors du passage.
Avr. 8	12h 24′ 6″,9	202° 33′ 10″	4° 25′ 39″,5	199° 9′ 6″	12 53′ 24″	6s 18° 29′ 48″,6
— 9	. 19 22,7	. 19 30	. 31 10,5	198 54 51,4	. . 22	. 19 28 29,1

On a employé l'obliquité de l'écliptique 23° 27′ 54″,8.

Les étoiles de comparaison furent η de la *Hydre r*, δ, *o*, *u* et σ de la *Vierge*.

Eclipse de Soleil le 4. Mai 1818 n. st. observée à Wilna.

	Tems vrai.	Demi-diamètres.	Parall. horisontale à Wilna.	☌ dans l'équateur.
Commencement de l'éclipse	19h 41′ 39″	☽ 14′ 47″	☽ 54′ 13″	21h 27′ 42″ 14 t.v.
		☉ 15 52	☉ 8	
Fin de l'éclipse	22 2 16	☽ 14 52	☽ 54 11,83	21 27 42,5.
		☉ 15 52	☉ 8	

Par un héliomètre appliqué à la lunette acromatique de *Dollond*, le diamètre du Soleil fut mesuré à plusieurs reprises, avant et après l'éclipse, et a donné constamment 3 pouces $\frac{12}{20} + \frac{14}{500} = \frac{1814}{500} = 3,628$ pouces. Le diamètre du Soleil était ce jour $= 1905''$; donc 1 pouce de l'héliomètre $= 525'',08$; $\frac{1}{20}$ pouce $= 26'',254$; $\frac{1}{500}$ p. $= 1'',05$.

À l'aide de ce héliomètre on a mesuré la distance des cornes, dont on a tiré la distance des centres du ☉ et ☽; et de cette dernière, le moment de la conjonction dans l'équateur, c'est-à-dire où l'ascension droite du ☉ et de la ☽ était la même.

La table suivante renferme les observations et les résultats du calcul.

Eclipse de Soleil, du 4. Mai 1818 nouveau style.

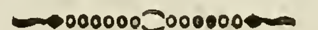
Tems vrai de l'observation.	Distance des cornes en parties de l'héliomètre			Dist. des centres en minutes.	Tems vrai de la conjonction.
	pouces.	20mes.	500mes.		
19h 49′ 10″7	1	10	0	27′,8683	21h 27′ 34″34
. 50 56,7	1	13	10	26 9348	. . 55,70
. 53 17,7	1	16	18	26,1995	. . 42,00
. 57 4,7	2	0	20	24,9018	. . 44,30
. 59 18,7	2	4	0	23,9623	. . 17,27
20 0 17,7	2	4	12	23,6607	. . 23,67
. 1 14,7	2	5	8	23.3522	. . 26,46
. 3 27,7	2	7	9	22,6073	. . 29,14
. 5 1,7	2	8	18	22,0360	. . 20,00
. 16 4,7	2	15	7	18,8133	. . 63,26
. 19 38,7	2	17	5	17,6440	. . 27,49
. 24 47,7	2	19	3	16,3826	. . 42,23
. 27 28,7	3	0	2	15,6833	. . 18,00
. 30 43,8	3	1	11	14,6226	. . 47,65
21 3 27,8	3	1	23	14,2950	. . 34,97
. 5 23,8	3	1	19	14,4550	. . 68,12
. 6 59,8	3	1	10	14,7340	. . 67,32
. 17 36,8	2	18	13	16,8630	. . 82,20
. 25 47,8	2	14	13	19,3080	. . 37,12
. 26 58,8	2	14	1	19,5670	. . 48,00
. 28 27,8	2	13	6	19,9850	. . 58,04
. 29 53,8	2	12	13	20,3750	. . 50,62
. 32 6,8	2	11	1	21,0860	. . 41,94
. 33 10,8	2	8	6	22,2680	. . 46,35
. 37 49,8	2	7	2	22,7890	. . 44 42
. 39 45,8	2	5	13	23,3840	. . 43,96

Le local n'a pas permis de suivre plus loin les distances des cornes.

La moyenne de 26 observations . 21h 27′ 42″,86;
en joignant le commencement et
la fin, on a la moyenne . . . 21 27 42,5.

L'éclipse de Soleil donne à Wilna la conjonction équatoréale	21^h	27′	42′,5	t. v.
on trouve par le calcul la réduction à l'écliptique		20	48, 0.	
Conjonction dans l'écliptique	21^h	6′	54′,5	t. v.
Les tables de *Bürg* publiées par *Zach* et les tables solaires du Bureau } donnent	21	6	56, 9.	
Différence . . .			2″,4.	

La plus grande distance des cornes fut observée 3 pouces $\frac{3}{20} + \frac{7}{500}$; d'où resulte la plus petite distance des centres 13′ 4″,96, et la grandeur de l'éclipse 6,6605 pouces.



II.
SECTION
DES
SCIENCES PHYSIQUES.

SUR LA PIERRE CHINOISE NOMMÉE YOU.

PAR

B. SEWERGUINE.

Présenté à la Conférence le 22 Janvier 1817.

La pierre chinoise nommée You, est une des substances minérales dont la nature ne semble pas encore avoir été determinée à fond. Quelques uns la regardent même comme une substance factice. Du moins le paroît-il par les résultats d'une analyse chymique qu'en a faite le célèbre *Klaproth*, si toute fois la pierre de Riz de ce chymiste est la même substance avec celle dont il s'agit ici.

Comme donc les opinions sur la nature de cette substance, sont tellement partagées, j'ai crû devoir de ma part, en faire des recherches ultérieures pour pouvoir parvenir à un résultat plus decisif.

J'ai examiné pour cet effet avec toute l'attention requise une rélation Russe sur cette substance que j'ai trouvée dans un des journaux académiques de l'année 1791. J'ai redigé en ordre méthodique les notes characteristiques que j'y ai pû trouver, j'ai rassemblé et verifié (*), tous les faits qui la concernent. Enfin je me

(*) Sur une bague que j'en possèdois, et qui étoit de couleur grisâtre, demi transparente ayant l'air d'une calcedoine etc.

suis informé la dessus par des translateurs Russes qui ont sejourné longtems dans la Chine, et qui en traduisant le mot You, par le mot jaspe (Яшма) sont d'accord qu'elle est une substance naturelle.

Voici ce qu'on peut déduire de la dite rélation Russe. L'auteur n'en est pas connù ; mais on peut se fier à lui d'autant plus qu'il semble avoir vû plusieurs échantillons de cette pierre.

Quoiqu' il s'y trouve beaucoup de choses outrées, sans doute par l'ostentation des Chinois même, cependant on en voit que cette substance est assez commune et fort estimée en Chine.

CARACTÉRES EXTÉRIEURS ET PHYSIQUES DE LA PIERRE NOMMÉE YOU.

1°) *Couleur.* La couleur principale en est celle du petit lait. Cependant il y en a aussi de couleur de citron, qui selon l'auteur sont les plus estimées ; puis suivent celles de couleur de lait clair; puis les jaunes melées de rouge de cinnabre et de pourpre. Il y en a aussi de tachetées.

2°) *Lueur.* Grasse, un peu vitreuse, très agréable à la vue.

3°) *Forme extérieure.* Celle d'un caillou ordinaire.

4°) *Volume.* Les cailloux les plus volumineux ont quelques fois jusqu'à $4\frac{1}{2}$ pieds de grosseur. Cependant ceux qui sont plus petits passent pour les meilleurs.

5°) *Dureté.* Presque celle du diamant. La pierre ne se laisse en tamer que par le moyen de sa propre poudre. Même, dit la rélation qu' il faut 9 à 10 années pour en tailler une pièce à caufe de sa grande dureté ; on voit cependant que ce n'est que trop outré.

6°) *Brisure.* Etant presque aussi dure que le diamant, elle se casse aisément par le choc, surtout ses pièces les plus minces.

7°) *Pésanteur.* Deux ou trois fois plus grande que celle d'un cailloux ordinaire. — Plus la pierre est dure et pésante, et plus elle est estimée, car c'est alors qu'elle prend le meilleur poli.

8°) *Son.* On remarque que plus la pierre est pûre et plus elle est sonore.

9°) *Usage.* On en fait les baques les plus minces quelques fois avec des gravures de caractères Chinois; on en fait encore des tasses, et des instrumens sonores de musique.

10°) *Prix.* Elle est regardée en Chine parmi les pierres précieuses, et son prix surpasse celui de l'or.

11°) *Gisement.* Elle se trouve ou dans les fleuves, ou dans des grottes formées par les courans des eaux. Les premières sont plus lisses et plus pures. On distingue les premières, par le nom de You aquatique (водяной), et la seconde par celui de You terrestre.

12°) *Lieu natal.* Autres fois on la recevoit du Japon et des frontières de la Tartarie, et puis des bords d'un fleuve non loin d'Irca (*).

D'après tant de faits remarqués sur la pierre You, qui seroit tenté ds la croire être une substance factice? Ce n'est que la rareté de ses échantillons en Europe qui auroit pû faire douteux sou origine analogue aux autres substances minérales.

Mais que l'on me permet encore une remarque d'un autre genre.

Ou a différemment discuté sur la substance dont les anciens faisoient leur Vasa murrhina (*Plin.* Livre 37 - 8.) (**). Mais quand on considère de plus près les caractères extérieurs de cette der-

(*) Capitale de la petite Bucharie.

(**) Selon l'édition de Hardouin.

mière, elle semble approcher beaucoup de la nature de la pierre d'You. Car : 1) elle est souvent tachetée de couleur blanche laiteuse et de pourpre ; 2) de peu de volume (*) ; 3) la lueur en est grasse (**) ; 4) elle est cassante (***) ; 5) elle étoit d'un haut prix. Enfin elle venoit de l'Orient, selon Pline, de Parthe et principalement de Caramànie, ainsi, à-peu-près des mêmes endroits d'où les Chinois reçoivent actuellement leur pierre You.

Je sais bien que quelques naturalistes ont régardé même la substance des Vasa murrhina, comme factice. Mais que l'on confronte l'endroit cité de Pline et d'autres du même naturaliste, avec les caractères ci-dessus mentionnés, que l'on rapproche les faits qui les concernent, et leur identité sera presque hors de doute.

Au reste il se peut bien que l'on les contrefaisoit anciennement comme on contrefait les pierres précieuses. Mais cela ne fait pas moins qu'il y en ait de naturelles. Il ne seroit que trop à souhaiter et pour l'avancement des connaissances minéralogiques, et pour le profit des arts, que la substance en question soit plus commune en Europe.

(*) Amplitudine nusquam parvos excedens abacos.

(**) Ibidem.

(***) Livre 33 - 2: Selon hardonin. Murrhina et crystallina — effodimus, quibus pretium faceret ipsa fragilitas.

DE PISCIUM AUSTRALIUM NOVO GENERE ICONE ILLUSTRATO.

AUCTORE

TILESIO.

Conventui exhibuit die 21 Maji 1817.

Insulas australes, in magno Oceano pacifico sitas, animalia et vegetabilia maxime singularia et figuris ac coloribus insolitis splendidioribus variantia proferre, jam ex itineribus nauticis praeteriti seculi et ex peregrinatorum antecedentium, insulas Latronum Paschales Marchionicas Washingtonii sociales et amicales perscrutantium, relationibus notum est. Novam praeprimis Hollandiam novis non solum speciebus, sed etiam novis animalium singularium generibus abundare, relatio itineris australis Peronii nuperrime iterum docuit. Pari modo et in itinere Russorum circum terram, *Krusensternio* duce, admirabilis naturae nova documenta in insula australi Nuckahiwah, insulis Washingtonii partem Marchionicarum constituentibus adscripta, collecta sunt, quorum alterum in pisce Balistarum forma et habitu, usque adhuc in solis picturis *Krusensternianis* communicato, nunc mihi latius explicando, repertum est. Incolae vel indigenae hujus insulae ab ipso *Krusensternio* optime descriptae, anthropophagi, Fauni quasi imperio viventes, ab omni familiaritate aliorum hominum moribus et legibus excultorum exclusi, in rudioris naturae statu barbaro remoti, aequali dexteritate in montibus calvis bellicosis et vallibus sylvaticis ac in undis Oceani versati, instar piscium natantes et se submergentes, piscem nostrum ex Oceano attulerunt, ipsis *Coauhui* vocatum. Istorum sub numero insulae incolarum duo nautae ex

Europa quondam advecti, alter Francogallus *Josephus Cabrit* (*), alter Anglus nomine *Roberts* (olim remex Navarchi Anglici *Graffin Bannes*) (**), per annorum plurium seriem in hac insula remorati, et linguae indigenorum satis gnari, interpretes quaestionum et responsionum nostrarum fuere. Ab Anglo, piscem nostrum cum Squalo istis feris incolis insulae, qui ejusdem figuram in corpore ipso quotannis acicularum puncturis pingendo, et in monumentis ipsis, *Etuah* vocatis, et in grallis imitari solent, memoriae et notae symbolicae dignum haberi, certiores facti sumus. Ab eodem de piscis nutrimentis et usu vel applicatione edoctus sum; quippe qui pisces hujus generis propter victum et vitae pabulum ex Aplysiis, Doridibus, Sepiis octopodiis et Milleporae polypis electum, nunquam edules sed interdum venenatos, ob scabritiem corporis scutis rhomboidalibus muricatis, cataphracti vero utiles et limae instar vel corii Squalorum hirsuti et scabri applicandos, et in laevigandis lignis necessarios demonstravit; qua de causa et ipse et incolarum in corporibus pingendis artifex, sibi piscem tamquam artis symbolum in cute acicu- lis pinxerit.

Balistes Nuckahiwae, vel *Coauhui* sic dictus, pinnis ventralibus omnino destitutus novum genus format, quod mihi *Balistapus* apte appellari videtur. Vox Balistapus nil aliud sibi significare vult, quam Balistes apos vel piscis Balistarum natura ac forma, sed pinnis ventralibus earumque qualicunque vestigio destitutus. Haec distinctio non in genere naturali quidem Balistarum locum habet, sed in artificiali systematis ichthyologici, in opere posthumo a celeberrimo *Blochio* stabiliti (***), et hanc ob causam maxime necessa-

---

(*) In diarii itineris *Langsdorfii* tab. VI. jaculator depictus alter Delius natator, qui nobiscum nave adductus Camtschatcam, et paulo post Petropolin petiit; et nunc discipulis nauticis artem natandi docet. Conf. *Langsdorfii* explicatio tabulae 6. p. 83.

(**) A quo testimonium virtutis et honestatis nauticum conscriptum conservavit, ac nobis ut sese recommendaret obtulit. Uterque eorum nunc ad Europam rediit.

(***) *M. E. Blochii* systema ichthyologiae CX. iconibus illustratum, opus inchoatum

ria videtur, quoniam in illo pisces secundum pinnarum numerum collocati, et Balistes octo, Balistapus vero tantum senis pinnis praeditus est. Pinnae ventrales in Balistis quibusdam vel concretae vel in unam quasi coalitae vel interdum mutilatae videntur; quod ad diminuendum numerum pinnarum, in genere stabilitarum, et ad perturbandum ordinem, semel constitutum, ansam praebuit; qua de causa factum est, quod Balistarum genus et in ipso *Blochii* systemate in sexta piscium hexapterygiorum classe injuste remotum sit, etsi *Blochio* et *Schneidero* teste (*) octopterygii veri sint, quoniam et in mutilatis Balistarum pinnis ventralibus et concretis semper radii gemini utriusque pinnae nimis approximatae discerni possunt, pinna gemina ventralis coalita igitur vel mutilata, prae caeteris respicienda et examinanda, pro duabus pinnis omnino numeranda est. Si vero ichthyologi septimam singulam pinnam ventralem non examinare, et hanc geminam ex duabus pinnis nimis approximatis expressis coalitam pinnam, ex solo intuitu pro singula numerare vellent, etiam in quinta classe systematis *Blochiani*, heptapterygios pisces complectente, Balistes haberemus, et Balistes in tribus classibus dispergerentur ac dilacerarentur. Videmus ex his, naturam in formando numero et pinnarum structura ichthyologorum systemata non respicere, sed potius ipsorum piscium vitae genus et habitationes aliasque necessarias conditiones, videmus eandem nequidem genus naturale ipsum respicere, cum huic octo, illi septem et tertio sex tantum pinnas tribuit. Hoc nos non vexare debet nec incitare, ut leges systematis solum discentium in usum stabiliti, vel indicis conspectum animalium diversorum illustrantis, laederemus, quod tamen auctor ipse fecit, cum coalitis et mutilatis pinnis perturbaretur. Adeoque editor operis posthumi, etsi hunc errorem intellexerit imo ex pinnis ven-

---

post obitum auctoris absolvit, interpolavit, correxit *J. Gottlob Schneider* Saxo. Impensis auctoris impressum et bibliopolio *Sanderiano* Berolini commissum 1801.

(*) „Balistarum genus, auctor ipse ait. LIII. l. c., proprie ad classem IV. octopterygiorum pertinet, pinnae enim ventrales vel concretae vel coalitae vel aculeis 2 insignitae adsunt.

tralibus, varie coalitis ac mutilatis Balistarum in plurimis speciebus examinatis et disquisitis, demonstraverit, tamen eundem re vera corrigere nondum ausus est. Sed omnino opus est, ut in nova forsan curanda *Blochiani* systematis editione Balistes ex numero piscium hexapterygiorum et heptapterygiorum deleantur et ex classe sexta ad quartam classem transloecentur, Balistapodum species vero in sexta classe remaneant vel restent. Argumenta necessitatis hujus ipsis *Schneideri* verbis insunt, dicentis: „Ventrales pinnae, sed simplices et in unam coalitae adsunt in *vetula* et *ciliari* specie, sterni stylo longo adpositae, in *biaculeato* duo aculei ventrales geminae pinnae locum tenent, in aliis stylus sterni extremus articulo mobilis pinnae vices gerit, in quibusdam articulum mobilem styli nullum conspicere licet, et ipse stylus sub cute latet nec usquam cute prominens vix agnoscitur. Hunc ipsum stylum (ubi solus adest) pro pinna ventrali vix numerandum esse censeo, eoque magis miror, *Schneiderum* ipsum haec duo genera artificialia in *Blochii* systemate nondum separasse. In vetula numeravi radios 30 pinnae ventralis, stylo sterni prominenti et processui alteri interno sterni appositos, propius autem hos radios inspicienti patet esse 10 radios *duplicatos*, undecimum vero simplicem; *quod argumento est, pinnam ventralem geminam adesse* sed coalitam, quae radium undecimum gerit communem. Sternum hoc anterius carinatum, inferius bifidum, processu inferiore introrsum inflexo, *Linnaeus* mox radium mox spinam, rectius? *Artedi* pinnam ventralem vocat. In biaculeato sternum inferius non bifidum, sed integrum aculeos 2 appositos gerit, ginglymo articulatos, etc. Haec omnia probant, Balistarum genus esse octopterygium non hexapterygium vel heptapterygium. Cum vero Balistarum jam quinae species repertae sint, senis tantum pinnis instructae et pinnarum ventralium defectu omnino distinctae, lex intrat systematis *Blochiani* in numero pinnarum posita et jubet, has quinas species hexapterygias, pinnis ventralibus destitutas, sub nomine Balistarum apodum remanere solas in classe sexta et genus proprium formare, ne discentes in inquiren-

dis et inveniendis ex numero pinnarum speciebus secundum legem perturbentur, nec in dubio haereant.

Plures jam Balistes apodes adesse, *ringens*, *Monoceros* et *lineatus Blochii*, in iconum systema illustrantium numero pictus probant. Praeterea et *Peronius* in itinerario (Voyage aux terres australes p. 139.) quartam speciem nuperrime ad littora novae Hollandiae in *Balistapodo*, male sic dicto *Wittensi* suo invenisse refert, et specimine philosophiae naturalis et systematicae Francogallorum sequentibus verbis confirmat: „Ce dernier jour fut marqué par une decouverte importante, celle d'un nouveau genre de poisson *Balistapodus Wittensis* N. voisin de cèlui des Balistes, mais qui en diffère par l'absence absolue de toute espèce de nageoire ventrale. Ce dernier caractère en fait le premier type d'un nouvel ordre dans la méthode ichtyologique de mon illustre maitre Mr. de la *Cépède*. Ce célèbre naturaliste, en effet, ne s'est pas borné dans sa classification générale des poissons, à présenter toutes les espèces connues jusqu'à ce jour; mais s'élevant à des considérations plus générales et plus *philosophiques*, il a comparé tous les grands rapports de l'organisation de ces animaux, déterminé toutes les combinaisons possibles des principaux organes extérieures entr'eux. Analysant ensuite toutes celles de ces combinaisons connues jusqu'à ce jour, il en a *conclu* l'existence, ou du moins *la possibilité* de l'existence de celles, qui, pour nous, restoient encore sans type dans la nature; et dès-lors, *devançant le temps et l'expérience* il osa fixer dans ses tableaux la place, que chacun de ces groupes ignorés viendroit y occuper un jour — — — Son grand ouvrage sur les poissons n'étoit pas encore fini et déjà sur des lointains rivages ses *hardies conceptions* étoient réalisées!!!" Sed mallem, *Péronium* potius picturam ejusdem piscis vel descriptionem formae saltem et partium externarum et varii coloris nobiscum communicasset, per quam certiores facti fuissemus, an novae Hollandiae Balistapus cum Marchionico australi in tabula adjecto depicto conve-

niret nec ne, quod, cum nondum factum sit et Balistapus *Péronii* nec ab ipso inventore, nimis praematura morte nobis ac scientiis naturae erepto, neque ab ejusdem socio *Lesueurio*, qui verosimile piscem ad naturam pinxit, vel ab ullo alio ichthyologo Parisiensi, piscis forsan in Museo Parisiensi asservatus descriptus sit, in posterum expectandum est. Sed haec de novo genere *Balistapodum* sufficiant, transeamus nunc ad novam speciem.

Tab. IX. BALISTAPUS *capistratus*,

indigenis insulae Nuckahiwae *Koauhui* dictus.

Balistapus noster forma habitu et magnitudine omnium maxime cum Baliste Indico, aculeato *Blochii* et lineato ejusdem Coromandelico conveniens, ab iisdem iterum corpore atro, squamis minoribus rhomboidalibus muricatis vel hispidis scabro, specillo circum oculos ducto et capistro, ex lineis tribus egregie pictis composito distinguitur. Lineae capistrum formantes sunt aureae et violaceo coeruleae, alternatim positae, ab ore ad anum usque ductae; praeter dictas posteriores accedunt duae anteriores labiales, os instar sphincteris labiorum cingentes. Conspicillum ex singula tantum linea coerulea circum oculos ducta utrinque formatur. Praeterea sex aliae sunt lineae circulares vel semicirculares utrinque, dorsum inter pinnam anteriorem dorsalem et posteriorem occupantes, anteriorem quasi cingentes, parallelae, flavae, et totidem aeque sinuatae ventrales circum anum ductae. Aculeos caudales aduncos antrorsum incurvatos, novem binis ordinibus digestos quibus armatus est, ut omnia occurrentia secum rapiat, et pinnarum formam ipsam cum lineato et aculeato *Blochii* fere communes habet. Corpus a latere compressum, ut hoc ex diametro corporis (Fig. 5.) transversaliter dissecti conspicitur, et squamis rhomboidalibus muricatis margine pectinatis, quae lente et microscopio auctae (Fig. 3. et 4.) delineatae sunt, tectum est et scabrum. Linearum colores splendidissimi ex fundo aterrimo egregie ascendunt, sed aetate piscium variare

videntur, in junioribus nempe et minoribus color in fundo fuit atrofuscus et linearum capistri interdum duae tantum, ut hoc in Fig. 2., quae rostrum junioris naturali magnitudine delineatum sistit, videre licet, semper vero coloris lucidioris, altera coeruleo virescens, altera rosea, in adultioribus et majoribus contra, qualem in figura prima delineavi, dimidio minorem, color in fundo aterrimus est et lineae capistri exteriores duae nec non singula labialis et singula conspicillum formans, coeruleae, media capistri et altera labialis aureo miniaceo, non rosea.

Praeterea caput rostrum format fronte alta et longe proclivi, oculis magnis verticalibus, naribus geminatis oculo approximatis flavo marginatis, ore minori, labiis crassiusculis, dentibus incisoriis, glirium in modum prominulis, armatum. Oculi prominuli, iride virescente, pupilla nigra annulo aureo cincta. Pinnarum sex forma et positione noster cum lineato *Blochii* congenerico suo conveniens, pinnas gerit posteriorem dorsalem et analem, basi scutatos, altera alteri oppositas, superiorem viginti sex, inferiorem viginti quatuor radiis radiatam, pinna caudalis ad basin etiam scutata vel potius squamata, radiis undecim vel duodecim extremitate quadripartitis radiata est. Pinnae pectorales breviusculae, rotundatae tredecim, radiatae. In pinna dorsali anteriore tres tantum radii numerantur, sed prior osseus, crassus, longus, muricatus et antrorsum versus serrato-crenatus, in dorso sulcus est pro reponendo hoc radio. Apertura branchialis obliqua, operculo membranacco nudo non squamato ante pinnam pectoralem. Anus in medio paulo remotus et caudae paulo propior. Os angustum subrotundum fere constrictum, labia crassa, sphincteris in modum dentibus prominulis applicata. Dentium structura Tetraodontum Scarorum Labrorum et Sparorum quorundam Indicorum quodam modo similis, anteriores, incisores glirium in modum obliqui prominent, quorum superiores 8 crena incisi, descendentes, inferiorum ascendentium apices suscipiunt et maxillarum productiones esse videntur.

Balistapodis caeterum Balistarum natura est et in naturale genus priores cum posterioribus confluunt, uno eodemque corporis duri squamis vel scutulis rhomboidalibus scabris tecti vel quasi loricati, habitu et forma gaudent, colore obscuriore lineis lucidioribus et interdum elegantissimis variegato, rostri denique et dentium structura plerumque omnes inter se conveniunt. Cum Tetraodontibus in eo quodammodo conveniunt, ut corpus inferiora versus inflare possint et integumenta abdominalia aëre incluso extendere, quod experimento, quo tubuli ope per anum inducti abdomen inflari potest, comprobatur. In tabula 148 operis majoris ichthyologici *Blochii* Balistes ejusmodi inflatus repraesentatur. Edules non sunt, imo quibusdam temporibus adeo venenatum esse nostrum, ex relationibus Brittanni *Roberts* de annis calamitate famis et sterilitate sitodii vel Artocarpus vel Rademachiae incisae damnatis, suspicor; vitam enim degunt in scopulis coralliferis insulae Nuckahiwae et inter Madreporarum et Milleporarum ramos, papillis vel polypis earum victitantes et Aplysiis, Doridibus aliisque Limacinis nec non Sepiis vesci dicuntur. Ex esca jam concluditur, carnem eorum sanitati non convenire. Praeterea et Echinum sphaeroidalem et Aphiuram nigram ad littora insulae frequentem non spernere dicuntur, quod etiam dentium structura ad rodendum aptissima suadet.

In definiendis vel adsignandis notis specificis nostri piscis, specillo nempe et capistro, jam duas e numero piscium cognitorum species occurrere conspicilli et capistrati nomine insignitas video. *Cepedius* enim Gallus ex *Commersonii* tabulis pictis Balistem, nec nomine neque descriptione illustratum, in operis sui Tab. 15. Fig. 3. (Baliste bridé) depinxit et descriptionem et nomen capistrati ex sola pictura, quae vix capistrum refert, adjunxit. Capistrum non clarum est nec per lineas ductum sed nebulosum, ad pinnam pectoralem vix perductum ex fascia latiuscula, rostrum cingens s nsim diluta conflatum et vix nomen meretur. Praeterea piscis ventrali pinna distinctus et caudali lunata, aculeis caudalibus

vero destitutus est. Ex allatis notis quisque intelliget, *Cepedii* piscem non solum genere sed etiam specie a nostro diversum esse, eumque nil nisi nomen, si alias Balistapus esset, cum eodem commune habere.

Balistes conspicillum vigesimam speciem in *Blochii* systemate ichthyologico (pag. 474.) sistens, a *Cepedio* in Tab. 16. Fig. 3. depictus et Balistes Americanus dictus *a Sonnerato* (Journal de Physique 1774 Tome III. pag. 443. Tab. 3. depictus) sub nomine *Guaperva tacheté* describitur, macula sub oculo notatus est, quae conspicilium referre dixerunt, sed vereor, ne plurimi spectatores in eadem hac macula specilli formam clarius agnoscant, quam in praecedenti capistrum inveniant.

Praeterea *Guaperva* abdomine albo nigroque maculato, et pinna caudali nigro marginata distincta et specie saltem a nostro diversa est. An *Guaperva* ejusdem generis sit ex icone non discernere licet. Si vero aliqui de nomine, binis animalibus admodum diversis synonymo solliciti essent, nostrum propter specillum circum oculos ductum perspicillatum nominare possent. Interea tamen nostrum in systema Ichthyologiae *Blochii*, sequentibus notis breviter notatum, inserendum esse censeo sub nomine:

Balistapus capistratus. B. corpore compresso, squamis rhombeis muricatis, scabro, atrofusco, specillo lineari coeruleo circum oculos ducto et capistro trilineari ex aureo coeruleoque picto, ab utraque maxilla ad pinnam analem producto, fascia labiali bilineari instar sphincteris labiorum cincto et circulis sexlinearibus parallelis, circum pinnae dorsalis prioris basin et anum circumductis, flavis ornato, capite vel fronte declivi, oculis prominulis ad verticem, naribus geminatis approximatis, pinnis pectoralibus breviusculis rotundatis, operculis membranosis, aperturae branchialis oblique affixis, pinna dorsali priori trira-

diata, radio primo osseo crasso aculeato et extus serrato cum sulco profundo pro eodem suscipiendo, in dorso pinna dorsali posteriore anali opposita, ano paulo propius versus caudam, pinnae caudalis rotundatae, radiis 11 quadripartitis, aculeis caudalibus 9, duplici ordine dispositis, antrorsum recurvatis robustis.

P. 13. d. a. 3. d. p. 26. A. 24. C. 12 — 11.

habitat inter scopulos et Corallia Oceani australis, Insulam Nuckahiwa alluentis.



DE *GECKONE* AUSTRALI ARGYROPODE NEC NON DE GENERUM NATURALIUM IN ZOOLOGIA SYSTEMATICA DIGNITATE TUENDA, ATQUE DE GECKONIBUS IN GENERE.

Accedunt icones Stellionis tereticaudati et lauticaudati

AUCTORE

TILESIO.

Conventui exhibuit die 21 Maji 1817.

Insulas australes interdum pulcherrima, interdum et insolitae et singularis imo stupendae indolis et formae animalia proferre, jam nuper piscis exemplo *Balistarum* affinis, sed ventralibus pinnis destituti demonstratum est. Ex eadem Marchionica Oceani pacifici insula *Nuckahiwa* dicta, cujus historiam celeberrimo *Krusensternio* nostro debemus, lacertum ex itinere ejusdem circum terram allatam jam describendi animus est. Animalculum e *Geckonum* familia est et cum satis superque notum est, omnium lacertarum Geckones maxime luridas, aspectu horridas et deformes esse, nostram lacertam australem vix venustam dici posse facile conjicitur; sed nihilo minus ex admirabili pedum structura et imprimis ex lamellarum argento resplendentium pulchritudine in digitorum plantis vel soleis inferioribus conspicua, eandem omnino admiratione nostra satis dignam esse, mox demonstrabitur.

Praeterea animalculum hocce divisionem lacertarum, a Zoologis recentioribus dissectam et multiplicatam perlustrandi occasionem affert. *Pallasii* nostri monita de non distrahendo naturali lacertarum genere Francogalli audaciae et confidentiae prompti non respexerunt, idemque hoc genus contra naturam in sedecim genera con-

minuerunt vel dilacerarunt (*); quamvis alias in classe lubrica et difficiliore Molluscorum omnes sese ad ejusdem *Pallassii* nutum (**) converterent, et astute satis, inventorem silentio transeuntes mutato nomine (***), id pro novo invento Francogallico venditarent, quod de ordine Centroniorum Mollusca et Echinodermata actinoda comcomplectente, de Limacinis et reliquis Molluscorum ordinibus naturalibus, modeste pro more consueto ac circiter tantum in Miscellaneis et Spicilegiis zoologicis expertus et fide conspicuus senex proposuerat.

De Lacertis Rossicis verba faciens, ingenii acie aeque conspicuus monet: „Lacertarum genus, elegantissimum, agilissimum plerumque mutum, et mire varium, apud nos etiam in australioribus regionibus satis numerosis speciebus pullulat, dum unica tantum in septentrionalibus propagatur. Videtur ratio hujus esse, quod oviparae pro maturanda progenie ardente magis sole et arenoso sicco solo indigeant, quod exemplo *lacertae Tauricae* praesertim probatur, quae in Chersoneso Taurica olim frequentissima, post insecutos tres annos (1803 — 1805) admodum pluviosos et continua intemperie infames, ita nunc periit, ut vix unam vel alteram per plures annos hinc inde offendere daretur. Hodierni plerique Zoologi hoc genus *ordine* (****) a Serpentinibus alienarunt; sed continuam familiam esse illustri exemplo docent *Chalcidae* dictae, *Lacerta anguina*, *Anguis*

(*) *V. Dumerils* analytische Zoologie von *Froriep* übersezt. Weimar, Bertuch, in 8^{ve} 1806 pag. 80 et 82 et 78. Ordinis Sauriorum familiae planicaudatae et tereticaudatae, cohortes, genera et species.

(**) *Pallassii* Miscellan. Zoolog. pag. 72. 73. et 152. 153. etc. ejusdem spicileg. Zoologic., fasc. X. p. 24. 27. 31. 35. et praeprimis in versione ejusdem libri aucta et cum notis ab auctore ipso vernacula lingua ita sub titulo: Naturgeschichte merkwürdiger Thiere, in 4. Berlin 1778. Zehnte Samml. p. 44, et aliis in locis, ubi de methodo systematica loquitur.

(***) Limacina in Gasteropoda, Centronia vel Actinoda in Radiata et sic porro.

(****) *Saurii* i. e. Lacertae ordinem constituunt in Methodo Francogallica et quidem penultimum, *Ophidii* i. e. serpentes ultimum et *Batrachii* (ranae) et *Chelonii* (testudines) priores reptilium ordines.

bipes ad Chalcidas pariter pertinens et praesertim descripta a me *Lacerta apoda:* nec anatome comparata refragatur. Multo minus eos laudaverim qui lacertas in varia genera distraxerunt: generis enim naturales subdivisiones, characteribus ex habitu desumendis, determinandae adeo sunt obviae, ut multiplicatione nominum non indigeamus, numeroso licet in genere. Has subdivisiones naturales satis bene indicavit *Gmelinus* in editione *Linneani* systematis, ut paucas species transponendas esse credam, aliquas tamen familias conjungendas."

Attamen *Dumerillus* l. c. *Cuviero* (*), *Cepedio* (**) et *Daudino* (***) duce, *Saurios* suos in duas primum cohortes, laticaudatas nempe et tereticaudatas divisos, in sequentia genera distraxit: 1) *Crocodilos*, 2) *Dracaenas*, in quibus unica tantum species *Lacertus Indicus Wormii* nota; 3) *Tupinambides*, quibus duae familiae insunt, altera cauda simplici e. gr. *lac. monitor* L. altera cauda cristata, e. gr. *lacerta exanthematica;* 4) *Uroplata* sunt *Geckones* cauda gubernaculi instar applanata, pedibus lobatis et cristatis distinctae, e. g. *Gecko fimbriatus Daudini*, *Stellio fimbriatus*, *Schneideri*, *Lacerta homolocephala Crevеldi* (****) et reliquae Geckones aquaticae; 5) *Lophyros* (Agama aliorum), e. g. Lacerta superciliosa L. et plures granulosa cute distinctae; 6) *Basiliscòs*, (Tupinambidis et Iguanae habitu sed crista dorsali a prioribus et cauda lata a posterioribus distinctae) e. gr. *Lacerta basiliscus* L.

Haec sunt genera tantum prioris cohortis, lacertas planicaudatas complectentis, in posteriore cohorte lacertas tereticaudatas con-

(*) Cours de l'hist. naturelle.

(**) Histoire naturelle des quadrupèdes ovipares et des serpens par la Cepède, Paris 1788 II. Vol. in 4. Deutsche Uebersetzung mit Zusätzen von *J. M. Bechstein*. Weimar 1800. 5 Theile in 8. mit Kpf.

(***) Histoire naturelle des rainettes, des grenouilles et des crapauds par Mr. *F. Daudin*, Paris 1802. 4.

(****) Magazin der Gesellschaft naturforschender Freunde. Dritten Jahrg. viertes Quartal, Berlin 1809. Tab. VIII. pag. 266.

tinente decem genera numerat, quae sunt 1) *Iguanae* (majores lacertae dorso cristatae) e. gr. *Lacerta Iguana* L. 2) *Dracones* e. gr. *Draco volans* L. 3) *Agamae*, e. gr. *Lacerta agama* L. 4) *Chamaeleontes* (altipedes corpore compresso digitis coadunatis cauda incurvata), e. g. *Lacerta Chamaeleon* L. 5) *Geckones* (scil. terrestres, tereticaudatae, sunt ergo separatae et in duobus generibus divisae ac generalem in planicaudatas et tereticaudatas divisionem non probant) e. g. *Geckones Gmelini* in syst. *Linneano*. 6) *Stelliones*, e. gr. *Lacerta Cordylus* L. 7) *Anolides* (sunt semigeckones quasi vel sub extremitate digiti tantum lamellatae, iguanaeformes), e. gr. *Lacerta bimaculata* L. 8) *Lacertae* (in hoc lacertarum genere omnes complectuntur species, quibus in reliquis generibus locus aptus nondum adsignari potuit, nihilominus tamen ad 40 et quot excurrit specierum numerum accrescit, et praeterea subdivisiones duae, *Tachidromi* nempe vel lacertae cauda longitudine corporis triplici distinctae, e. g. *Tachydromus sexlineatus Daudini* et *Ameivae* vel lacertae collari ex squamis grandioribus destitutae, e. gr. *Lacerta Ameiva* L. accedunt). 9) *Stinci* (lacertae ad modum piscium squamatae), e. gr. *Lacerta Stincus* L. (et in hoc genere subdivisiones stabilitae sunt, *Seps* nempe et *lacertae bipedes* e. gr. *Lacerta apoda Pallassii*). 10) *Chalcides* (et in hoc genere distinguuntur *lacertae quadrupedes* e. gr. *Tridactilus Cepedii*, et *bipedes* e. gr. *Bipes Cepedii canaliculatus*.

Vidimus ergo Geckones in duobus imo tribus generibus separatas vel dispersas, imo non genere tantum sed jam cohorte separatis iisdem Geckonibus solis universalis lacertarum in cohortes laticaudatas et tereticaudatas divisio nec fide nec consensu celebrari videtur, cetera genera eandem nec melius probant, sed cum de Geckonibus solis sermo nobis sit, reliqua transeundo mittamus. Geckones, quibus, excepto habitu corporis et capitis depressi lurido, unica vera *distinctionis nota in plantis quinque lobatis cristatis* vel inferioribus pedum superficiebus *lamellatis* inest, ex tribus di-

versis generibus Dumerillianis, in quibus dispersae sunt, colligi debent. Gecko noster in tereticaudatis quintum intrans genus a *Dumerillio* constitutum, ab omnibus usque adhuc notis speciebus colore atrofusco et lamellis solearibus digitorum argenteis satis distincta et nova est, antequam vero ad ejusdem descriptionem specialiorem progrediamur, licitum sit alia exempla dilacerationis generum afferre.

Aequali ratione in dilacerato *Medusarum* genere a *Peronio* (*) nuperrime peccatum est, qui, licet ob multa de historia naturali novae Hollandiae merita et in primis ob Medusarum genus denuo revisum, permultis novis speciebus auctum et novis observatis illustratum magni aestimandus sit, in eo saltem reprehendendus est, quod ex Medusarum speciebus, Medusarum genera fecerit. Genera sua, quatenus in posterum confirmantur, familiae nominandae sunt et hae familiae, quodammodo similes inter se in turbas vel cohortes genere unico Medusarum subjunctas colligi debent. In hoc enim statu distracto, quo nunc 29 genera Peroniana Medusarum vides, systemati *Linneano* non amplius respondent, ergo in unum reducenda sunt, nec reducendis iis merita Peronii diluuntur, ille enim egregius observator, et quod rei vim tribuit, egregia colligendi occasione et loco praeditus, incredibilem diversissimarum Medusarum copiam ad novae Hollandiae littora legit, easdem brevissime tantum, ut ordini systematico ab auctore invento responderent, descripsit. Sciagraphia *Peronii* monumentum optatissimi incrementi Zoologiae sempiternum manebit, sed plurimas species non ita strenue et ab omni parte perscrutatus est (quod vero perscrutatoribus et peregrinatoribus nauticis, singulari interdum obstaculo impeditis, ut hoc et mihi accidisse contestor, vitio non vertendum est), ut a generalibus ad particularia et specialia corporis interioris pervenisset et oc-

(*) Histoire générale et particulière de tous les animaux qui composent *la famille des Meduses* par MM. *Péron* et *Lesueur*, insérée dans le 14me tome des Annales de Muséum de l'hist. nat. de Paris, in tomo 17. *Deleuzeus Peronii* Biographiam exposuit.

conomiam animalem et mechanismum motuum penitus intrasset vel perspexisset.

A maximo numero specierum quasi perterritus et perturbatus generalia tantum percepit, specierum vero anatomen non aggressus est, igitur nec consensum organicum neque partium internarum structuram intellexit, quod *Gaedio* (*) in *Medusa capillata* optime successit. — Post reditum ab itinere de *Aequorearum* vitae genere earumque functionibus physiologicis nobiscum egregias observationes (**) communicavit, observata reliqua collegit, inter se comparavit, et Medusas, per se quasi secundum tentaculorum et brachiorum nec non orificiorum praesentiam vel defectum et numerum, collocatas in ordinem systematicum disposuit (***). In hoc vero negotio perficiendo auctoritatem vel dignitatem generis maxime naturalis, nullo respectu in dignitatem generis proximorum animalium, distracti et in 29 genera dilacerati, laesit et neglexit.

In eo igitur *a Peronio*, ceterum laude dignissimo, peccatum est, quod limites generis seu legis systematicae egressus sit et officio in describendis et delineandis speciebus novis posito, sed ab eo neglecto, non satisfecerit. Melius fecisset Sciagraphiae Medusarum omnium systematicae auctor, si solas suas novas species exacte et ab omni parte prius perscrutatus esset et earum, quibus nunc caremus, descriptiones completioros et icones nobiscum communicasset, sed proh dolor conspectus totius territorii et ordinis systematici

---

(*) Beyträge zur Anatomie und Physiologie der Medusen von *H. M. Gaede*, mit 2 Kpf. Berlin 1816.

(**) Sur les *Meduses* du *Genre Equorée* par *Péron* et *Lesueur*. Annales du Muséum d'hist. nat. Tome quinzieme, Paris 1810. pag. 41.

(***) Tableau des Charactères génériques et specifiques de toutes les espèces de Meduses connues jusqu' à ce jour pag. 13. tom. XIV. des Annales de Muséum. Divisionis bases in ventriculi et brachiorum et tentaculorum praesentia vel defectu positae sunt; dividuntur inde Medusae in Agastricas et Gastricas monostomes vel polystomes, tentaculatas vel non tentaculatas, brachiatas vel non brachiatas, seu non pedunculatas.

Medusarum suarum ei lubentius arrisit, ac anatome vel analysis singularum, in qua tamen sola conditio rem illustrandi fuisset. Jam cum auctor scientiis et nobis morte nimis praematura ereptus sit, et socius ejusdem *Lesueur*, qui artificiosa manu easdem ad vivum pinxit, icones solas, quas grato animo acciperemus, vix juris publici facere videatur; Medusae vero, saltem plurimae, nullo fere artificio conservari possint, damnum irreparabile inde ortum est, quod non nisi paucis speciebus et a me observatis restitui poterit.

Hoc jam laesionis generum alterum fuit exemplum, plura vero sunt et plura afferre possem peccata et exempla, sed odiosa sunt et de iis taceam, cum mihi de sola dignitate generum tuenda loquendi animus sit. Genera sunt leges vel statuta systematica. Leges non sancire modo sed tueri officium est. Genera vero tuentur, si naturae scrutatores animalia ipsa viva, et anatomici mortua curatius perscrutare vellent non autem ordines et genera nec totum systema. Extravagandi libidine quadam vero nostrum tempus, saltem decennium historiae naturalis notari, non solum Francogallorum systematis novandi studium, sed etiam philosophiae naturalis specimina germanica comprobare videntur. Stabulum si quis construere vellet vel mandram, pecora primum illi tam natura quam numero cognita esse debent. Pecora i. e. animalia omnia per totum naturae universum dispersa, per saeculum ne numero quidem neque minus natura cognoscuntur, attamen multi sunt, qui animalibus hisce natura ac numero ignotis stabulum sat amplum et justum, uti credunt, aedificare student.

Reipublicae cives in satisfaciendis officiis omnino leges coram habeant, non ut examinent vel corrigant, sed observent; male enim reipublicae consultum foret, si cives legum rationes perquirere ad ipsorum mentem corrigere et accommodare vel ipsi legis latores esse vellent. Sic et naturae cognoscendae studiosis non convenit leges, secundum quas natura animalia disposuerit, anxie quaerere, nisi

in animalibus ipsis, vel frustra quaesitas ex ingenii acumine et arbitrio vel vanae gloriae causa constituere.

Nullo dubio subjectum est, quin Zoologi Francogallici recentissimis temporibus vario et expedito rerum naturalium intuitu et accelerato ingressu, in variis historiae naturalis provinciis permulta praestaverint; in his enim eorum merita, in excolendis artibus historiam naturalem adjuvantibus, pictura et sculptura nempe ac anatome prae caeteris inclarescunt, et haud parva iconum egregie pictarum et incisarum (in quibus colorum adumbrationes praeprimis nunquam negligendae et in ipsis laudandae sunt) copia patefacta sunt. Qualia et quanta denique sint merita *Cuvieri* principis Zoologorum Francogalliae, qui anatomes ope Molluscorum classem lubricam et difficilem explicavit et illustravit, neminem fugit, sed nimio eorum novitatis studio, nova genera stabiliendi proclives, animalium classes et ordines naturales, e quibus simplicitatem *Linneanam* removerunt, perturbassè etiam verum est. *Centronia* vel *Actinoda* malacodermata et echinodermata nec non *Myxoda*, in quibus coordinandis *Linnaeus* quidem erravit, injuste, quod alia occasione demonstrabo, ad Zoophyta retulerunt et aequali ratione ac *Linnaeus*, quem Theonino dente rodunt, in dijudicandis animalibus inferioribus gelatinosis, simpliciori organismo et confluentibus organis et functionum physiologicarum confluxu, difficilioribus et lubricis errarunt. In his vero tam arduis et difficilibus, quibus nec sola Anatome nec analogia succurrit, primo aggressu errare humanum est, et errabunt facile omnes nisi animalium viventium observatis adjuti fuerint et conducti; sed magis taxandi sunt illi, qui melius intellexisse putant et in corrigendis antecessorum inventis denuo errant. Anatomen, quam solam Zoologiae praesidio et auxilio esse voluit *Cuvierus*, et ex structurae partium internarum analogia organis ignotis functiones et nomina audaci confidentia assignavit, non ubique solam esse adjutricem, suo damno ex Salpis expertus est, nec in caeteris *Myxodis* simplicioribus, *Medusis* nempe et *Berois* aegrius adhuc quin experturus sit,

dubito. In his enim affinitates et functiones non nisi viventibus cognoscuntur. Ex animalibus viventibus hisce observandis Physiologia colligenda vel ex analysi vel, ubi fieri potest, ex anatome collecta saltem confirmanda est. *Cuvierus* vero anatomen solam Zoologiae legislatricem designare voluit, nec aliam animalium affinitatem, nisi anatome probatam observasse visus est, quia in perfectioribus molluscis, optimo condecoratus successu, anatomes ope affinitates et differentias detexit. Haec vero in *Medusis*, *Berois*, *Physaliis* et *Physsophoris* mucosis perscrutandis denegabit illi propter substantiam solubilem et diffluentem, quod in solidioribus concessit, quamvis eum in superioribus Molluscis favore persecuta sit, qua de causa ab iisdem in eadem via aggressis prorsus abstinere censeo. Idem jam Zoologiam vel *vitae scientiam* ad solam Zootomiam reduxit. Saepe ex altero extremo in alterum contrarium transire solent. Praeteritis temporibus animalia inferiora ex defectu anatomes tantum ignota erant, hodie per solam anatomen cognoscenda sunt. *Linnaeus* in animalibus minus notis plura interdum genera in unico complexus est. Francogalli in contrarium peccant et unum genus in plures distrahunt. Sed haec de tuendo genere egisse sufficiant, ad nostrum *Lacertarum* genus redeamus et quidem ad Geckonum familiam, quae iterum in duas turbas vel Geckonum cohortes, nimirum planicaudatas et tereticaudatas, dividitur. Plures enim Geckonum species tereticaudatas a laticaudatis distinguendas esse, jam *Gmelinus* in *Linaeani* systematis editione decima tertia ex *lacerta vittata*, *Turcica*, *rapicauda Geckone* proprie sic dicto et *Geitje*, inter se comparatis et Geckonum nomine pronunciandis intellexisse videtur; et ex *Sebae* speciebus, in Museo Petropolitano obviis, et pluribus aliis postea accessis hoc idem facillime colligitur. Omnium optime vero et scrupulose satis, celeberrimus *J. G. Schneider*, Systematis Ichthyologiae *Blochiani* editor, de historia Amphibiorum, de historiae naturalis antiquitatibus et lingua Graeca meritissimus, de Geckonum familia antiquorum et recentiorum relationibus illustrata, in Amphibiorum Physiologiae specimine altero suo disseruit.

In specimine priore Amphibiorum Physiologiae (*) auctor idem de Antiquitatibus horum animalium egit, quorum Geckones sub Lacertarum genere militantes, a Graecis *Ascalabotae* et *Galeotae*, Latinis vero *Stelliones* dictae, omnium notissimae, quoniam ubique et omni tempore una cum hominibus in aedibus habitare solebant. Qua de causa et antiquiorum relationes, quibus haud pauca de horum animalium moribus, nutrimentis, veneno et vitae genere continentur, haud spernendae sunt, et liceat ex dicto diligentissimi *Schneideri* libro ea, quae Geckonum familiam ex antiquorum relationibus illustrare valeant, addere et cum recentioribus comparare.

Antiquitates Geckonum, historiam naturalem illorum illustrantes.

Crocodilorum vocabulo Jonico non solum Crocodilus fluviatilis sed et terrestris (**), nobis hodie *Stellio* appellatus, auctore *Linnaeo*, comprehenditur. Quem *Stellionem* dixit *Schneiderus* in versione sua Aristotelis, cum graece *Aristoteles* Ascalaboten vocat, *Linnaeus* vocabulo arabico *Gecko*. Antiquissimorum et recentiorum relata in eo conveniunt, quod Geckonem venenatam esse lacertam consentiant. Reliquae lacertae multo minora veterum diligentiae in his animalibus describendis argumenta habent, si ab Ascalabote discesseris, cujus naturam omnes egregie enarrarunt. Esse vero eum ex genere illo lacertarum, quod lacertum Gecko, Mauritanicam *Linnaei*, multasque alias *Linnaeo* indictas species comprehendit, certissimis rerum argumentis vincam. Hujus vero Ascalabotae, alio nomine etiam Galeotae dictae, naturam accurrate fuisse perspectam antiquis scriptoribus historiae naturalis, non mirabimur, si meminerimus

(*) Amphibiorum Physiologiae specimen primum scripsit *J. G. Schneider* Saxo, Eloquentiae et Philologiae Professor Trajecti ad Viadrum 1790, in 4.

(**) Celeberr. *Blumenbach* in novissima vel nona Compendii ejusdem historiae naturalis editione pag. 247. Scincum Crocodilum terrestrem appellat, *Schneiderus* vero Scincos in historiae Amphibiorum fasciculo secundo, Jenae 1801 edito pag. 171 in peculiari genere complectens *Lacertam Stellionem Linnaei* Crocodilum terrestrem putat.

eum cum hominibus ubique fere habitasse, exuvias ejus ad medicinam fuisse conquisitas, et ex stridóre et reliquo ingenio ejus auguria captasse genus aliquod vatum, quod eodem nomine galeotas appellari solitum referunt *Aelianus* V. H. XII. 46. Ad Siciliam genus hoc vatum referre videtur *Cicero* de divinatione I. 20, ubi ex *Philisto* historico Galeotas interpretes portentorum in Sicilia narrat. Originem nominis multi recentiores auctore *Bocharto* ex hebraico sermone repetunt, cum deberent potius feram galeotam cogitare, a cujus observata natura et ad omnia translata nomen interpretes ipsos nactos fuisse, clarissime patet, ex Pausania VI. p. 455. ubi commemorat statuam vatis Elei Thrasybuli ex celeberrimo apud Graecos Jamidarum genere orti. Haec galeoten seu Geckonem humero dextro adreptantem habebat; ad pedes autem fictus erat canis dissectus et pulmones monstrans apertos, e quibus vaticinari solebant, quemadmodum ex Geckone. Ex eodem loco simul apparet hoc genus interpretum extra Siciliam etiam fuisse in Graecia, nec nomen Stellionis vel Geckonis peculiare Siculis fuisse Galeoten.

In specimine physiologiae Amphybiorum altero *Schneideri* Zyllichoviae 1797. impresso auctor historiam et species Geckonum enumeravit easque in peculiari genere stellionum pertractavit, nomen nempe latinum conservare et arabicum Geckonum removere placuit, caeterum ille Systematis curandi minus quam species et familiam illustrandi sollicitus fuit et lacertarum genus *Linnaei* naturale agnoscens sub genere stellionum nil nisi Geckonum familiam intellexit, ait enim ipse: „Stellionis nomen latinum simplex, graecum varium et multiplex, multis, praeter fabulas de origine poëticas, veneni dolositatisque criminibus, contraque quibusdam etiam divinationis viriumque corporis medicatricum argumentis a scriptoribus graecis et latinis fuit celebratum. Hujus igitur historiam dignam censebam, quam collectis atque invicem comparatis scriptorum veterum testimoniis atque auctoritatibus, diligenter enarrem, cui deinde adjungam e recentiorum scriptorum libris collectam generis hujus specierum singula-

rum notitiam accuratam, unde lectori constare possit, cui animalium reptilium generi stellionis nomen assignari, quocum recentiore nomine comparari, quacunque denique fide veterum scriptorum narrationes de hoc genere animalium censeri debeant.

Antiquissimi scriptoris graeci locus de stellione *Aristophanis* exstat in Nubibus, versu 170 ubi galeotén facit stercus in *Socratis* coelum intuentis faciem de lacunari tecti dejicientem; unde arguitur galeotem (γαλεώτην) mures et parietes usque ad lacunar perrepere solere. Hanc ejus naturam tradit etiam *Dioscorides*, in praefatione ad Alexipharmaca p. 397. ed. Sarac. ubi, ut venenorum noxae caveantur, in tectis diligenter observanda laquearia esse praecipit; saepe enim ex alto animalcula venenata veluti phalangia et ascalabotae decidere et cibos vinumque subjectum inficere. Idem testatur *Marcellus Empiricus* e. 33. p. 277. ed. Cornar. Lacerti, inquit, appellantur, sive stelliones, qui per parietem repunt, curti sunt, quique graece 'Ascalabotae vocantur. „Antipodas terram habitare," ait *Plutarchus* de facie in Luna p. 654. „ὥσπερ θρῖπας ἢ γαλεώτας, id est veluti stelliones, *supinos* scilicet in terra nobis opposita." Geckonem meum in *inferiore* fenestrae horizontalis tecto horizontali navis nostrae insertae facie glaberrima vitrea decurrentem et supine commorantem vidi et eundem in aedibus incolarum vel indigenorum ferocium insulae nostrae plures nostrùm tam in tecto, quam in truncis arundinis bambos horizontali situ dispositis et in superficie inferiore glaberrima et politissima lubricis *supinum* decurrere viderunt. *Aristoteles* (hist. animal. IX. 9.) supinum ait ascalabotem incedere veluti picum sub ramo arboris horizontali descendentem, scilicet per parietes et lacunaria repens muscas atque alia insecta persequitur, quae cibum ei praebere solent.

de cursu supino Geckonum

Hesychius sub voce κωλώτης saltu ait *coloten* muscas capere, Kyranidum auctor graecus stellionem Xylobaten i. est lignorum scansorem et parietum seu toechobaten appellat, scilicet Xylobates vulgari

sermone graeco vocabatur tunc, qui antiquo Calabates et Calabotes, Scalabotes et Ascalabotes dicebatur a ligno sicco quod, graece *κᾶλον* est, et ambulando *βάτης*, *βώτης*. Dum igitur parietes et laquearia supinus perreptat et muscas araneasque captat (araneis enim vesci testatur *Aristoteles* hist. animal. IX. 1.), saepe in cibum potumque subjectum decidit. Vinum atque aquam, cui decidens stellio fuerit immortuus, innoxia homini esse in potu, *Aelianus* asserit (IX. 19.) contra oleum stellionis morte infectum male olere atque eum, qui inde gustaverit, pediculis quasi subito ebullire ait. At *Plinius* 29 sect. 22 e stellionibus malum medicamentum fieri tradit. Nam, inquit, cum immortuus est vino, faciem eorum, qui biberint, lentigine obducit. Ob hoc in unguento necant eum, insidiantes pellicum formae. Remedio est ovi luteum et mel ac nitrum. Cum *Plinio* facit *Avicenna* IV. 6. 2. 5. Caro, inquit stellionis mortificat, et quandoque cadit in vino, cui immoritur et dissolvitur. Hoc qui biberit, vomitu et dolore stomachi vehementer conflictatur. Deinde adversus venenum hoc in cibo aut potu ingestum eadem remedia, quae contra Cantharides commendat. Haec ad illustrandum *Aristophanis* locum dicta abunde sunt. Quo vero rerum natura artificio pedes Geckonum perreptandis parietibus lacunaribusque incessu supino accommodaverit, nemo scriptorum veterum enarrare operae pretium duxit. Observatione autem recentiore constat artificium omne pendere a soli pedum lamellis vel foliis quibusdam succo tenaci ex glandulis aliquot scaturiente, imbutis, quibus facile rebus vel laevissimis, veluti ranae arboreae tuberculis glutinosis soli digitorum adhaerent et quasi agglutinantur. Ex ulteriori disquisitione plantarum Geckonis nostri argyropodis australis et ex lamellarum mobilium argentearum ejusdem perscrutatione inductus, forsan et vacuum spatium a deprimendis lamellis, quae remittendo et progrediendo iterum ascendunt, formari in cujusvis digiti solea, ut et in muscis domesticis, et sic idem hoc adhaesionis scilicet artificium ex alio etiam mechanismo explicari posse censeo.

de Esca Geckonis

de Veneno Geckonis

explicationes incessus supini Geckonum

nomina Geckonum graeca

Antiquitate secundi scriptoris auctoritatem nunc investigabimus. Is enim est *Aristoteles*, cujus loca breviter ponam. Ascalaboten per hiemem conditum latere, exuvias vere ponere, mare foeminam majorem esse tradit eundemque cum reliquis lacertis nominat Hist. animal. VIII. 15. 17. IV. 17. de incessu animal. c. 15. Sed idem Hist. anim. IX. 1. asini inimicum nominat Coloten; dormire enim ait in praesepibus asini, ejusque nares subeuntem impedire quominus cibum capere possit. Κωλώτης idem est, qui ἀσκαλαβώτης, ut Grammatici cum *Plinio* affirmant. Colotis et Lacertis caudas (amputatas) renasci tradit *Plinius* IX. sect. 46. velut ex *Aristotele*; sed is in hist. animal. II. 17. simpliciter lacertas (σαύρας) et serpentes nominat. In Italiae quibusdam locis morsum Ascalabotae letalem esse refert in hist. anim. IX. 1. Auctor narrationum mirabilium c. 160. Siciliam cum Italia, et ipsum stellionem galeoten nominat; praeter ea in Graecia debili esse morsu addit: unde igitur *Plinius* VIII. S. 49. *Theophrastus* auctor est, anguis modo et stelliones senectutem exuere, eamque protinus devorare, praeripientes comitiali morbo remedia. Eosdem mortiferi in Graecia morsus, innoxios esse in Sicilia.

Tertium locum *Nicandri* poëtae auctoritati dabo, cujus haec est brevis stellionis notitia ex Theriacorum vers. 483. et sequentibus a me conversa. Exilis, inquit, *Ascalabi* sunt etiam infesti morsus, quem fama est a Cerere esse conversum cum Triptolemi pueri Metaneirae membra morsu suo laesisset circa puteum Callichorum in attica terra versantis, ubi Metaneira Cererem domo sua exceperet aberrantem et filiam Proserpinam quaerentem.

Ascalaphum nominat in eadem fabula *Ovidius* Metamorphos. V. 440 seqq. consentiens cetera cum *Nicandro*, cujus longiorem ex Metamorphoseon (ipse ἑτεροιούμενα dixerat) libro excerptam narrationem posuit *Antoninus Liberalis* cap. 24. Uterque enim Cererem iratam potionis sibi oblatae reliquias offudisse Ascalapho refert; unde

Ovidius: „*combibit os maculas, et quae modo brachia gessit, crura gerit; cauda est mutatis addita membris; inque brevem formam, ne sit vis magna nocendi, contrahitur, parvaque minor mensura lacerta est; aptumque colori nomen habet, variis stellatus corpore guttis.*“ (Ultimorum horum verborum occasione lectores Geckonis australis mei picturam inspicientes in maculas colore lucidiores, quibus membra adspersa vel guttata sunt, attentiores faciam; antiquorum pictores Solem et Stellas non radiatas, ut recentiores pingunt, sed rotundas vel circulares, ut hodie adeo Sinenses et Japones faciunt, pinxisse videntur.) Eventum his verbis narrat ex *Nicandro Antoninus*: ἐγένετο ποικίλος ἐκ τȣ̃ σώματος ἀσκάλαβος, i. e. et transmutatus est in varium corpore ascalabum vel Geckonem, quem Dii hominesque oderunt; habitat juxta canales in locis cavis (παρ' ὀχετὸν) et quicunque eum occiderit, gratum faciet Cereri.

de corpore Geckonis guttato et inde derivato Stellionis nomine

Ovidii locum de forma stellionis ex tota antiquitate unicum posuit etiam *Isidorus* Orig. XII. 4. Stellio, inquit, de colore nomen habet inditum; est enim tergore *pictus lucentibus guttis in modum stellarum*. Hinc pendet interpretatio loci Pliniani 29. sect. 28. quem totum ponam, annotationibusque aliquot illustrabo. Scorpionibus, inquit, contrarius maxime in vicem stellio traditur, ut visu quoque pavorem iis afferat et torporem frigidi sudoris. Itaque oleo putrefaciunt eum et ita ea vulnera perungunt. Quidam oleo illo spumam *argenteam* decoquunt ad emplastri genus, atque ita illinunt. Hunc Graeci Coloten vocant et Ascalabotem et Galeoten. In Italia non nascitur. Est enim hic plenus lentigine stridoris acerbi, et vescitur, quae omnia a stellionibus nostris aliena sunt. Huc usque *Plinius!* ubi vetustae editiones scriptum habent *herba vescitur.*

de spuma argentea ex lamellis Medicamenta.

At idem *Plinius* XI. s. 26 Chamaeleonum stelliones quodam modo naturam habent rore tantum viventes praeterque araneis. Odium scorpionis et stellionis mutuum commemorat etiam auctor libri de Theriaca ad Pisconem cap. 9. et *Aelianus* VI. 22, unde arguas scorpionem a stellione conquiri ad cibum, velut etiam araneas.

Italicum a graeco vel transmarino stellione pluribus in locis distinguit, ubi medicinas ex animalibus petitas narrat; ita stellionem capsulis inclusum febricitantium capiti subjici libro 30. s. 30 narrat, ubi sect. 18. et 19. stellionem transmarinum (i. e. graecum vel ex calidioribus terris allatum) quasi ab italico diversum nominat. Idem XI. s. 30. magnam, inquit, adversitatem oleo mersis scorpionibus et stellionibus putant esse, innocuis duntaxat iis, qui et ipsi carent sanguine, lacertarum figura. Atque scorpiones in totum nullis nocere, quibus non sit sanguis. Quo in loco vix genus innocuum stellionum intelligere licebit, sed potius scorpiones innocuos dicit *Plinius* stellionibus, qui sanguine carent, lacertarum figura.

de diversis Geckonum speciebus.

Italicum igitur stellionem *Plinius* a graeco non solum morsu innoxio sed stellarum etiam seu guttarum tergoris et stridoris acerbi absentia distinxit. Unde mihi suspicio nata est, intelligi genus Italicum illud ipsum, quod Galliam australem etiam sub nomine Tarentae notum habitat, quodque voce aeque atque omni veneni criminatione carere testatur Gallus *de La Cepède.*

Lacertas cuticulam oculorum cum exuviis deponi recentiorum docuerunt *Fabricius ab aqua pendente* (Oper. anatom. p. 440.) *Klein* (herpetolog. p. 54.) et alii. Sed eam non esse corneae extimam lamellam, sed a cornea interjecta aqua pauca limpida distinctam epidermidem recte asserit cl. *Blumenbach* in specim. 1. quam observationem repetit in *Lichtenbergii* Magazin für das Neueste aus der Physik Vol. V. partis primae pag. 10. De vernatione animalium repentium *Aristoteles* (hist. anim. VIII. 17.). Nonnulla, inquit, animalium, quae latitant certo aliquo tempore et conduntur, *senectutem* dictam exuunt. Hoc vero senectutis nomine appellatur extrema cutis et primi ortus velamentum. Exuunt autem senectutem hanc quorumcunque cutis mollis nec testae instar dura est, veluti testudinis, igitur *Stellio*, Lacertae atque omnium maxime serpentes, vere scilicet cum latebris prodeunt, atque iterum autumno. Ab

de Geckonum vernatione.

oculis primum abscedere senectutem dicunt, deinde a capite exuitur senectus ita, ut tunc caput pallescat, una vero die et nocte tota exuitur senectus a capite usque ad caudam hoc fere modo, ut interior pars convertatur foras, sicuti fit in foetibus, dum involucris secundinarum seu chorio exsolvuntur. Eadem ratione etiam insecta deponunt senectutem.

Exuviarum naturam accuratius investigavit loci *Aristotelici* interpretationem persecutus *Veslingius* (Observation Anatom. p. 223. Obtegitur, inquit, cutis squamea post mensium aliquot decursum cuticula alia, madorem corporis vaporesque ambiente aëre externo densante. Pellucida tota est, squamarumque subditarum ordines eleganti quasi typo repraesentat. Hanc cum perspiratione deinde liberiori officiat, tam verno tempore cum latibulis prorepunt, quam autumnali dum se recondunt, instinctu naturae, inter lapidum vepriumque angustias, a capite eam paullatim invertentes exuunt. Denique pag. 237. in exuviis, inquit, apparet luculenter eam non minus reliquo tempore corpore, quam oculis obduci, non levi tunc visionis impedimento. Exutam cutem a Stellione devorari testatur antiquitas quae animal hoc veluti domesticum diligentissime observasse moresque ejus optime novisse et tradidisse videtur. Has enim exuvias sollicite bestiae velut ex invidia deglutienti eripere et in medicinae usum adhibere solebant. De hac re audiamus *Plinium* libro 30. sect. 27. de comitiali morbo tradentem: Operae, inquit, pretium scire, quomodo praeripiatur Stellioni transmarino, cum exuitur membrana hiberna, alias devoranti eam. Observant cubile ejus aestatibus. Est autem in loricis ostiorum fenestrarumque, aut cameris sepulcrisque; ibi vere incipiente fissis arundinibus textas opponunt casas, quarum angustiis etiam gaudet, eo facilius exuens circumdatum torporem, sed eo relicto non potest remeare. Vetustiorem nunc audiamus *Theophrastum*, cujus verba laudavit *Aelianus* III. 7. Is stellionem ait senectutem postquam exuerit, conversum ex invidia eam devorare statim. Ex narratione *Plinii* argui posse videtur stellionem eadem

Exuviae Geckonum medicamentum.

de Geckonum cubilibus et habitaculis.

qua serpentes ratione rimas angustiasque locorum quaerere, ut senectutem exuat; nec aliter casam arundinaceam potest ingredi, dum exuit, nisi a capite primum exuit. Mirum est corpus spoliatum tantum intumescere dici, ut remeare non possit stellio sed inclusus capiatur. Accedit *Arnobii* testimonium, qui sub simulacrorum cavis nidulari ait.

Gecko apibus vescitur.

Stellionem favos alvearium ingressum depraedari cecinit *Virgilius* Georgic. IV. 243. sed non tam ipsos favos, quam apes peti a stellionibus certum esse puto. *Columella* de re rustica IX. 7. ubi locum Virgilianum repetiit, venenatum nominavit stellionem; *Virgilius* enim non tam certum aliquod genus lacertarum, sed omne earum genus ab alvearibus removeri voluisse videtur; hinc ejusdem libri versu 13 ;, *absint*, inquit, *et picti squalentia terga lacerti pinguibus a stabulis.*

De Geckonum in magicis artibus usu

Praeter medicinas ab exuviis aliisque stellionis partibus petitas, quas enarravit *Plinius*, usum fuisse ejus frequentem in magicis artibus, testantur versus in Oraculo *Hecatae* apud *Eusebium* Praepar. Evang. libr. V. et apud *Nicephorum* Scholiasten Synesii p. 361. ubi est de Stellionibus: ζωοῖσι λεπτοῖσι κατοικιδίοις σκάλαβώταις, i. e. exilibus animalibus domesticis scalabotis seu stellionibus.

de morsu ex saliva venenato

Ad morsus noxam a Nicandro memoratam redeo. Dolor vehemens livorque sequitur morsum, ait *Aetius* c. 12. vel *Paulus Aegineta*. Geckones et Galeotarum nomine appellatos fuisse monui, in eodem interpretando aberravit etiam *Terentius*, ubi in Eunucho Act. 4. scen. 4. colorem mustelinum (a γαλῆ squalus Galeus) ex *Menandri* γαλεώτης γέρων transtulit. De quo errore ita monuit *Donatus:* Ait autem *Menander* stellionem animal, quod lacertae non dissimile est, maculoso corio. Nempe ad id genus coloris facies exprimitur eunuchorum corporis, quia plerique lentiginosi sunt. Ceterum vel ex hac *Donati* annotatione constare potest lentiginem

stellionis a *Plinio* dictam intelligi corium ejus maculosum vel guttatum. Medicamentum ex stellione vino vel unguento immortuo paratum faciem bibentis vel illinentis eadem lentigine obducere auctor est *Plinius*. Debilem morsus noxam praeter auctoritatem scriptoris mirabilium narrationum, *Nicandri*, *Aetii* et *Pauli*, arguit etiam dentium fabrica, postea describenda, nisi forte peculiare salivae venenum in morsu stellionis graeci accesserit, quale in quibusdam speciebus recentiores observationes agnoverunt, idque a gentibus Indiae orientalis collectum adhiberi ad sagittas imbuendas novimus. Stellionatus crimen ab hoc animale translatum vocari apud Romanos testatur etiam *Plinius* 30. c. 10. nullum, inquit, animal fraudulentius invidere homini tradunt; inde stellionum nomen aiunt in maledictum translatum. Tuniculam exuit eodem modo, ut anguis, sed eam ipse devorat: scilicet hominem fraudulentum stellionatorem Romani et certum fraudum genus stellionatum vocabant. Apud *Apulejum* Metam. V. p. 172. Venus de Cupidine suo clandestino Psyches amatore ait: „Quibus modis stellionem istum cohibeam?"

Stellionatus crimen apud Romanos.

Glossae veteres apud *Salmasium* in Homonym. p. 101. ascalaboten interpretantur ἡ κολόσαυρα; quod nomen brevem lacertam significare videtur. Aliae Glossae explicant per vulgare nomen *Samiaminthe*. Simile in Graecia audivit, *Samia mitos*, *Bellonius*. Hodiernum hoc stellionis in Graecia nomen cum proprio Orientis vocabulo *Semamith* comparavit *Bochart* Hierozoic. I. p. 1085, qui duas stellionis species ab Arabibus memorari docuit, alteram majorem *Sammabras*, alteram minorem *Wezga* appellatam. Vocabulum prius leprosum vel Leprae maculis infectam significat; Lepram adeo et venenum Sammabrae assignat *Damir* Arabs. *Alkazuinus* Sammabram ait esse Alwezgo id est Stellionem parvi capitis et longae caudae; et carnem ejus super puncturam Scorpionis positam remedio esse, cum *Damir* Arabe refert. Lepram generari addunt Arabes esu salis, in quo volutatus fuerit, aut mucilaginosum saniem emiserit stellio. Ex quibus argumentis *Bochartus* collegit Arabum

Geckones Arabici.

eorum vires medicae.

Sammabram eundem esse cum Ascalabote graeco, quamquam *Avicenna* eodem vocabulo interdum de vulgari lacerta usus sit.

Colosauris vel Geckonibus brevicaudatis et Gecko noster australis adscribendus erit specie minori *Guezgus* vel *Wezga* proximus. Hodiernum denique nomen, aeque vitiosum ad *Schneideri* mentem, *Gecko* per *Linnaei* auctoritatem obtinuit, etsi quidam scriptores recentiores ipsum hoc nomen Gecko similitudinem stridoris acerbi ab animale interdum editi aliquo modo reddere affirmant. *Linnaeus* in Amoenitat. academ. Vol. I. p. 134 ex *Sebae* auctoritate annotavit „*Nomen huic lacertae datum est ob sonum, quem edit instanti pluvia; tum enim prae gaudio quasi, exclamat Gecko.*“ At sonum ranarum haud absimilem singularem edere in ipsa Arabia annotavit *Hasselquist* (Reise nach Palestina. 8. Rostock 1762. p. 353.). Recentiorum scriptorum, qui stellionis nomen (injuste a *Linnaeo* in Crocodilum terrestrem antiquorum translatum) cum Arabico *Linnaei* Geckonis comparaverint, praeter *Schneiderum*, qui in veterum scriptis omnium optime versatus et recentiorum relationibus ac animalibus denique ipsis comparatis, omne tulit punctum, neminem novi, nisi Italum *Paoli*, cujus librum della religione di Gentili per riguardo ad alcuni animali. Part. III. laudatum legi a cel. *Blumenbach* Compend. hist. nat. p. 267. editionis tertiae, quam tamen notitiam emissam nunc in editione quarta video, qua de causa nescio. Inde forte posuit vir doctissimus Geckonum *Linneanum* venenato pedem lamellatorum succo infamem habitare regnum Neapolitanum. Omnem hanc viri egregii annotationem translatam recepit *Gmeliniana* Systematis editio, Geckonique *Linneano* adjunxit. Ex nona et novissima compendii *Blumenbachiani* editione p. 247. adjectis verbis „Geckonem esse verum *stellionem* vel saurum antiquorum“ auctorem *Schneideri* disquisitiones comprobasse videmus. Idem et omnium primus, Geckones in insulis australis Oceani habitare, loco citato annotavit.

Recentiorum de Geckonibus relationes nec non Character familiae Geckonum.

Quemadmodum in colligenda historia Geckonum ex veterum scriptis, eorumque natura et moribus, in iisdem melius ac latius quam e recentiorum relationibus cognoscenda, *Schneiderum* omnium accuratissimum et classicum auctorem cognoverimus, eodemque modo et diligentia recentiorum scripta perlustrasse et animalia ipsa perscrutasse, eundem videmus et in stabiliendo charactere familiae Geckonum perspicacissimum auctorem habemus.

Recentiorum relata, si *Hasselquistium*, *Houttuynum*, *Perraltum*, *Dodartum*, *Charrasium* et *Schneiderum* ipsum exceperis, pauca, brevia, fugitivo oculo observata et vix ad confirmandas veterum sententias satisfacientia videntur. Anatomes tantum et iconum, etsi non semper naturae fidelium, veteribus palmam praeripiunt recentiores.

Transeamus nunc ad notitias a scriptoribus disciplinae *Linneanae* de hac animalium reptilium, quae Lacertas dicimus, familia proditas. Primus autem *Linnaeus* ipse duos Geckones descripsit, sed reliquis Lacertis immiscuit, nec in propriam sibi cohortem vel separatam familiam redegit, quod satis longo temporis intervallo postea facere ausus est *Jos. Nic. Laurenti* in Synopsi Reptilium edita Viennae Austriae 1768. conatu quidem magnopere laudando sed eventu non satis prospero. Duabus enim a *Linnaeo* descriptis speciebus tertiam adjunxit nomine tenus quidem, sed notis certis nullis distinxit. Tandem in decima tertia Systematis *Linneani* editione a *Gmelino* curata species Geckonum in unum locum congregatae et notis quibusdam indicatae, at essentiale lamellarum in pedibus charactere nondum illustratae sunt. Caput ingens, digiti utrinque membrana aucti subtus eleganter lunato imbricati, aequales, incrassati, apice crassiore subglobosa ungue recurvo *supra* enato, deflexo in tribus Geckonibus jam a *Laurentio* p. 34. notantur cha-

racteres. In his autem observat clarissimus *Schneider*, *Laurentio* adjiciendum esse solum articuli secundi digitorum foliatum vel lamellatum, foliis transversis, aut simplicibus aut divisis et lunulatis, succo glutinoso scaturientibus; denique ungues aut nudi prominentes desuper, aut vagina squamulata tecti, in superiore articuli digitorum secundi parte exstantes, atque infra exsertiles inter lamellas soli divisas. Hos perfoliatos, illos nudos ungues *Schneiderus* nominat. Ani rimam transversam recte notavit *Laurenti* et juste simul habitationem Geckonum in domibus Indiae posuit, at de incessu supino per parietes et lacunaria muscas et arachnidas Scorpiones nempe et araneas consectantis nec non de instrumento, cujus ope superius incedens affigitur solo nempe digitorum lamellato et succoso velut agglutinato nimis tacere eundem *Schneidero* videtur. Aliqui tamen Geckones arbores ascendunt, ibique praedam insectorum captant; plurimi eandem cum homine habitationem frequentant etiam extra Indiam in Europa australi. Etiam noster Gecko australis cum hominibus unâ in casis ex arundinis bambos truncis constructis, cohabitare solet et a feris Insulae Nuckahiwae indigenis *Kaka* dicitur.

Amicissimus Collega *Langsdorf* in Vocabulario Nuckahiwico, quod itinerarii ejusdem parti priori insertum est, pag. 154., Geckonem nostrum sub nomine *Ekaka* tamquam meram Lacertam attulit. Cum vero et ipsi indigeni ab eodem hocce pusillo animalculo sese abjungerent et ejus viciniam fugerent, ejusdem indolem haud lacertae innocentis aequalem nec ab omni veneni suspicione liberatam suspicor.

Altero conamine characteres familiae Geckonum stabiliendi *Houttuynus* (in Actis Vliessing. Vol. X. p. 321.) prodiit, qui *Laurentio* successit et sequentes notas proposuit. Corpus magis humile et latum quam altum, parvis squamulis tectum, caput longum trigonum antice obtusum, collum tenue vel breve, oculos grandes, auricularum tympanum manifestum, ani rimam transversam, pedes bre-

ves, quinque digitis divisos subtus globulos (Kwabben) soli instar gerentes. *Schneidero* admonere placuit, tympanum auricularum in plurimis lacertis manifestum oculis patere; in Sola Chamaeleontum, Scincorum, Tritonum et Salamandrorum familia latere in profunda aurium cavitate, aut cuticula corporis communi obtegi. Pedum digiti antici quaterni adsunt in specie a Gallo de la Cepede descripta. Solum digitorum male globulatum dixit, quod lamellis divisum est. Sed has soli digitorum articuli secundi ne quis satis esse putet ad agnoscendam Geckonum familiam: admonet *Schneiderus*, easdem ab eo repertas esse in lacerta aliqua quam cum descriptione *Linnaei* sola comparatam *principalem* esse existimabat. Hanc scilicet *Linnaeus* digitorum articulos penultimos latiores subtus gerere ait Amoenitat. Academ. Vol. I. p. 286. n°. 11. Per hanc vero lacertam naturam opificem a reliquarum lacertarum forma sensim et gradatim ad Geckonum familiam transitum facere voluisse, suspicari licebit.

Schneiderus, collectis omnium auctorum tam veterum quam recentiorum Geckonum speciebus et ex priorum auctoritate commotus, Geckonis vocabulo remoto, Stellionis nomen familiae restituit et Geckones tredecim sub Stellionum nomine descripsit, et familiae denuo stabilitae non solum tereticaudatas sed etiam laticaudatos vel platyuros subjunxit. Descriptis hisce speciebus ex iis sequentes familiae characteres exposuit: Caput ingens, planum, oculi grandes sphaerici, prominentes, rima pupillae verticali, artus breves utrinque et crassi. Maxillae dentium minutorum, acutorum, introrsum versorum seriem unam utrinque gerunt; lingua lata, crassa, apicem obtusum leviter divisum habet. Corporis tegumentum variae est fabricae; quorundam enim cutis squamulis rotundis scutorum instar contexitur, aliorum squamulis conicis minutis veluti granulata apparet; interdum tota corporis artuumque superficies superior mucronibus in ordinem dispositis horret; modo singuli mucrones vel tubercula in collo vel alibi sparsa conspiciuntur. Anus rima transversa patet. Pori femorales quibusdam desunt. Digiti pedum aucti margini membranacea crenata, quae ipsam digitorum basin aliquatenus

Character familiae Stellionum seu Geckonum.

velut in tryngarum vel avium remipedum genere (*) contexit: articuli secundi digitorum subtus aucti foliis seu lamellis membranaceis vel cutaneis transversis asperis, imbricatis succo glutinoso in quibusdam veneni suspecto scaturientibus vel simplicibus vel sulco medio per longitudinem divisis; ungues curvi vel acuti, extremo articulo additi vel liberi undique prominent, vel in vagina squamata vel granulata conditi super articulo secundo ipso eminent atque infra per sulcum medium lamellarum emergunt, pro lubitu animalis retractiles, ut in genere leonum catorumque. Hinc incessus animalium hujus generis per corpora laevissima, parietes et lacunaria tectorum etiam supinus. Vocem aliis addidit, aliis detraxit rerum natura. Hominem non fugiunt, contra habitationem eandem cum eo frequentant, muscas atque alia insecta captantia; alias arbores, tecta et contignationes domorum ascendunt, hieme in rimis cavisque latitantia. Incessu digitorumque fabrica referri genus hoc videtur ad ranas arboreas, reliquas affinitates in peculiari capite enarrabo.

In *Schneideri* Stellionibus laticaudatis et tereticaudatis (tredecim speciebus Geckonum) *conjunctis*, tam lato et amplo ex artuum brevium, tegumentorum, linguae, dentium etc. notis composito charactere vix indigemus, sed structura pedum lamellatorum et capitis ingentis jam sufficiant, reliquae enim notae ex laticaudatis petitae in teriticaudatis ob varium vitae genus non congruunt. Aquatiles enim et pallustres laticaudati Geckones non una cum homine in tectis vivunt, nec in tractando Geckone australi tereticaudato tantae attentionis dignae sunt. Prima species apud *Schneiderum Stellio Gecko* dicta est Gecko *Linnaei* (**) vel *Hasselquistii* (***), ubi male fe-

---

(*) Speciatim Podiceps cristatus vel Colymbus cristatus propter similem digitorum dilatationem huc referri meretur.

(**) *Linn.* Amoenit. Acad. Vol. I. pag. 133. pollices utrinque ungue carere recte annotavit, at diversam speciem tractasse videtur, quam altero loco ejusdem voluminis p. 292 callis corporis cauda annulata atque unguium absentia distinxit.

(***) In Itinerario jam citato pag. 358 et 357.

mora dicuntur in anterioribus artubus, quae ad posteriora pertinent: praeterea eo vocabulo omnem artuum anteriorum formam male signari *Schneidero* videtur, inepte etiam figura cylindrica ovatae adjungitur in describendis artubus, deinde falso lobulus pedum subtus *longitudinaliter* in lamellas dividi dicitur, sinu etiam longitudinali lobulum distinguente. Lamellae enim seu folia membranacea, soli digitorum sulco per longitudinem diviso, transversae atque imbricatae sibi incumbunt. Ungues in vagina super articulis digitorum secundis latentes vel eminentes in vivis oculos viri docti fugisse videntur. Sed male et injuste etiam *Linnaeum* a *Schneidero* reprehensum fuisse, ex sequentibus verbis videmus: „Longitudo pedum anteriorum non eadem esse potest, quae posteriorum, utpote in hoc et reliquis lacertarum generibus omnibus longiorum.“ Lectores inspiciant solam adjectam figuram picturae meae secundam, in qua Geckonem supinum expansis pedibus longitudine parum diversis videbunt. Habitantem Cairi in Aegypto domos intra et extra oberrantem Geckonem vidit *Hasselquist* de ejusdem veneno memoriae et fide dignissima verba faciens: „Maxime singularis est hujus animalis venenum, quod ex lobulis (scil. intra lamellas) digitorum exhalat; quaerit animalculum loca et quascunque res sale marino imbutas vel tinctas; hoc dum invenit aliquoties supercurrit et currendo venenum post se relinquit maxime noxium. Vidi Cairi mense Junio 1750 puellam et duas foeminas morti propinquas, quae caseum manducaverant recentem salitum in emporio emtum, in quo animalculum hoc venenum deposuerat. Quam acres sint exhalationes digitorum vidi aliquando Cairi, dum animalculum supra manum currebat religiosi cujusdam, qui illud capere voluit, mox per integrum spatium ab animale tactum, oriebantur pustulae minimae cum rubore, calore et parvo dolore, omnino ut illis, qui Urticam tetigerunt. Sonum edit singularem ex gula prodeuntem, Ranarum haud absimilem, quem noctu imprimis percipere licet.“

Equidem simile testimonium et de nostro Australi Geckone afferre possum, quorum alter cum fructibus Musae Paradisiacae Sito-

dii vel Arctocarpos, Coccos nuciferae et Citrullis ex Insula Oceani australis *Nuckahiwa* allatus et per satis longum temporis spatium in latebris navis nostrae et occultis absconditus, sensim in malum ascensus, ibique *Loewensternio* nostro praesente, a nautis nostris manu captus est, hominis manus, qui animalculum coeperat et manu ad me apportaverat, papulis et pruritu, qualem ab urtica contacta novimus, affecta fuit. Fructus plurimi a feris incolis insulae natando afferebantur ac aqua marina imbuti fuerunt, et cum ab *Hasselquistio* certiores facti simus, Salem et Salina sepius a bestiola hacce sanie digitorum infici, quae deinde cum cibis ingesta colicas passiones vehementissimas inferre solet, idem hoc nostris fructibus interdum accidisse suspicor, quorum quotidiano rictu hoc tempore in nonnullis diarhoea sequebatur.

Ad synonyma *Linneana* corrigenda porro *Schneiderus* adjecit: Sed hunc stellionem ab eo, quem hoc primo loco describere volui, plane diversum esse demonstrant lamellae soli digitorum medio sulco divisae, unguiculique absentes vel potius in vagina reconditi et retractiles; cum is, quem nunc intelligi volo, lamellas has integras, nec divisas, unguesque digitorum liberos et nudos, exceptis utrinque pollicibus gerat. Addidit *Linnaeus Bontii* locum de Salamandra indica, quem infra sub nomine stellionis maculati rectius positum reperies. *Bontio* subjunxit *Gronovii* locum Musei II. pag. 78. n°. 53. sed is comparavit cum Salamandra sua (ita enim animalculum vocat) picturam Britanni *Edwards* in tabula 205. inter aves positam, quam eandem ad Lacertam Turcicam Geckonum titulo insertam retulit Gmeliniana Systematis Linneani editio. Igitur *Gronovii* auctoritatem velut dubiam interim omittam, ejusque in locum succedet descriptio *a Polycarpo Erxleben* proposita in Physic. Chemischen Abhandlungen Tom. I. pag. 352., qui pollices muticos recte observavit. Denique *Linnaeus* comparaverat in editione decima *Sebanas* picturas I. tab. 108. fig. 2. 8. postea indicavit tantum figuras 1. 3. 5. quae omnes animal pingunt cute maculosa,

cum scutis rotundis minutis, cauda terete absque verticillis seu annulis et digitis omnibus unguiculatis.

Prima figura in nucha et dorso verrucas eminentes ostendit; quare a *Schneidero* pro stellione sumitur, ungues vero pollicibus ab ipso pictore non satis cauto additos esse idem suspicatur. Reliqua enim forma plane convenit cum hac prima Stellionum specie. Satis accurate descripsit vulgarem Geckonem et pictura bona praeterquam nimis minuta expressit Gallus *de la Cepede* p. 413. Tab. 29. cujus notitiam in brevitatem justam contractam nunc ponam. Caput grande fere triangulare oculos pariter grandes gerit dentes acutos et linguam planam, squamulis minutis vestitam (quae cum a linguae natura plane alienae sint, squamas ad ipsum caput referre liceat). Totum animal verrucis plus minusve eminentibus obsitum est; femora inferius occupat series tuberculorum perforatorum poros vel papillas femorales alii appellant. Post anum utrinque tubercula trina occupant latera. Digitorum Solum occupant squamae transversae ovatae, imbricatim sibi invicem incumbentes, mediae paululum sinuatae, (échancrées) crenatas digitorum margines addita ambit membrana eorumque basin aliquatenus conjungit. Pollices utrinque unguibus carent, quos ceteri digiti gerunt breves curvos et acutos. Cauda teres annulis divisa seu verticillata. Colorem omisit Gallus et reliquam notitiam contexuit locis *Bontii*, *Valentini* et *Hasselquistii* mire invicem permistis atque animali alieno oratione sua accommodare conatus est. Addidit etiam Lacertam Siamensem sub nomine *Tokaje* ab *Ignatii Lojalae* asseclis olim descriptam ad aliam speciem referendam.

Turbas auxit magis quam minuit *Houttuyni* auctoritas, qui primam Geckonum speciem talem descripsit, quam *perlati* nomine appellavit, nulla *Linnaei* facta mentione. Corpus squamatum (?) verrucae obsident, ita, ut majores minoribus cingantur. Caudam conicam, corporis fere longitudine, annulatam, verrucae minutae occu-

pant. Digiti omnes unguiculati sunt, convenire omnes *Sebanas* picturas I. Tab. 198. cum hac forma asserit, quae sane omnes pollices quoque unguibus augent. Quae quidem diversitas non impedit tamen *Gmelinum*, quominus notitiam *Houttuyini* ad Linneanum Geckonem referret, notasque inde exceptas Linneanis admisceret.

Schneideri species prima ex plurimis exemplis ita descripta est. Collum occupant scutula rotunda mucronibus mediis eminentia; ventrem squamae polygonae obsident majores, quam dorsum. Totum corpus supra et ad latera loricatum conspicitur scutulis rotundis crebris, quae perlarum nomine insignare videtur *Houttuyn*. Maxillae superiores squamam primorem labialem sursum versus sequuntur tres aliae minores, quibus utrinque ad latus opposita apparent narium foramina. Digitorum soli lamellae transversae, imbricatae, integrae nec sulco divisae sunt, pollices unguibus carent in hoc et deinceps dicendo bifurcifero et perfoliato stellione, quorum locum in hoc et bifurcifero occupant squamae longae, latae firmiter adhaerentes, nec ipsius articuli finem excedentes. Papillae femorales in medio abdomine utrinque concurrunt, angulumque satis acutum efficiunt. Maxillarum musculos masseteres crassos atque utrinque protuberantes habet hic et perfoliatus stellio, contra in bifurcifero maxillae in loco isto magis tenues et aequales conspiciuntur. Quam diversitatem miratus statim investigare causam coepi, dissectoque exemplo sicco vulgaris hujus stellionis osseam capitis compagem rimatus sum. Tum vero vidi processum Zygomaticum, in lacertis plerisque partibus duabus compositum, quarum una partem orbitae posteriorem concludit, altera cum hac conjuncta et retrorsum protensa processui temporali descendenti et ossi maxillari communi adjungitur, plane ut in cranio Tritonum, Salamandrarum, ranarum et bufonum, deesse in hoc stellione et in perfoliato; contra in bifurcifero eundem adesse et musculos masseteres cum temporalibus compescere atque impedire, quominus tam longe lateque protuberent. Obiter nunc addo os commune maxillare latus anticum expansum atque inflatum gerere in

Observationes anatomicae.

vesicam semi-ovalem tenuissimam et pellucidam, tympano superintenso servientem, cujus pars convexa orbitae concava occipiti obversa est. In nullo autem lacertarum genere, quarum plurimas dissecui, cavitatem tympani tam capacem reperi.

Redeo nunc ad Geckonem ab *Hasselquistio* descriptum quem quominus ad hanc primam speciem referam, impediunt nares tuberculis cinctae, digitorum Soli, lamellae divisae, ungues vel absentes vel in vagina conditi, corpus totum laeve. Contra puncta minime elevata splendentia, per totum dorsum sparsa si velis interpretari squamulas breves conicas, quibus dorsum sit loricatum et veluti granulatum, eam animalis notitiam ad perfoliatum stellionem referre possis. At enim vero foraminula minima per abdomen si poros femorales in abdomine concurrentes interpretari velimus; neque enim ulla alia ratione intelligere possum, quae foramina dicere voluerit, tum vero a Stellione perfoliato plane aliena est haec notitia. Eandem dubitationem attulit Galli *de la Cépède* species altera *Geckotte* dicta, quam ab eo falso cum mauritanico, *Linnaei* Geckone comparatam fuisse infra demonstrabo. Poris enim femoralibus carere et digitorum lamellas unguesque simillima Geckoni habere ait, quod utrum in mauritanicum *Linn.* non convenire reperi. Simillimum Geckoni esse arguas ex Galli oratione, qui difficillime ab eo nullisque aliis notis distingui ait, nisi corpore caudaque crassiore et breviore nec non pororum femoralium absentia. Papillas vel tubercula in corpore nec non caudam mox verticillatam mox non verticillatam transeo. Ceterum animal Gallo descriptum Gallicam Provinciam frequens habitat inter parietinas et in ipsis domibus, vulgoque audit *Tarente*. Apricari in sole amat, loca humida et frigida fugit; hiemem in rimis et inter tegulas latens transigit, numquam sopore sepultus, frigore tantum torpescit. Ceterum incessu et moribus Geckoni simillimus, voce pariter et veneni suspicione omni caret.

Stellionem Siamensem nunc videamus sub homine *Tokai* descriptum a Missionariis Jesuitis, quorum notitia germanico etiam conversa sermone exstat in Tom. III. p. 81. *Perralti, Dodarti* et *Charrasii* Dissert. ad hist. nat. spectantium. Hujus summam primum repetam: Stellio hic *Tockai* vulgo appellatur à sono, quam interdiu etiam saepius usque ad duodecimum numerum continuo repetit. Habitat arbores domosque Indorum, quamquam veneni suspicione damnatus. Longitudo pedem, crassities versus ilea duos et dimidium pollicem paulo excedit, longitudinis partem dimidiam cauda occupat. Corpus superne cuticula granulata et colore rubro coeruleoque variegata undatim tegitur, dorsum multis conicorum mucronum pallide coeruleorum ordinibus per longitudinem positis horret; venter squamatus colore cinereo maculis rubeis crebris sparsis pingitur. Caput ingens fere trigonum juxta colli commissuram lineas 18 latum 13 crassum, medium depressius, rostro obtuso. Oculi grandes protuberant, aurium foramina plusquam digiti latitudine ab oculis remota retrorsum, ovata, diametrum orbitae dimidiam aequant, lingua crassa. Pedum digiti unguibus curtis et acutis armati subtus appositas lamellas seu folia membranacea ovata gerunt, quibus bestia laevissimis corporibus quasi agglutinata haeret. Dissecta cor inter artus priores situm ostendit pericardio inclusum, absque ullo aquae vestigio; pericardium ipsum utrinque alligatum lateribus, obliquo situ ascendit viamque subtus liberam transeunti arteriae asperae relinquit. Infra cor pulmo situs in medio corpore in duos dividitur lobos; jecur a cordis parte latiore et superiore sub pulmone descendit, laterique sinistro corporis lobo sinistro adhaerens ventriculum totum desuper obtegit. Cavitatem thoracis sepimentum membranaceum discriminat. Ventriculus pollices 2 et lineas 10 longus, albus linearum sex intervallo supra pylorum naturam cartilagineam assumit; intestinum duodenum rubeum apparet. Longitudo intestinorum a Pyloro usque ad coecum anfractuosorum pollices 7 lineas 10. aequat, crassities sensim decrescit, densitate tamen eadem servata. Coecum vermiculis intestinalibus setaceis albis tres lineas longis sca-

Anatome Geckonis.

tet. Jecinoris figura pyramidalis lobis duobus longis dividitur, quorum uterque iterum in duas minores lacinias diffinditur. Vesica biliaria colore coeruleo, ovalis convexae jecinoris parti inter medios lobos majores adhaeret. Pulmonis lobi duo pollices 2 lineasque 9 longi membrana tenui, pellucente et vesiculis innumeris aëreis referta constant. Trachea brevis recta, lata diametro lineas duas aequat, annulis firmis densisque cartilagineis composita. Glottis rima longa ad perpendiculum fissa patet. Larynx cum parte superiore tracheae cuticula tenui nigra vestitur, quae eadem totum palatum bestiae obducit. Figura apposita satis elegans digitôrum lamellas membranaceas ovatas integras ostendit unguiculosque omnibus attribuit. Caput ingens non planum sed potius convexum apparet, pupillae rima verticalis; series mucronum in quincuncem positae a collo usque ad caudam extremam nullo verticillorum vel annulorum vestigio, caedem pertingunt artusque omnes occupant. Quare non dubitaverim hunc stellionem pro mauritanico *Linnaei* habere, quocum forma ejus plane convenire videtur. Gallus *le Gentil* in Itinerario (Voyage dans les mers de l'Inde Tom. II. p. 450. monuit hunc stellionem in Insula Manilla ab incolis *Chacone*, ab Hispanis colonis *Toco* vocari; atque hoc posterius vocabulum rectius vocem animalis imitari, quam alterum *Tokaye* vel *Tokkai*. Ceterum hanc eandem stellionis speciem in Insula *Sumatra* frequentem *Cokay* nominat et magnitudine ab altero minore domestica distinguit Britannus *Marsden* pag. 136. vers germ. Utrumque, ait, ab incolis per vocis imitationem aliquam vocari *Tschitschah*. Stelliones autem intelligi docet pedum rugosarum mentio adjecta, reptatusque supinus per lacunaria annotatus. Obiter addo stellionis aliquam speciem in ora Indiae Malabarica *Pali* vocari testante *Gerbett* Relation. Indicar. p. 114. Difficultates et dubia, quae *Schneidero* ex dissentientibus relationibus de cute squamata vel tuberculata vel papillato - granulata oriuntur facillime per observationem in vivis animalibus squamulas raro in conspectum venire, semper vero in exsiccatis, mihi expedire posse videor. Alium denique errorem satis gravem Galli *de la Cépède*, castigare voluit

Schneiderus, quoniam notas Stellionum et Scincorum ab eo confusas esse vidit, scilicet is novam Scinci speciem descripsit et pinxit pag. 378. Tab. 24. sub nomine barbaro *Mabouya*, quam arbores scandere et tecta Indorum, in rimis parietinarum habitare, tempore demum aestivo inde prodire, interdum etiam pluvia instante, quam sono quodam vocis quasi provocet, aliena fide Britanni Sloane II. Tab. 273. fig. 7. et 8. et Gallorum *Dutertre* hist. nat. des Antilles II. p. 315. et *Rochefort* p. 147. refert. Primum miror auctoritatem in hac disputatione advocari Galli *Rochefort*, quippe qui antecessoris *Dutertre* librum satis diligenter totum exscripserit. Hic vero *Dutertre* sub eodem nomine *Mobouya* lacertas duas plane diversas annotavit, quarum una ad scincorum genus pertinet in tabula adjecta picta, quam picturam repetiit cum notitia *Rochefort*. Alteram ait pedis longitudinem non attingere, digitos gerere latos, planos, fine rotundo, unguiculatos. Pictura utrinque ungues quinos ostendit. Hanc arbores domorumque contignationes et tecta scandere, pluviam noctu clamosa voce nunciare, irritatamque assultare hominem narrat. Pictura addita pedum digitorumque stellionum formam satis bene exprimit; corpus maculosum apparet, punctisque in medio dorso obsitum. Cauda corporis longitudinem vix aequat. Prior Scinci notitia paene verbo tenus cum descriptione Britanni *Sloane* convenit nec dubitare nos patitur, intelligi Scincorum genus aliquod, contra alteram pictura addita docet pertinere ad Stellionem insularum Americanarum. Confirmat me Galli *Plumier* auctoritas, cujus inter picturas nondum editas Zoologiae Antillanae plane gemina pictura stellionis Antillani reperitur cum adscripto nomine Lacertae chalcidicae. Hoc tantum mutat triplex Plumeriana delineatio, quod ungues in vagina conditi latent ut in perfoliato stellione; digitorum soli lamellae imbricatae sulco divisae sunt, cauda corpore brevior, ab initio annulata est, infimusque venter late protuberat. Corporis tegumentum pictura nondum absoluta omittit. Eadem tabula Plumeriana numero 142 distincta juxta egregie pictum sistit Scincum auratum Linn. His omnibus perlustratis *Schneiderus* Geckoni proprie sic

dicto sequentem Characterem addidit.

1) *Stellio Gecko dorso scutulis rotundis tecto pedum soli lamellis indivisis, unguiculis nudis pollicibus muticis, poris femoralibus in abdomine concurrentibus*,

ad alteram speciem transeo:

2) *Stellio bifurcifer. Linea alba ab oculis per medium dorsum ultra regionem ani protensa, utrinque furcata, cauda vix corporis longitudine, primori verticillata, extrema annulis albis cincta, superne etiam lineata in fine; corpus supra scutulis crebris guttatum; lamellis digitorum indivisis unguibus nudis, pollicibus muticis; serie pororum femoralium longa utrinque.*

Primam ejus notitiam dedit Index Musei *Linkiani* Lips. Vol. I. p. 68. ubi a linea furcata Lacerta Ypsilon dicitur. Deinde sub nomine Geckonis vittati descripsit et pinxit *Houttuyn* Act. Vliesing. Tom. IX. Tab. 9. Fig. 2. Denique sub *Lacertae Zeylanicae* linea dorsali alba, veluti novam speciem lacertae descripsit et satis bene pinxit *Nau* (Neue Entdeckungen und Beobacht. zur Naturgeschichte Vol. I. p. 254. Tab. 17.) et *Valentinus* in hist. natur. Amboin. p. 284. cujus egregiam notitiam *Houttuynus* omisit, qualem conversam et excerptam ponam. Lacertam is nominat *Pandargs Hagadies*, longam ait esse pollices 10, dimidiam longitudinis partem cauda occupante: dorsi deinde vittam albam furcatam, *caudae* tenuis et *rotundae* fascias albas quinque, unguiculos acutos digitisque additam membranam velut in avibus remipedibus, denticulos acutos, linguam acutam, rostrum a naribus usque rubrum annotat et ipsum animal bene cum Geckone vulgari comparat. Degere dicitur plerumque in frondibus arboris littoralis, quam Belgae *Strand Pantang* vocant. In *Museo Geversiano* p. 11. n°. 39. nominatur: *le Lezard Pandang de Valentin, brun a raye bifurcée blanche, d'Amboine*: male igitur *Boddaert* in Novis Actis Naturae Curiosorum Synonyma.

Vol. VII. pag. 15. hoc animal ad Salamandrarum genus revocare conatus est.

Synon. 3) *Stellio mauritanicus* Linn. *Totus supra mucronibus horrens, cauda fere tota plana, infra squamis latis media tecta, digitorum omnium unguibus nudis, soli lamellis divisis lunatis imbricatis.* Seba Tom. I. t. 198. fig. 2. 6. 7. *Houttuyn* Acta Vliefs. IX. p. 324. n°. 3. *Schneiderus* affirmat, Gallum *de la Cèpède* hanc speciem non vidisse et male alienam cum eadem comparasse affinem vulgari Geckoni, Geckotte dictam ad sequentem speciem referendam.

4) *Stellio perfoliatus* Schneider. *Simillimus Geckoni, diversus absentia scutorum dorsi, pororum femoralium, artubus brevioribus, colore obscuriore, soli digitorum lamellis sulco divisis, unguibus retractilibus, vagina conditis super extremo articulo eminentibus, infraque per lamellarum sulcum emergentibus, pollicibus muticis.*

Geckonem hunc sub nomine Rapicaudae (*Knollstaert*) descripsit primus *Houttuyn* (Act. Vliefsing. Tom. IX. t. 9.) et similem Geckoni ab *Hasselquist* descripto esse ait. Cutem aequaliter baccis seu pernulis (perlas ipse vocat) obsitam et brunneo colore maculatam; soli digitorum folia pectiniformia sulco divisa esse absque unguibus manifestis (naawlyks genageld); caudam ab initio tuberosam, magis deinde rugis obseri quam annulis seu verticillis dividi. Exempla aliquot vidit cauda multa tenuiore et longiore; suum pinxit in Tabula IX. Fig. 1. ubi cauda vix dimidiam corporis totius longitudinem tenet; ibique agnosco in parte superiore digitorum exstantes sed membrana velatos ungues. Color dicitur esse pallidior, quam in vulgari Geckoni, patria assignatur in insulis Americanis. Eundem generi Geckonum servato *rapicaudae* nomine inseruit *Gmelin* eumque ita notavit: *cauda turbinata, auribus concavis.* Sed caudae ab initio tuberosae nota vel falsa est plane et a mutilatione aliqua orta, vel certe variat. *Schneiderus* tria exemplaria hujus

speciei, cujus nomen permutavit, examinandi occasionem habuit, primum exemplum, quod apud *Blochium* inspexit, caudam vulgari Geckoni similem gerebat; corpus squamulis minutis conicis loricatum et veluti granulatum erat absque ullo scutulorum vestigio, quae passim in dorso vulgaris Geckonis, velut etiam Chamaeleonum conspiciuntur; soli digitorum lamellae divisae sulco emittunt pro lubitu animalis ungues vagina granulata tectos et super extremo digitorum articulo eminentes. Pollices mutici erant pedes ipsi vel potius artus utrinque breviores quam in vulgari et bifurcifero stellione; papillae seu pori femorales desunt in hac specie; caudae quatuor primae partes quintae annulis late distantibus incisae ei visuntur. Exemplum alterum Rebeltianum dimidiatam *Blochiani* magnitudinem habuit colore egregie servato, qui supernum corpus cinereum obduxit, brunneo variegatus marmoris instar; infra sordide album videre licebat, oculos coeruleos pupilla ad perpendiculum dividente; cauda verticillorum vel annulorum vestigio carebat, longitudine corpori reliquo aequalis, conica squamulis paulo majoribus obsita, quae infra etiam majores fuere, velut in abdomine etiam reliquorum stellionum. Tertium, Musei Academiae Berolinensis regiae exemplar pallidum absque ullo colore caudam ab initio tenuem deinde subito tuberosam gerebat, plane ut ab Houttuyno satis bene cum toto animalculo pictam vidit. Igitur nomen ineptum *Rapicauda* cum altero *perfoliatus* a natura lamellarum soli digitorum ducto permutavit *Schneider*. *Cepedii Geckotte* nulla alia est species quam haec sola. Eam ille distinguit a vulgari Geckone corpore et cauda breviore sed crassiore et pororum femoralium absentia. Caudam cum aetate crescere in crassitiem, longitudinem vero minui et annulos ejus antea mucronibus eminentes atque horrentes paulatim sensim evanidas fieri ait. In provinciae Gallicae domibus oberrantis nec vocem nec venenum incolae agnoscunt. Synonyma Geckonis perfoliati.

Memoratur denique hoc idem animal a celeberrimo *Hermann* in Commentar. Tabular. affinitat. p. 251. lamellas enim soli digito-

rum sulco divisas annotavit; ungues abesse asserit quidem, verum ex verbis: digitis muticis dorso carinatis suspicatur celeb. *Schneider* ungues in vagina conditos eminuisse super digitorum extremis articulis et visum ejus effugisse. Reliqua certe notitia cum hac specie in omnibus convenit. Quod vero *Cepedii* verba, qui ait, ungues manifestos et conspicuos in Geckotte adesse, non leve, uti cônfitetur, dubium excitaverint, non mirum est, cum nequidem, plures alias species, ut nôster, vel climaticas varietates perfoliata sua subesse suspicatus sit. Videbimus infra, Geckonem australem argyropodem ad perfoliatum Stellionem *Schneideri* referendum esse. Unguium structuram habitaculis accommodatam cum habitaculis ipsis paulo variare aeque ac venenum ex esca Scorpionum aliorumque insectorum venenatorum oriri censeo. In Gallica Provincia Geckottem nullomodo venenatam *Tarantam* audire Gallus narrat *de la Cépède*, idque nomen cum brevi notitia retulit etiam Galli *Papon* itinerar. Provinc. pag. 347. vers. germ. In Italia stellionem Linn. vulgo *Tarantulam* vocari tradit *Cetti* hist. amphib. Sardic. p. 71. Ex narratione Cettiana, Chalcidicam lacertam ab *Imperato* p. 901. breviter notatam et p. 919. satis pingui Minerva pictam stellionem *Linnaei* esse, suspicor. Dicitur locis opacis murorumque rimis habitare, trux aspectu, coloris plumbei, extantibus per universum cristis. Vulgo Tarantulam vocari addit et falso Veterum scriptorum Chalcidicam lacertam esse affirmat.

5) *Stellio Chinensis. Cauda ancipite, digitis omnibus unguiculatis, facie foraminibus pluribus pertusa.* Haec species ab *Osbeckio* in itinerario (Reise nach Ostindien und China, Rostock 1765. 8°. pag. 366. Lacerta Chinensis) descripta cinerea injuste *a Gmelino* in editione Systematis *Linneani* omissa est. Quamvis autem inter parietes tapetibus papyraceis laevissimis tectos reptare et blattis victitare dicitur, tamen Gecko laticaudatus est, quam ob rem ad sequentem speciem *Schneideri* transeamus.

6) *Stellio-sputator, corporis fasciis transversis, brunneis*

vel albis brunneo colore marginatis, squamis nitidis, digitis muticis, cauda tereti, subtus scutorum serie obsita.

Ex Insula S^{ti} Eustachii 1755 in Sueciam transmissum primus descripsit et in tab. IV. fig. 1 — 2. pinxit *Sparrmann* (Nov. Act. Holmiens. Vol. V. pag. 166. vers. germ. Primus notitiae auctor *Acrelius* annotavit Britannicum nomen *Woodslaue* atque haec de moribus addidit: passim oberrare in casis domibusque ligneis, parietesque perreptare; ubi siquis propius adstans inspicere velit bestiolam, facile irritatam hanc spectatorem saliva oris nigra venenata conspuere; quo facto statim locum tactum intumescere; tumorem ipsum illita camphora spirituve vini leniri. Nocte conditam latere. Formam ipsius ita descripsit *Sparmann:* Longitudo corporis duos pollices, caudae $2\frac{1}{4}$ poll. Aequat. Color totius corporis dilute cinereus, cingulis vel maculis brunneis, in quibusdam cingula albicant; brunneo colore marginata. Versus caudam extremam cingula sensim deficiunt aut in maculam magnam brunneam alba utrinque minore cinctam transeunt. Color corporis inferioris cinereus lucidior est. Artus pariter maculae striarumque duarum vestigia pingunt. Squamulis minus acutis corpus tegitur; margines maxillarum majores squamae ambiunt, caudam infra linearum aliquot intervallo ab ano series scutorum occupat a parte posteriore latiorum, margine velut abscissa et leviter sinuata. Lingua oblonga rotunda, magis tenuis quam crassa, fine leviter divisa. Pedum digiti utrinque quini absque unguium vestigio posteriorum pollices a reliquis digitis separati versus corpus reflectuntur. Lamellarum sub digitorum solo nulla fit mentio. Ovum pluribus lacertae exemplis additum ab eadem editum creditur, colore cinereo maculis brunneis nigrisque sparsum, quae varietas in ovis lacertarum mira mihi accidit.

Postea exemplum ex Insula S^{ti} *Dominici* (Haiti) missum duos pollices longum, cujus dimidiam partem longitudinis cauda occupabat, descripsit et pinxit Gallus *de la Cépède* pag. 409. tab. 18.

Squamae omnes splendent, color infra albicans supra gryseus brunneo saturate variegatus. Cingula quatuor brunnei, paene nigri coloris, caput dorsumque occupant, sex similia caudam ambiunt; ejusdem denique coloris limbus circumdat maxillae superioris oram. Aurium foramina non apparent; lingua plana lata, priore parte leviter incisa. Rostri pars superior et vertex capitis albicant, nigris maculis sparsa; artus gryseo albo et nigro colore variantur. Digiti utrinque quini absque unguibus manifestis *subtus* additas habent *squamas* parvas et desinunt in globum vel laminam squamatam (*pelote ou petite plaque écailleuse*) qualem in nulla alia lacerta a se repertam fuisse asserit. Statim tamen genus Stellionum subjungit, cujus has esse notas ait: „*les doigts garnies par dessous des grandes écailles, qui se recouvrent comme les ardoises des toits.*" Tales igitur squamas vel lamellas si voluit intelligere, ut suspicor, nullam potest esse dubium, bestiolam ad genus Stellionum pertinere, cum reliqua forma notas ejus reddere videatur. Alieno etiam generi inseruit hanc speciem *Gmeliniana* Systematis *Linnaei* editio. Similes narrationes de Aspide ptyade venenum spectatoris ori inspuente veterum scriptorum exstant.

7) *Stellio platyurus, cauda supra convexa infra plana, media serie scutorum 50, initio leviter verticillato, lamellis soli digitorum divisis, lunatis et imbricatis, unguibus nudis, corpore aequaliter squamulis conicis loricato, inferioribus majoribus.*

8) *Stellio maculatus* Bontii pag. 52.

Bontius Salamandram Indicam vocat, pedem circiter longam coloris e viridi dilutioris, quem Belgice Seegreen, id est thalassinam vocent, interstinctam maculis rubris, ac si minio tincta esset, capite bufonis, oculis magnis foede protuberantibus. Gecko vocari ait, quia Gecko assiduo sonet, prius edito stridore, qualem picus Martius emittere soleat. Dentes esse acutos fortes; palatum rubrum; digitorum quinis unguiculis acutis firmiter etiam mortuam

adhaerere corporibus. Suspensam a Javanis de cauda evomere saniem; qua collecta incolas sagittas inficere, eamque ob causam bestiam domi alere solere. De sanie ad venenum sagittarum inficiendarum collecta consentit *Valentyn.* p. 294. Tom. III. qui vocem bestiae vesperi exaudire ait similem vocabulo *Gekko.* Corpus cum capite latum, caudam longam esse; corpus variari maculis rubris, flavis, viridibus et nigris. Addit proditam ab aliis narrationem de bestiola hominem aggressa. Geckonis venenum ad inficiendas sagittas a Javanis adhibitum.

Schneiderus picturam stellionis hujus platyuri seculo praeterito extremo in Batavia Indica factam et ab *Andrea Cleyero* ad *Christ. Mentzelium*, Archiatrum Electoris magni *Friderici Wilhelmi* transmissam coram habuit, communicatam a medico Berolinensi *Kurella* in qua coloris varietatem mirandam et scuta dorsi dictis *a Bontio* coloribus picta cum digitis quinque unguiculatis et subtus lamellatis agnovit. Reliquas notas eruent, quibus ipsum animal tractare atque conspicere contigerit.

9) *Stellio phyllurus; corpore supra tuberculato, cauda mucronibus aspera, post initium dilatata, ceterum gracili.*

Hunc primus sub nomine *Lacertae platyurae* cauda depressa plana lanceolata, margine subaculeata, corpore gryseo fusco scabro, unguibus quasi duplicatis, lingua brevi, lata integra seu non forficata, apice autem leniter emarginato descripsit et in tab. III. fig. 2. pinxit *John White* Journal of a Voyage to new South - Wales. London 1790. p. 246. Longitudinem pollicum $4\frac{1}{2}$ habet.

10) *Stellio fimbriatus; corporis superiorem partem ab inferiore distinguente margine membranacea fimbriata, cauda plana, digitorum soli lamellis sulco divisis, unguibus vagina conditis, per sulcum emergentibus.* Tab. X.

Hunc nominavit *Flaccourt* Histoire de Madagascar p. 255. et *Dapper* descript. de l'Afrique p. 458. Primus accurate pinxit, tab. 30. *de la Cépède* pag. 425. Cauda similis est Salamandrae

aquaticae sed horizontaliter plana. Caput planum latum et trigonum longitudine dimidiata trunci, oculi grandes pupilla foramine longo verticali patet. Digiti crassi et breves membrana aliqua invicem juncti adhaerent, subtus lamellas sulco divisas imbricatas gerunt viginti, ungues retractiles, vagina conditi super articulis digitorum extremis eminent, atque infra per lamellarum sulcum expediuntur. Reliqua transeo, cum sit species platyura. In Insula Madagascar frequens habitat arbores et ore aperto, intus glutine quodam oblito insecta captat. Lentus per terram incedit capite cernuo sub angulo obtuso corpori et collo adjuncto. Timorem vanum injicere videtur ignaris incolis incessus bestiae, quae ore aperto trux obviam occurrentibus ire solet.

11) *Stellio tetradactylus praecedenti simillimus, marginis membranaceae absentia digitorumque numero distinguitur.* Hunc primus ex Galli *Bruyeres* notitia secum communicata descripsit sed alieno Salamandrarum generi propter digitorum anticorum numerum inseruit *de la Cépède* pag. 493. Longitudo pedem aequat. habitat eandem cum priore patriam, ubi vulgo *Sarrubé* audit, non minus ab incolis formidatus, quam alter, timore aeque vano. Tempore pluvio et noctu frequentior apparet, quam tempestate sicca aut interdiu, sylvarumque umbras amat.

12) *Stellio Geitje cauda lanceolata palmis tetradactylis.* Hanc notam animalculi veneni crimine condemnati ad Promontorium bonae spei reperti et a *Sparmanno* descripti in Actis Gothenburg. I. pag. 75. picti vero in Tab. V. fig. 1. positam ad Geckones retulit *Gmelin*, vix 3 pollices longum, variegatum, subtus albicantem cauda pedibusque Salamandrinis, veneno et papillis per totum corpus sparsis Geckoni similem dixerunt. Pictura *Edwardsi* tab. 204 a *Linnaeo* laudata pedes latos lamellatos subtus aut reliquam stellionum formam vix repraesentat. Video tamen *Gronovium* Musei II. p. 78. eandem picturam *Edwardsi* ad Salamandram suam retulisse, quam ipsam ad Geckonem suum revocavit *Linnaeus*.

13) *Stellio brasiliensis.*

De hoc *Margraf* histor. Brasil. pag. 238. Lacertulus teres 4 vel 5 digitos longus, venenatus, digitis posticis quatuor; corpus totum hepatici est coloris cum albis notulis, in cauda vero albis lineolis, hinc inde etiam aliquantulum flavi mixtum. Oculi splendentes quasi vitrei. *Piso* autem p. 283. Longus 3 vel 4 digitos - cauda est caeteris latiori et breviori, velocissime movetur praedamque per insidias venatur, totus veneno turget. Uterque nomen ei vernaculum posuit *Carapopēba*. *Schneiderus* recte monet nec ex *Pisonis* nec *Margrafii* relatione nec icone Stellionem agnosci posse; attamen ipse ex alia pictura eundem agnovit. Collectionem scilicet ineditam picturarum Zoologicarum in ipsa Brasilia olim sub auspiciis Principis *Mauritii* delineatarum, quam ex dono egregii Pincipis olim magno Electori *Friderico Guilielmo* datam servat inter pretiosissima cimelia Regia Bibliotheca Berolinensis, ipsi inspicere licebat. Ibi igitur pictura cum nomine *Caropopébi* exstat in folio 413. coloribus aqua dilutis illuminata, quae idem animalculum sistit, pedum utrinque digiti quini unguiculati apparent. Caput ingens cum oculis grandibus et protuberantibus, deinde reliqua corporis forma artusque breves ei persuaserunt, ut crederet stellionis speciem a Pisoni et Margrafio intelligi.

Addere nunc liceat *Geckonem homalocephalum Creveldi* nuperrime ab ipso *Schneidero* in Actis scrutatorum Berolinens. (Magazin der Gesellschaft naturforschender Freunde, Berlin 1890 dritten Jahrganges viertem Quartale p. 266. Tab. VIII.) communicatum, forsan cum *Stellione fimbriato* conjungendum — de quo etiam dicitur: totum corpus squamulis minutis tectum et quasi granulatum conspicitur, praeterea pars capitis, trunci artuumque superior ab inferiore discriminantur *margine membranacea fimbriata.*

14) *Stellio homalocephalus corpore utrinque fimbriato cauda pinnata spathulata, digitis squamis lunaeformibus cristatis imbricatis membrana natatoria junctis.*

Caput oblongum subovatum supra infraque depressum excepta regione supra orbitate paululum fornicata. Rostrum rotundum. Nares parvulae oblongae intermedio ex una parte fere tetragono ex altera parvulo sublunato scutello vicinae. Maxilla superior margine unica inferior et brevior, duplici serie scutorum cataphracta. Anterior capitis pars ad verticem usque verrucis majoribus, reliqua minoribus granulata. Rictus retro oculos fere dehiscens in fine magis elevatus. Dentes in utraque maxilla numerosi minutissimi peracuti. Lingua non nisi anteriore parte libera apice obtuse excisa.

Oris fauciumque interiora papillis tecta. Meatus auditorius bene conspicuus infra et antice membranula plicis crispata non admodum lata, tum latiori et prope angulum maxillae in lobum pendulum desinente. Oculi sat magni a se invicem distantes maxillae angulo proximiores. Pupilla perpendicularis crenata quasi erosa. Collum fere nullum. Corpus superum inferumque depressum poris femoralibus 21 in abdomine concurrentibus, uti in Geckone. Pedes omnes pendadactyli. Digiti membrana natatoria juncti, cristati ad ungues usque imbricati lobati. Unguiculi parvi incurvi peracuti excepto illo subrotundo, qui pollici insidet. Cauda corpus longitudine longe excedens depressa linea a basi ad finem descendente in duas quasi partes divisa ex utroque margine pinnis lobatis supra convexis subtus concavis, decurrentibus tandemque confluentibus spathulata. Tota corporis superficies a dorso usque et caudae extremum lineis quatuor papillis primum minoribus planiusculis cuti tenaciter adhaerentibus a basi caudae ubi magis concurrunt; et ultra majoribus prominulis acuminatisque constantibus insignita. Hae lineae aliis undulantibus aequaliter a se distantibus in dorso, lumbis et cauda decussatae. Corpus totum atque ejus partes modo verrucis, modo papillis, modo squamulis, figura magnitudine digerentibus imbricatis tectus membranisque circum cinctum, quarum maxima sub axilla incipiens et in inguide desinens ex utraque parte relictis pedibus omnibus liberis anteriora corporis a posterioribus separat. Omnes ver-

rucae papillae, squamulae, quibus corpus et extrema et membranae teguntur microscopio punctis minimis conspersa observantur. Color animalis squalide canus.

Lobi capitis hujus Geckonis plicas laxas auriformes illas Lacertae mystaceae *Pallassii* (itinerar. III. p. 702. n°. 36. Tab. V. f. 1.) in memoriam revocant, quae similes lobos formant et a rictu utrinque pendentes, quas appropinquante homine suffuso sanguine in semidiscoideas alulas expandit Lacerta et fuga satis agilis se subducit. Haec et Lacerta pipiens ex monte Bogdo deserti Caspici a *Pallassio* (in Zoograph. Ross. Asiat. III. pag. 27.) descriptae formam et habitum Geckonum prae se ferunt, sed cum auctor lamellas plantarum non respexerit, nondum decisum est, an sint veri Geckones. In eodem hoc casu est Lacerta caudiverbera *Sebae* (Mus. II. t. 103, fig. 2.) et Lacerta principalis *Linnaei* (Amoenit. Acad. I. pag. 286. n°. 11. et Mus. *Friedr. Adolphi* I. pag. 43. quam *Schneiderus* dissecuit et soleas digitorum lamellatas vidit (l. c. p. 37.) nec dubito, quin plures aliae Lacertae, si scrutatores lamellas in solis digitorum tamquam solam et genuinam notam Geckonum curatius inspicere velint, pro Geckonibus agnoscendae sint. Interea tandem ad Geckonem nostrum australem lamellis argenteis distinctum transeamus.

15. *Stellio argyropus; perfoliatus, lamellis argenteis.* Perlustratis nunc omnium Geckonum notis a *Schneidero* omnium optime et summa cum cura indicatis vidimus, Geckonem nostrum ex insula Oceani australis *Nuckahiwa* allatum *perfoliatis Schneideri* adscribendum vel subnumerandum esse, distinguitur enim a Geckone *Linnaei* per absentiam scutorum dorsi, pororum femoralium, artubus brevioribus, colore obscuriore, lamellis sub solearibus digitorum subdivisis argento resplendentibus, unguibus retractilibus, vagina insertis super extremo articulo eminentibus infraque per lamellarum sulcum interdum emergentibus pollicibus muticis vel paulo minoribus, et respondet igitur chractere Stellionis perfoliati. Tab. X.

Descriptio Stellionis vel Geckonis argyropodis ex Insula Nuckahiwa allati.

Tab. XI. Lacerta violaceo-fusca sex ad septem pollicum longa, rapicaudae simillima sed lamellis argenteis soli digitorum ab eadem distincta, in insula *Nuckahiwa* satis frequens casas incolorum perreptans et folia Musae paradisiacae et arundinis bambos, ab indigenis insulae *Kaka* dicta, corpus habet supra violaceo brunneum maculis atrofuscis fasciatum, squamulis papillaribus minimis prominulis granulatum, subtus roseo lividum, caudam teretem versus apicem attenuatam corpore paulo breviorem supra aeque violaceo brunneam fasciis atro fuscis irroratam, subtus pallidam, ad apicem vero obscuriorem, in medio linea longitudinem versus ad apicem usque excurrente interrupta rubente notatam (vid. fig. 2. Tab. X. b.).

Caput ingens planum subrhomboïdeum protensum rostro obtuso, naribus ad apicem rostri. Oculi grandes ad latera capitis distantes palpebris verruculosis clausiles, iride flavo fusca pupilla perpendiculariter fissa coeruleo atra aperti. Rictus oris amplissimus longe retro oculos dehiscens dentibus 60 in utraque maxilla acutissimis armatus. Maxillarum margines scutellati (vid. fig. 2. *a*.). Orbitae margine superiore protuberantes cum callis occipitalibus verticem plagioplateum quadammodo exasperant.

Vertex depressus parum concavus, inaequalis, rugosus juxta orbitas elevatus. Lingua lata obtusiuscula crassiuscula. Aures magnae concavae (fig. 1. *a*) retro fauces et angulum oris longefissi hiantes, tympanum nudum.

Rostrum longum obtusum supra depressum inaequale ad latera anterius eminentiis duabus nares indicantibus terminatum. Maxillae aequales latiusculae arcum semicircularem paulo compressum formantes scutellis oblongis marginatae et margine subserrato cinctae sunt. (fig. 2. *a*) Collum versus nucham plica gemina rugosum, inter maxillae inferioris bifurcationem (vid. fig. 2) parum coarctatum.

Abdomen inflatum ventricosum versus thoracem angustior. Ani apertura transversalis subtus ad basin caudae. Artus breves crassiusculi atro violacei supra coloris maculis lucidioribus guttati subtus pallidiores, roseo lividi, anteriores paulo breviores, posteriores paulo longiores, femora longitudine crurum illis paulo crassiora inferius parum angustiora, crura medio inferiore, parum compressa superiore subteretiuscula. Digiti omnium quatuor pedum figura et numero fere aequales, numero sunt quinque in singulo pede lobati nimirum vel spathuliformes et quasi clavati, supra convexi unguiculis in medio pedunculatis instructi, subtus concavi et lamellati.

Pedes pentadactyli in hocce animalculo omnium partium maxime singulares et mirabilis structurae sunt; et quidem propter digitorum formam et functionem. Planta pedis non singula est, sed quintuplicata-vel rectius dicam: Planta pedis nulla est, sed potius quinque digitorum plantae sunt. Pes non tangit terram, sed animal in digitis incedens, in his solis gerit plantas et hae digitorum plantae omnium partium externarum omnino admiratione et aspectu dignissimae sunt, qua de causa easdem et armato oculo inspexi et pedem a superiore facie (fig. 3) et digitum ab inferiore (fig. 4) lente duplicata auctum delineavi.

Digiti ad basin angustiores extremitate latiores clavati vel dilatati sunt, plantae digitorum singulorum igitur ovatae sunt et subtus planae vel plano concavae, lamellis margaritaceis vel argento resplendentibus transversalibus imbricatae, quorum medio ligamentum (*) intus decurrit ad dirigendum earum situm vel motum, margine crenulato vel serrato cinctae. Margo serratus a squamis ex dorso plantae prominulis formatur. Dorsum digiti cujusvis vel lobuli

(*) Sulcum vocat *Schneiderus*, inde distinxit lamellas integras a lamellis soli digitorum sulco divisis, simulque nexum sulci vel ligamenti cum vagina unguiculi, quam pedunculum unguis musculosum voco, intelexisse videtur.

non minus admirabis, quam inferiorem superficiem, convexum nimirum est et ovatum squamulis tectum, ad marginem squamulae latescunt et prominent, ita, ut marginems erratum efficiant et terram proxime tangant membranulae affixae, forsan ut arctius sese contrahant et spatium, repositis lamellis, vacuum inter fundum et plantam forment. Animalia hae enim in domiciliis ferocium indigenorum insulae et sub tectis eorum oberrantia in facie inferiori laevigata aedium tabulatarum et truncorum politissimorum arundinis Bambos supine incedunt, et aequali dexteritate in fenestrae horizontalis navis nostrae inferiore planitie decurrebant et corporis totius pondus pedibus quasi agglutinatis instar muscae domesticae currendo et commorando tenebant. In planitie vitrea fenestrae et arundinis Bambos truncorum nullum plane muci vel saniei glutinosae relictum vestigium post incessum animalculi reperire potui. Humorem glutinosum interdum e fundo plantae inter lamellas exsudare acrem, verum quidem est, ut in praemissis jam exemplo allato contestatus sum, sed hujus humoris ope pedum digitos currendo agglutinari, ut hoc a *Schneidero* doctissimo explicatum est, valde dubito. An denique humor ex nostri animalculi digitis tam venenatus sit, quam ex Geckonis aegyptiaci vel cairiensis ab indefesso *Hasselquist* egregie descripti (itinerar. pag. 356 358.) mihi non compertum est, venenatum esse, ex solo horrore, quo omnes feroci indigeni bestiolam tamquam immanem et perniciosam pestem fugiebant, suspicatus sum: sed ad dorsi digitorum structuram redeam. E centro dorsi cujusvis digiti ascendit pedunculus musculosus arcum faciens et unguem compressum aduncum in extremitate gerens vel amplectens, quam *Schneiderus* vaginam unguium appellavit. Haec vagina unguium musculosa articulum ultimum digiti ex penultimo lobato ovali et quidem e dorsi centro ejusdem prodeuntem constituit et cum ligamento lamellis affixo, cujus imperio lamellae vel eriguntur vel deprimuntur, intimo cohaerere videtur, dum enim Geckones in laevigatis et glabris planitiebus incedunt, unguibus non utuntur; si vero in fundo scabro et inaequali decurrunt, unguibus ancorae ad instar infictis fundo corpus sustinere

De supino Geckonis nostri incessu.

De lamellarum et unguium mechanismo in Geckonibus perfoliatis.

solent atque igitur ungue ut et ipso digito clavato et lamellato unguem dirigente tamquam retinaculo, catorum in morem, utuntur. Musculi igitur in dorso digiti infixi, quorum imperio pedunculus unguium, musculosus e centro lobi ovalis ortus erigitur, eo tempore quo lamellarum functione utitur, relaxati, videntur contra dum ligamentum lamellarum et plantae margines relaxantur, unguem antrorsum deprimere et fundo infigere valent.

Haec omnia, quae de incessu Geckonum et de lamellarum erigendarum vel deprimendarum usu et functione nec non de unguium adhibendorum auxilio et nexu dixi, lectoribus, figuram tertiam et quartam iconis adspicientibus, clariora erunt, si ligamenti ejusdem, cujus per lamellas in medio decursum pro sulco lamellas dividente habuerunt antecessores, nexum interiorem cum musculis vaginae unguis respicere velint.

Color caeterum in pedibus superiora versus spectatis, ut in toto corpore violaceo brunneus maculis rotundis lucidioribus guttatus, in dorso et capite maculae atrofuscae obscuriores singulae fasciarum forma dorsum et truncum irroratum nebulosum versus latera pallidiorem cingentes, contra in cauda confluunt et continuas fascias formant.

Perfoliati Geckonis nomen in nostram speciem argyropodem praeprimis cadere et quadrare, quisque, qui figuram tertiam iconis inspicere et pedunculum unguiferum vel vaginam unguis e centro digiti lobati, petioli perfoliati instar, emergentem animadvertere velit, intelliget. Nimis splendida caeterum nota est lamellarum argento micantium, ut verear, ne quis novam speciem australem cum alia jam cognita miscere vel in dubium vocare possit. Nihilominus tamen eandem, non ut gloriarer novam et splendidam speciem Geckonum numero attulisse, sed potius, ut *Schneideri* doctissimi et diligentissimi de familia Geckonum illustrata merita in memoriam re-

vocem ac confirmem eiusque consilium, nomen Geckonis ex auctoritate veterum cum stellionis nomine permutandi, renovem, dignari volo. Ex eodem hoc consilio, ut nempe Stelliones vel Geckones non solum tereticaudatos sed etiam laticaudatos exemplo picto illustrarem juxta meum argyropodem, etiam fimbriatum vel homalocephalum Creveldi adjeci.

SUR UNE COCHLIDE DU GOUVERNEMENT DE TWER.

PAR

B. SEWERGUINE.

Présenté à la Conférence le 17 Déc. 1817.

Le territoire du Gouvernement de Twer nous présente un terrein d'alluvion, ou plutôt des sédimens d'un ancien Océan remplis de crustacées petrifiées, dont la plûspart des originaux n'existent plus, où ne se trouvent que dans les mers les plus éloignées, comme je l'ai dejà exposé dans l'apperçû de mon voyage dans l'année 1809.

Le sol en est pour la plûspart ou argilleux, ou calcaire, ou sablonneux, présentant par ci par là des collines, mais de hauteur moyenne qui font la continuation des monts Alaounes. Le tout entrecoupé de lacs plus ou moins étendus.

Les pétrifications que l'on y trouve, sont des Fongites. Trochites, Entrochites, des Astéries, des Chamites, des Ostracites, des Pectunculites, des Anomies, des Madreporites etc. les toutes pour la plûspart silicieuses, rarement calcaires en masses comme concassées et isolées remplissant les plaines, et étant souvent à charge au laboureur qui cultive la terre, et qui en amasse de grands tas pour en debarrasser le champ.

Comme depuis mon voyage, j'ai eu l'occasion par mes correspondances de me procurer un échantillon d'une pétrification, digne d'être notée, par les circonstances particulières qui l'accompagnent, je crois être de mon devoir d'en faire part à l'Académie.

C'est le *Schraubenstein* des Allemands, Helmintolithus Epitonium de *Linnée* selon l'édition de *Gmelin*. Quelques uns l'ont nommée, Pierre Trochléaire. Quant au nom Cochlide, je l'ai emprunté de Pline qui au livre 37 section 74 de son histoire naturelle semble avoir indiqué sous le nom de Cochlis, une production minèrale analogue à la notre.

Tout le monde connoit ce que c'est cette pétrification par sa forme extérieure. C'est-à-dire qu'elle présente un assemblage d'articulations dont la figure est ronde, et qui ressemblent à de petites roues mises l'une sur l'autre, sans pourtant se toucher par les bords qui sont attenués, et le tout réuni par une jointure qui passe par le centre des articulations en formant un cylindre oblong.

Celle qui est le sujet de cette notice est silicieuse rayant le verre. La longueur du cylindre est de plus de deux pouces, et les articulations sont au nombre de vingt-cinq, tandis que l'on n'en a remarqué jusqu'ici qu'au nombre de 8, 10, 15 ou tout au plus vingt, ce qui est encore rare.

Mais ce qui fait la pétrification encore plus remarquable, c'est sa matrice, si je puis m'exprimer ainsi, qui est un silex où elle a été renfermée jadis, et où elle a laissé un trou en forme d'un tuyau, dont elle se laisse facilement dégager.

On remarque dans l'intérieur de ce tuyau des stries parallèles de couleur de nâcre, comme des restes de l'envellope primitif ou de l'écail de l'animal par le quel il y étoit attaché et dont le noyau, la cochlide en queston s'est degagée après que l'envellope a été detruit par le laps du tems.

Sans doute que la masse silicieuse étoit encore dans un état de mollesse, quand elle compris dans son intérieur l'animal dans

son état primitif, et c'est par le gercement de la matière silicieuse qui se contractoit de plus en plus en se durcissant, que le noyau du crustacé s'en est degagé, n'ayant été attaché aux parois du tuyau que par les restes de l'enveloppe ou de l'écail.

C'est à l'espèce des Entrochites qu'ordinairement on rapporte ces sortes de noyaux, quoique toujours leur nature ne soit pas decidée au juste.

Je fais hommage pour le cabinet minéralogique de l'Académie, de l'échantillon décrit ci-dessus.

Il a été trouvé non pas loin des sources de la Wolga dans le district de la ville d'Ostaschkow, ou encore plus décisif près des bords de la Dwina sur les frontières du territoire mentionné.

COLEOPTERA CAPENSIA,

ANTENNARUM CLAVA *SOLIDA* ET *PERFOLIATA*,

COLLECTA, RECENSITA ET DESCRIPTA

A

C. P. THUNBERG.

Conventui exhibuit die 14 Jan. 1818.

Insecta *Coleoptrata* in genere, quae clava antennarum instruuntur solida et perfoliata, plerumque in omni mundi plaga occurrunt minora, minus speciosa, inconspicua et non raro minutissima, licet in naturæ politia et oeconomia non sint minoris momenti, quam alia. Muscis itaque non multum adferunt ornamenti, a peregrinatoribus rarius apportantur, et ab Entomologis multis contemta atque ob exiguitatem saepe neglecta praetereuntur.

Singulare tamen, haec inter, est Genus, *Pausus* dictum, quod Africae tantummodo incola videtur, et clava Antennarum maxime artificiosa adornatur, forsan quoque animalculum nocturnum.

Naturale et facile cognoscendum Genus constituunt numerosae *Coccinellae*, per totum fere globum terrestrem sparsae, omniaque climata amantes. Harum fere semicenturiam alit australis Africes angulus, quarumque species, ante meum in hoc celeberrimum promontorium adventum, omnes ferme erant incognitae.

Cum vero non absque omni fructu esse potest, cujuslibet terrae et regionis cognoscere Faunam, studium imprimis oeconomis utile et commendandum; in hisce parvulis insectis Capensibus examinandis et describendis, facile mihi persuasus sum, operam non omni-

no deperditam fore meam, si non contingat, aliquam inire gratiam apud Entomologiae Studiosos, quibus aureum illud *Plinii* effatum perbene notum:

Nunquam Naturae magis, quam in minimis tota est.

PAUSUS.

P. *lineatus:* fuscus elytris linea nigra. *.
Pausus lineatus. *Thunb.* Act. Stockh. 1781. p. 171. T. 3. f. 4. *Fabric.* Eleut. 2. p. 75.

P. *ruber:* piceus clava antennarum dentata. †.
Pausus ruber. *Thunb.* Act Stockh. 1781. p. 170.

COCCINELLA.

C. *rufa:* flavescens corpore atro. *.
Magnitudine C. *immaculatae* globosa, tota flavescens vel pallide rufa, abdomine solo atro.

C. *pygmaea:* elytris rufis; thoracis punctis duobus abdominisque medio nigris. *.
Inter minores, seu magnitudine Cocc. 2-punctatae, tota supra rufa, globosa, laevis, immaculata exceptis punctis duobus in margine postico tharacis.
Subtus abdominis et pectoris medium nigrum.

C. *simplex:* elytris fulvis: marginibus nigris; thorace immaculato; abdominis medio nigro. *.
Mediocris magnitudinis, globosa, glabra, nitida, tota fulva abdominis medio elytrorumque marginibus atris.

C. *divergens:* elytris flavis: marginibus nigris; thoracis margine postico punctisque disci duobus atris. *.
Coccinellae 5-punctatae magnitudine, supra convexa, laevis, pallide lutea.
Caput flavum oculis nigris.

Thorax flavus: in margine postico lunula oblonga, in disco puncta duo atra.

Elytrorum margines omnes tenuissime atri.

Pectus et abdomen nigra.

Pedes flavi.

C. *cuneata:* elytris flavis: margine nigro; thorace flavo: margine postico maculisque quatuor atris. *.

Mediocris magnitudinis, supra flava corpore atro, laevis.

Caput punctis tribus atris.

Thoracis margo posticus totus ater; in singulo latere punctum atrum et in disco maculae duae cuneiformes, atrae.

Elytra immaculata, margine omni atra, laevia, glabra.

Pectus abdomen et pedes nigri tarsis flavescentibus.

C. *fimbriata:* elytris flavis; marginibus nigris; thoracis margine postico punctis quatuor nigris. *.

Coccinella fimbriata. Dissert. Acad. Vol. 3. pag. 132. T. 7. f. 14. Non. Ins. Spec. I. p. 11. f. 14.

C. *spicïllum:* elytris rufis: marginibus nigris; thorace atro: margine antico et lateribus, disco ocellis duobus flavis. *.

Mediocris magnitudinis, supra tota flava, subtus tota nigra, laevis.

Caput nigrum guttis duabus flavis.

Thorax niger. Margo anticus et laterales flavi; versus marginem anticum in disco ocelli duo flavi.

C. *crucigera:* elytris rufis: marginibus atris; thoracis margine postico lunula, disco cruce, lateribusque punctis nigris. *.

Magnitudine Cocc. 5 - punctatae, rufa, laevis, nitida.

Thorax flavus. In medio dorso crux atra; margo posticus lunula atra notatus; in singulo latere puncta duo parva nigra, quorum posticum obsoletum.

Elytra immaculata margine omni atro.

Abdomen totum atrum.

Pedes rufescentes.

C. *rimata:* elytris sanguineis: maculis duabus suturaque atris. †.
Coccinella limbata. *Fabric.* Eleut: I. p. 359.

C. *trinotata:* elytris rubris hirtis: punctis tribus nigris; capite rubro. *.
Coccinella trinotata. Nov. Ins. Spec. I. p. 11. f. 11. Dissert. Ac. vol. 3. p. 133. t. 7. f. 11.

C. 8-*maculata:* elytris rubris: punctis octo nigris; thorace immaculato. *.
Coccinella 8-maculata. Nov. Ins. Spec. I. p. 13. T. 7. f. 15. Non *Fabric.* Eleut. I. p. 365.

C. *oculata:* elytris rubris: punctis novem nigris; circulo flavo circum oculos. *.
Coccinella oculata. Nov. Ins. Spec. I. p. 14. f. 18.

C. *circularis:* elytris rubris: punctis novem nigris subocellatis. *.
Magnitudine mediocri, convexa, tota rufa elytris punctatis.
Thorax immaculatus uti et abdomen.
Elytra punctata punctis atris novem cinctis circulo pallide lutescenti; 1 versus basin elytri, 2 in medio, 1 ante apicem et 1 commune in ipsa sutura intra apicem.
Pedes omnes et toti rubri.

C. 9-*signata:* elytris rubris: margine punctisque novem atris; thorace bipunctato. *.
Similis C. 9-*maculatae;* differt vero margine externo atro.
Mediocris magnitudinis globosa, rufa.
In thorace versus marginem posticum puncta duo, atra, subconfluentia.
Elytrorum margo exterior, uti et sutura tenuissime atra. Puncta 1 prope basin; 2 in medio, quorum alter cum priori cohaeret; pone medium 1, et intra apicem 1 commune in ipsa sutura.
Abdominis carina atra.
Alae fuscae.

C. *iridea:* elytris rubris: punctis novem nigris ocellaribus. *.
Coccinella iridea. Nov. Ins. Spec. I. p. 14. f. 17.

C. 11-*signata:* elytris rubris: punctis undecim nigris; corpore nigro rufomarginato; thorace immaculato. *.
Differt 1°. a C. 11-*punctata*, quod quadruplo major et thorax immaculatus.
2°. a C. 11-*maculata* margine abdominis undique rufo, et quod quadruplo major.
3°. a C. 11-*notata* margine abdominis rufo.

C. *flavicollis:* elytris sanguineis: punctis decem nigris; thorace flavo. *.
Coccinella flavicollis. Nov. Ins. Spec. I. p. 18. f. 26.

C. *gibba:* elytris rubris: fascia punctisque sex nigris. *.
Coccinella gibba. Nov. Ins. Spec. I. p. 13. f. 14.

C. *capensis:* elytris rubris: punctis duodecim nigris; thorace immaculato. *.
Coccinella capensis. Novae Insect. Spec. I. p. 16. f. 21.
Coccinella chrysomelina. *Fabric.* Eleut. I. p. 368.
Pectus atrum.
Maculae elytrorum magnae, rotundae.
Variat glabra et pubescens.

C. *borealis:* elytris rufis: punctis duodecim nigris; thorace quadripunctato. *.
Coccinella borealis. Nov. Ins. Spec. I. pag. 15. f. 20. *Fabric.* Eleuterat. I. p. 368.

C. *variegata:* elytris flavis: punctis duodecim fasciaque media nigris. †.
Coccinella variegata. *Fabric.* Eleut. I. p. 368.

C. 12-*maculata:* elytris rufis: punctis duodecim nigris minutis distinctis. *.
Mediae magnitudinis, et C. *capensi*, cui similis, plus duplo minor.

Tota rufa thorace immaculato.

Elytra convexa, tribus punctorum rotundorum et parvorum paribus notata, quorum par ultimum obliquum.

C. *Caffra:* elytris luteis: fasciis duabus dorsalibus sinuatis punctisque sex nigris; thorace atro biguttato. *.

Coccinella rivularis. *Fabric.* Eleut. I. p. 361 ?

C. *distincta:* elytris rubris: punctis sedecim nigris distinctis. *.

Coccinella distincta. Nov. Ins. Spec. I. p. 17. f. 23.

C. *crux:* elytris flavis: lineis duabus cruceque nigris. *.

Coccinella crux. Nov. Ins. Spec. I. p. 20. f. 29.

C. *lunata:* elytris flavis: fasciis duabus arcu punctisque quinque nigris. *.

Coccinilla lunata. Nov. Ins. Spec. I. p. 19. f. 28.

C. *lineata:* elytris rubris: margine omni maculisque duabus oblongis nigris. *.

Coccinella lineata. Nov. Ins. Spec. I. p. 21. f. 31.

Coccinella striata. *Fabric.* Eleut. I. p. 360.

C. *comma:* elytris flavis - sutura margine lineaque nigris. *.

Coccinella comma. Nov. Insect. Spec. I. p. 20. f. 30.

C. *psi:* elytris flavis: margine externo maculis quatuor nigris. *.

Coccinella psi. Nov. Ins. Spec. I. p. 13. f. 16.

C. *repanda:* elytris flavis: fasciis tribus undatis nigris. *.

Coccinella repanda. Nov. Ins. Spec. I. p. 18. f. 25.

Coccinella tricincta. *Fabric.* Eleut. I. p. 361.

C. *flexuosa:* elytris rubris: fasciis duabus punctisque duobus nigris. *.

Coccinella flexuosa. Nov. Ins. Spec. I. p. 17. f. 24.

Coccinella bifasciata. *Fabric.* Eleut. I. p. 363.

C. *undata:* elytris luteis: fascia flexuosa punctisque duobus nigris; thorace flavo punctato. †.
Coccinella undata. *Fabric.* Eleut. I. p. 362.

C. *undulata:* elytris rubris: fasciis undatis dentatisque variis nigris. *.
Coccinella undulata. Nov. Ins. Spec. I. p. 18. f. 27.

C. *flavipes:* elytris nigris; thorace nigro: maculis duabus flavis. *.
Coccinella flavipes. Nov. Ins. Spec. I. p. 21.

C. *minima:* atra immaculata. *.
Pulicis minimi vix magnitudine, tota supra infraque atra, immaculata.
Similis C. *morio* seu Anthreno *atro* Mus. Upsal. sed quadruple minor.

C. *pulicaris:* atro capite elytrisque postice flavis. *.
Pulicis vix magnitudine, tota atra, capite antennis elytrisque postice a medio ad apicem flavis.
Pedes rufescentes.

C. *oblongata:* elytris atris: maculis transversis rubris; thorace utrinque macula marginali rufa. *.
Magnitudo et summa similitudo C. *oculatae;* differt vero macula transversa elytrorum non orbiculari, sed oblonga, versus marginem externum latior.

C. *rivosa:* elytris nigris: lunulis sex pustulisque quatuor rubris. *.
Coccinella rivosa. Nov. Ins. Spec. I. p. 22. f. 33.
Coccinella lunata. *Fabric.* Eleut. I. p. 384.
Habitat in Capite bonae spei et in India orientali.

C. *hirta:* elytris nigris: maculis duodecim rubris. *.
Coccinella hirta. Nov. Ins. Spec. I. p. 23. f. 35.

C. 10-*pustulata:* elytris nigris: pustulis decem fulvis. *.
Coccinella 10-pustulata. *Linn.* Syst. Animal. I. p. 585.
Fabric. Eleuter. I. p. 384.

Corpus magnitudine C. 7 - *punctatae*, convexum, glabrum.

Caput flavum oculis nigris.

Thorax niger, glaberrimus, margine antico angulisque anticis flavis.

Elytra marginata, nigra, glaberrima. Maculae decem fulvae: in singulo 1 ad basin lunata margine flavescente, cruribus postica spectantibus; 1 in margine exteriori ad apicem lunata cruribus antrorsum versis; 1 pone medium elytri etiam lunata cruribus postica spectantibus. Praeter has duae maculae rotundae, altera in medio elytro et altera versus suturam.

Pectus et abdomen nigra, glabra, plana marginibus rufis.

Femora antica basi nigra tibiis flavescentibus.

Pedes postici toti nigri.

C. *pardalina*: elytris nigris: punctis decem margineque sinuato-albis. †.

Coccinella pardalina. *Fabric.* Eleut. I. p. 386.

C. 12 - *verrucata*: elytris nigris: lunulis duabus baseos pustulisque decem rubris. †.

Coccinella 12 - verrucata. *Fabric.* Eleut. I. p. 385.

C. 20 - *pustulata*: elytris nigris: pustulis viginti fulvis. *.

Coccinella 20 - pustulata. Nov. Ins. Spec. I. p. 24. f. 36.

An Coccinella canina? *Fabric.* Eleut. I. 387.

C. *atrata*: elytris atris: guttis quatuor flavis; capite thoraceque duabus. *.

Pulicis magnitudine, globosa, atra.

Capitis guttulae duae et in margine thoracis gutta utrinque flava.

Elytrorum macula anterior major.

C. *dentata*: elytris nigris: margine externo linea tridentata punctisque sex flavis. *.

Coccinella dentata. Nov. Ins. Spec. I. p. 23. f. 34.

ANTHRENUS.

A. *obscurus:* supra fuscus puncto elytrorum marginali, subtus cinereus. *.
Anthrenus obscurus. Act. Societ. Litter. Upsal. vol. 7.

A. *cinereus:* cinereus, tomentosus punctis thoracis quatuor atomisque elytrorum fuscis. *.
Anthrenus cinereus. Act. Upsal. vol. 7.

A. *irroratus:* fuscus elytris apice fasciisque quatuor albis. *.
Anthrenus irroratus. Act. Upsal. vol. 7.

A. *bifasciatus:* ater elytris punctis fasciisque duabus albis; thorace multipunctato. *.
Anthrenus bifasciatus. Act. Upsal. vol. 7.

A. *pustúlatus:* ater, pubescens elytris maculis decem rubris. *.
Anthrenus pustulatus. Act. Upsal. vol. 7.

HISTER.

H. *major:* elytris substriatis; thoracis marginibus ciliatis. *.
Hister major. *Fabric.* Eleut. I. p. 83.

H. *cyaneus:* thorace aeneo, elytris coerulescentibus. *.
Hister cyaneus. *Fabric.* Eleuterat. I. p. 86.

DERMESTES.

D. *marginatus:* niger thoracis lateribus pectore incisurisque abdominis albis. *.
Dermestes marginatus. Nov. Ins. Spec. P. I. p. 7. f. 6.
Dermestes vulpinus. *Fabric.* Eleuter. I. p. 229.

D. *piceus:* totus ferrugineus elytris striatis. *.
Dermestes piceus. Nov. Ins. Spec. I. p. 8.
Dermestes felinus? *Fabric.* Eleut. I. p. 314.

D. *bifasciatus:* niger elytris fasciis binis undulatis luteis; thorace cinereo-tessellato. *.
Dermestes bifasciatus. Nov. Ins. Spec. I. p. 6. f. 2.

BRACHYPTERUS.

B. *capensis:* ater pedibus piceis. *.
Magnitudine pediculi, totus ater, laevis, pedibus solis piceis, paulo pallidioribus.
Elytra abdomine duplo fere breviora.

CORYNETES.

C. *rufipes:* hirtus, violaceus pedibus rufis. *.
Anobium rufipes. Nov. Ins. Spec. I. 10.
Dermestes rufipes. *Fabric.* Entomol. Syst. I. p. 230.
Corynetes rufipes. *Fabric.* Eleuterat. I. p. 286.

C. *ruficollis:* hirtus, violaceus thorace basi elytrorum pedibusque rufis. *.
Anobium ruficolle. Nov. Ins. Spec. I. p. 8. f. 7.
Corynetes ruficollis. *Fabric.* Eleut. I. p. 286.

SPHAERIDIUM.

S. *scapulare:* atrum elytris basi rufis. *.
Nitidula humeralis. *Fabric.* Eleut. I. p. 354.
Magnitudine Sp. *haemorrhoidalis*, totum atrum, glabrum, humeris elytrorum seu basi latere externo macula magna rufa.

S. *carbonarium:* atrum totum elytris tenuissime striatis. *.
Magnitudine et statura Sp. *atri*, sed totum aterrimum, nec piceum, laeve, glabrum elytris vix manifeste striatis.
Pedes parum picei.

BOSTRICHUS.

B. *typographus:* pilosus, testaceus elytris stryatis praemorso-retusis dentatis. *.
Bostrichus typographus. *Fabric.* Eleut. II. p. 385.
Totus fusco-ferrugineus.

Antennae subfissiles clava triarticulata.
Caput inflexum, nigrum collo rufo.
Thorax gibbus, aculeato - muricatus.
Scutellum nullum.
Elytra cylindrica, praemorsa, dentata, punctatissima, vix striata.
Tibiae spinosae. *Femora* crassiuscula.

HYDROPHILUS.

H. *gibbus:* globosus, ater elytris laevibus; oculis glaucis. *.
Habitat in Capite bonae spei et in Brasilia.
Magnitudine Hydroph. *orbicularis*, subglobosus; totus ater, glaber, nitidus, laevissimus, oculis solis glaucis.
Elytra corpus includentia.
Obs. Hydrophili genus pertinere ad insecta antennis perfoliatis, nec clava solida, verum triarticulata.

MEGATOMA.

M. *bifasciata:* nigra, nitida elytris laevibus: fascia duplici rubra undata. *.
Anobium bifasciatum. Nov. Ins. Spec. Diss. I. d. 9. fig. 9.

CLERUS.

C. *aethiopicus:* coeruleus elytris fasciis duabus albis. *.
Anobium capense: Nov. Ins. Spec. Diss. I. p. 9. fig. 8.

DE RUMAENZOVITE, FOSSILI FENNICO NOVO, DISQUISITIO.

A

N. NORDENSKIÖLD.

Conventui exhibuit die 10 Junii 1818.

Fossile, cujus a me peractam disquisitionem examini Imperialis Academiae Scientiarum jam audeo subjicere, in Fennia occurrit ad Stratum Calcareum Kulla in Paroecia Kimitto, quae ab urbe Aboa quinto distat milliario Svecano, situm. Licet ad Granatorum ordinem hoc pertineat fossile, diversum tamen est prorsus et distinctum ab omnibus hucusque quantum quidem scio, examinatis granatis. Novae itaque speciei novum additurus nomen, non potui quin, meae in Summum Scientiarum physicarum protectorem, Excellentissimum Dominum, Comitem Illustrissimum *Nicolaum Rumaenzoff*, indulgens pietati, ipsam nomine insignirem *Rumaenzovitae*. — Stratum ad Kulla, unde ab antiquis inde temporibus lapides effracti sunt calcarei, atque ad officinam massariam (Hohe Ofen) ad Dal adhibiti, in diem prominens pars est venae calcareae secundum oram Fennicam porrectae, in Paroeciis Pargas et Kimitto praecipue conspicuae. Directio ejus est inter plagas O N O et W S W. Stratum porro est erectum, a perpendiculo non ultra 15 aut 20 gradus deflectens. Crassitiem nonnisi aliquot habet perticarum. Saxum, utroque latere, griseo constat Gneiso, ejus, quod hisce in locis vulgare est, indolis. Lapis calcareus, qui heic occurrit primaevus est, opacae istius, confusae et tenuae spathosae texturae, colorisque albi, cum flavis atque griseis variationibus, quae quidem, venularum instar, Stratum permeant. *Rumaenzovites* uti interjacens, quam Salband appellant, materies, inter Gneisum et Calcem inspersa reperitur, ea Strati parte, quae ad meridiem vergit; adestque prae-

praeterea in minoribus Gneisi per Stratum calcareum extensionibus. Concreta adeo est cum Gneiso, ut utriusque formatio uno eodemque prorsus facta esse videatur tempore.

A. *Descriptio Mineralogica.*

Colorem Fossile nostrum habet brunum; partim flavescenti-brunum, partim nigrescenti-brunum, fractumque ad magnam similitudinem accedit resinae.

Fossile hocce forma obvenit compacta (derb) interdumque conspicuum est optime formatis superficiebus crystallinis, quae ad regulare Rhomboïdale dodecaëdron, marginibus lateralibus abscissis, pertinere videntur. Raro nonnisi una reperitur complete formata superficies, cui adjunctae sunt partes ceterarum, quae in illam angulo inclinant 120 graduum. Vulgo conspicuum est Fossile singularis indolis crystallinis meatuum superficiebus, quae in apicem sese conformant pyramidalem striataeque sunt transversaliter. Apices istae pyramidales carent forma constante, neque, quod ad meatus fossilis, quid habent determinati.

Meatus lamellarum duo esse videntur; quorum unus valde est occultus, neque visibilis nisi per rimas, quae in minera occurrunt. In se inclinant hi angulo fere 90 graduum.

Fractura est festucosa, tenui-conchaeformis. Partes fractae absque forma determinata, marginibus acutis.

Superficies crystallinae clare, speculi instar, nitent. Crystallinae meatuum superficies, partim nitent, partim nitoris fere expertes sunt vel cereum habent illum. Fractura gaudet nitore, qui inter illum vitri ac resinae est.

Laminae tenuiores maxime sunt pellucidae.

Minera porro est fragilis, neque difficilis divisu; dura, scintillat vi chalybis. Radit vitrum et Spathum scintillans, at ipsa scalpitur a Quarzo.

Gravitas specifica est 3,6096, in temperatura (Celsii adhibito Thermometro) + 16 graduum.

Pulvis est albescenti - flavescens.

B. *Experimenta ad Tubum ferruminatorium.*

Fragmentum *Rumaenzovitae* per se a flamma exteriori non mutatur, nisi quod aliquantum albescat, rimisque tenuibus in multae euntibus directiones, adficiatur; interiori admotum flammae, absqus fervescentia, in guttam colliquescit vitream, quae, si subito et evitato contactu fuliginis fuerit liquefacta, lapidis servat colorem atque pelluciditatem; alioquin atra fere fit.

Frustulum parum a subcarbonate sodae afficitur, superficies tamen albida fit, aspectu vitrea; pulvis autem in flavescens atque pellucidum colliquescit vitrum.

A subborate sodae satis tarde parvaque quantitate solvitur, si vel in pulverem redactus fuerit lapis. Primum evanescit lapidis color. Gutta deinde, conveniente temperatura, lactescit; refrigescens autem clara fit et flavescenti - bruna; ubi vero perfecte refrixerit, colorem accipit viridescenti - nigriscentem. Nitrate potassae adhibito, nullum plane vestigium proditur Mangani.

A Sale Microcosmico solvitur, at valde exigua quantitate, in pulverem licet contusus. Vitrum refrigescens flavescentem accipit colorem; deinde autem plane fit clarum. — Nimia addita pulveris lapidis quantitate, natare reperitur in vitro massa quaedam alba nondum soluta, cujus portio si magna fuerit, gutta, frigida facta, alba fit et opaca.

C. *Disquisitio Analytica.*

E praeliminaribus experimentis cum patuisset, in Fossili contineri terram Siliceam, Alumineam, Calcaream et Ferrum oxidatum, aliquibus simul deprehensis vestigiis Mangani et Magnesiae, sequentem aggressi sumus Analysin:

a) Bene contritus lotusque pulvis, ponderis 5 grammarum, quadruplo addito sui ponderis subcarbonate potassae in cochleari platineo eo, quo rubuit, caloris gradu sesqui-alteram horam comburebatur. Massa ignita intense erat viridis, concreta et bullis plena. Solvebatur deinde haec in acido muriatico, aqua diluto; flocci aliquot, decompositi aperte pulveris, insoluti remanserunt, adhibita licet fuerit abundantia acidi. Solutio una cum ista in acido muriatico non soluta terra silicea, usque ad siccitatem evaporabatur. Massa salina, concreta albescenti-flava, in aqua, cui admixtum fuit acidum muriaticum, iterum soluta terram siliceam insolutam reliquit quae in filtro collecta, nova aquae copia perluta et siccata atque ignita ponderis fuit 2,050 grammarum. Fuit haec niveo-alba et, factis solitis experimentis, naturam prodidit terrae Siliceae, omnino purae.

b) Aqua, qua terra erat perluta silicea, decoquendo usque ad $\frac{3}{4}$ inspissata, affundebatur solutioni, quam jam ope Ammoniacae causticae, minima, qua fieri potuit, abundantia adhibitae, praecipitatum fuit albido-flavum, valdeque spatiosum. Colligebatur hoc mox in filtro, fervidaque aqua perluebatur, ne quae in solutione residua fuit, terra calcarea, acido afficeretur carbonico.

c) Ut jam e praecipitato, quod a calce immune erat, magnesia et mangani oxidum separarentur, solvebatur illud iterum in acido muriatico, commiscebatur cum muriate ammoniaco ac praecipitabatur ope subcarbonatis ammoniaci. Quod hinc obtinebatur praecipitatum, postquam una cum solutione per aliquod tempus in vase inclusum jacuerat, obturato, in filtro collectum bene perluebatur.

d) Quod in solutione *b*) liquamen filtrum pertransierat ope Oxalatis Ammoniaci praecipitabatur, locoque calido aliquod tempus retinebatur. Praecipitatum hocce lacteo-album, bene perlutum atque siccatum, ignitum est in cochleari platineo, ponderisque fuit 2,191 grammarum. Superfundebatur jam huic subcarbonas ammoniacus et siccabatur; unde pondus solum 0,004 gr. ipsi accessit.

Haecce 2, 195 grammae subcarbonatis calcarei 1, 238 gr. puram calcaream continent terram.

e) In *c*) et *d*) obtenti liquores, quorum utrumque Magnesiam et Manganum continere suspicare licuit, una commiscebantur, et ad siccitatem concocti, in cochleari platineo, gradu adhibito ignis leniori, comburebantur, usque quo exhalare desiverunt Muriatis Ammoniaci vapores. Quae remansit, massa salina cum valde diluta subcarbonatis potassae solutione digerebatur; brunescens quaedam terra insoluta remansit, quae, facta ignitione, colorem accepit nigrescenti-brunum, ponderisque fuit 0,058 gr. Haec massa iterum in concentrato acido muriatico soluta reliquit 0,012 gr. terram Siliceam. Solutae 46. milligrammae continebant circiter $\frac{1}{3}$ Magnesiam et $\frac{2}{3}$ Oxidum manganicum.

f) Ferri et Aluminae praecipitatum in *e*) solvebatur iterum in acido muriatico, admixta huic parva portione acidi nitrici, cum quo per horulam digerebatur, ut summo, qui obtinere posset, gradu oxidaretur omne, quod praesens esset ferrum. Solutio deinde, addito ammoniaca caustica, ad neutralisationem ea cura redigebatur ut, facta digestione, parva portio oxidi ferrici praecipitaretur. Diluebatur tum solutio cum magna aquae copia, et praecipitabatur ope succinatis ammoniaci. Praecipitatum obtinebatur brunum, quod ignitum dedit 0,351 grammas oxidi ferrici. Alumina ope ammoniacae causticae praecipitata et ignita, ponderis fuit 1.204 gr. Fuit haec alba et in Foco tubi ferruminatorii, addita gutta solutionis nitratis Coboltici, colorem ostendit coeruleum, qui ne minimum quidem in rubrum vergebat. unde nullam admixtionem habuit Magnesiae.

g) Ut exploraretur an et quatenus contineret lapis volatiles in igne partes; horam unam, calore ad plenam usque rubescentiam adaucto, urebantur frustula lapidis 16.23 grammarum; quo facto,

haec 0,148 grammae seu 0,91 pro quoque centum, partes e suo pondere amiserunt. Lapidis frustula albida sunt facta, et in majoribus rimis, valde tenues comparuerunt albae membranulae, antea non visibiles. Constabant haecce sine dubio e calce, non nisi exiguam et negligendam efficiente partem ponderis totius lapidis.

Analysis itaque praebuit nobis:

			In centum pondio.
Terram Siliceam	(*a*)	2,050	} - - 41,24.
	(*e*)	0,012	
- - Calcaream	(*d*)	1,238	- - 24,76.
- - Alumineam	(*f*)	1,204	- - 24,08.
Oxidum Ferricum	(*f*)	0,351	- - 7,02.
Magnesiam et Mangan.	(*e*)	0,046	- - 0,92.
Partes Volatiles	(*g*)	et	
Facturam - - -		- -	- 1,98.

Neque Magnesia neque Oxidum Manganicum ad Fossilis chemicam constitutionem pertinere videntur. Oxygenium Terrae Calcareae et illud Oxidi ferrici eadem sunt inter se ratione ac numeri 3 et 1 respective sumti. Oxygenii in Alumina ad illud in oxido ferrico ratio est ut 5 : 1; ac denique oxygenium in Terra Silicea et illud in Oxido ferrico rationem sequuntur eandem ac numeri 9 et 1 respective. Formula itaque minerae nostrae mineralogica, ad mentem cel. *Berzelii* exposita, haec erit: 3CS + 5AS + FS.

E praecedenti descriptione mineralogica manifeste patet *Rumaenzoviten* in Systemate mineralogico Granatorum Ordini esse annumerandum. Non itaque ab re erit heic universalem Granatorum Ordinis synopsin exhibere, ut ratio reddatur, cur sit *Rumaenzovites* species propria constituenda. Proportionum determinatarum,

secundum, quas sese componit natura anorganica, doctrina, proxime praeterlapsis annis novam adepti sumus rationem, compositionem fossilium via chemica explorandi; atque mineralogo maximi haec erit momenti investigatio constitutionis chemicae Fossilium, ut horum cuique debitus in systemate vindicetur locus. Quemadmodum e puro crystallographico contemplandi modo haud identica spectare possumus Fossilia, quae diversas habent crystallisationis formas fundamentales, ita etiam, pura instituta Chemica investigatione, nequaquam ea licebit, ad unam referre speciem, quae, quod ad constitutionem suam, diversa esse deprehendantur.

In ordine eo, cujus jam proponemus Tabellam, Fossilia crystallisationis formam fundamentalem unam eandemque quidem habent, (excepto Aplomo, quod quidem in forma crystallisationis fundamentali putat *Haüy* a ceteris crystallis discrepare, exceptisque insuper iis, quae nondum sub forma regulari comparuerunt) at sunt tamen in chemica sua constitutione maxime diversa, idque non solum quod ad materias, quae eandem ingrediuntur, verum etiam quod ad formam constructionis suae atomicae. Quam vero relationem constructionis crystallicae diversitas ad diversitatem dispositionis atomorum habeat, in praesenti Scientiae statu ne suspicari quidem licet.

Signa, quibuscum in sequenti Tabella, atomi cujusque, quae Fossile ingreditur, materici, exprimentur, eadem sunt, ac quibus usus est cel. *Berzelius* in suo, de puro chemico systemate minerali, tractatu; cujus quidem versio Germanica in XV. Volumine invenitur Libri, qui „Beyträge zur Chemie und Physik von *Schweigger*" inscribitur. Exprimit ibi Terram Siliceam signum S, Terram Alumineam A, Magnesiam M, Terram Calcaream C, Oxidum Ferricum F, Oxidum ferrosum f, Oxidum Manganicum Mg, Oxidum manganosum mg.

Ne ullum quidem (excepto *Rumaenzovite*) Fenniae propriorum Granatorum poterit heic afferri, cum nulla, quantum equidem scio, horum hactenus facta fuerit analysis. Valde tamen nobis videtur probabile, Fennica nostra Granata, locum juxta Almandinum et Granatum Faluense fore occupatura, illaque eandem cum alterutra horum lapidum habere formationem.

l a t i.

Almandinum .		*Klaproth*, Beiträge zur chemischen Kenntnifs d… Mineral - Körper, II. 26.
Granatum Faluense	ıur-	*Hisinger*, Afhandlingar i Fysik, Kemi och M… neralogi, IV. 386.
. . . rubrum G…		*Klaproth*, Beiträge zur etc. V. 131.
Silex manganicus gra… natförmiger Braunstein		ibidem . . . . . . II. 239.

t i.

Granatum Swappawa		*Hisinger*, Afhandlingar i Fysik etc. II. 157.
. . . Tyringense		*Bucholz.*
Rothovites . .	bruna; runa	*Rothoff*, Afhandlingar i Fysik, Kemi etc. III, 324
Topazolithes .	is	*Bonvoisin*, *Haüy*, Tableau Comparatif. p. 33.

o x i d a t i.

Aplomum . .	·iseum n	*Laugier*, Annales du Mus. LX. 271.
Granatum Danemorc…	›bscu-	*Murray*, Afhandlingar i Fysik, Kemi etc. II. 188
Melanites . .	..	*Klaproth*, Beiträge zur etc. V. 170.
Allochroites .	viridis	*Rose*, Mineralogische Tafeln von *Karsten*, p. 33.
Grossularia .	iridis	*Klaproth*, Beiträge zur etc. IV. 320.
Rumaenzovites .	bruna	
Pyrope . .	-rubra	*Klaproth*, Beiträge zur etc. II. 21.
Colophonites .	·aceo-	*Simon*, Journal der Physik u. Chemie, IV. 405.

SYNOPSIS TABELLARIS ORDINIS GRANATORUM. ad pag. 380.

a. *Siliciates Aluminae et Ferri oxidati.*

Almandinum	AS + FS ?	4,085	Grana confusa, Trapezoidali-Dodecaëdron	Carmesino Rubrum	*Klaproth*, Beiträge zur chemischen Kenntnifs der Mineral-Körper, II. 26.
Granatum Faluense	AS + fS	4,2	Rhomboidali-Dodecaëdron	Lamina tenuiores purpureae	*Hisinger*. Afhandlingar i Fysik, Kemi och Mineralogi, IV. 386.
. . . rubrum Groenlandiense	AS + FS + $SM^{\frac{1}{2}}$	3,920	Frustula conchaeformia	Rubrum Pellucidum	*Klaproth*, Beiträge zur etc. V. 131.
Silex manganicus granatiformis (Granatförmiger Braunsteinkisel.)	AS + FS + 2MgS	3,7	Trapezoidali-Dodecaëdron	Hyacinthino-Rubrum	ibidem . . . . . II. 239.

b. *Siliciates Calcis et Ferri oxidati.*

Granatum Swappawarense	CS + FS + $\frac{1}{3}$fS	3,7073	Amorphum . . .	Nigrum, Opacum	*Hisinger*, Afhandlingar i Fysik etc. II. 157.
. . . Tyringense	CS + FS				*Bucholz*.
Rothovites	CS + FS + $\frac{1}{3}$MgS	3,835	Rhomboidali-Dodecaëdron, apicibus abscissis	Superficies obscuro-bruna; Fractura flavo-bruna	*Rothoff*, Afhandlingar i Fysik, Kemi etc. III, 324.
Topazolithes	CS + FS + MgS ?	5,655 ?	Rhomboidali-Dodecaëdron	Flava, Flavo-viridis	*Bonvoisin*, *Haüy*, Tableau Comparatif. p. 33.

c. *Siliciates, Calcis, Aluminae et Ferri oxidati.*

Aplomum	CS + 2AS + FS^2	3,444	Rhomboidali-Dodecaëdron, secundum breviorem diagonalem striatum	Color inter Nigro-griseum et Nigro-brunum	*Laugier*, Annales du Mus. LX. 271.
Granatum Danemorense . .	CS + AS + FS + MgS	3,902	Trapezoidali-Dodecaëdron	Albido-brunum; Obscure-brunum	*Murray*, Afhandlingar i Fysik, Kemi etc. II. 188.
Melanites	6CS+2AS+3FS+fS	3,7916	Rhomboidali-Dodecaëdron	Nigra . . .	*Klaproth*, Beiträge zur etc. V. 170.
Allochroites	6CS+AS+3FS+fS+mgS	3,575	Amorpha . . .	Alba, Flavo-griseo-viridis	*Rose*, Mineralogische Tafeln von *Karsten*, p. 33.
Grossularia	12CS + 4AS + 3FS + fS	3,6511	Trapezoidali-Dodecaëdron	Albida, Olivaceo-viridis	*Klaproth*, Beiträge zur etc. IV. 320.
Rumaenzovites	3CS + 5AS + FS	3,6096	Rhomboidali-Dodecaëdron, marginibus abscissis	Clara Flavescenti-bruna	
Pyrope	CS + 15AS + 6FS + 4MS	3,718	Graniformis	Eminens, Sanguineo-rubra	*Klaproth*, Beiträge zur etc. II. 21.
Colophonites	4CS+3AS+FS+$\frac{1}{2}$MgS	4,007?	Trapezoidali-Dodecaëdron	Flavo-bruna in olivaceo-viridem vergens	*Simon*, Journal der Physik u. Chemie, IV. 405.

NOVAE INSECTORUM SPECIES, DESCRIPTAE A

G. J. BILLBERG.

Conventui exhibuit die 8 Julii 1818.

DECAS I^a.

Scientia Entomologica, licet ab illo ipso tempore, quo Svecus *Linné*, in editione duodecima Systematis Naturae, hanc tractabat, per quotidianas fere novas observationes et detecta, admirandum in modum increverit, et numerus specierum notarum, comparatione antecedentis aetatis plus quam sextuplex evaserit, nihilo tamen minus ad totum insectorum agmen cognoscendum haud sufficit. Mihi, hujus Scientiae cultori, sperandum sit, *Academiam Imperialem* haud inique laturam fore, si descriptionem decem novarum specierum, ad inferendam in Actis ejus eruditissimis proponere ausus sim, ordinatarum, proxime morem celeberrimi Dr. *Latreille*, pauculis quibusdam immutationibus meis.

Venia igitur dicam, distributionem Insectorum in *Classes* secundum formam et qualitatem alarum, in *Ordines* secundum alas et organa oris, et in *Subdivisiones* secundum formam et numerum pedum, palporum et antennarum, naturae maxime convenire.

Classes, quas proposui, sunt:

1. *Elythroptera*, alis superioribus crustaceis vel coriaceis.
2. *Gymnoptera*, alis nudis, squamoso-imbricatis vel membranaceis.
3. *Aptera*, alis in utroque sexu nullis.

Et quum species, quas hoc modo in lucem proferre conatus sum, primae Classis sunt, a re non vacat nutum faventem expetere. Quod ad primum ejus Ordinem attinet, *Linnaei* usus sum denominatione, elucet:

Coleoptera. Respectu vero hujusce Ordinis subdivisionum, Schemam his Litteris adjectam synopticam citem.

In descriptionibus terminos colorum retinui, quos quidam a me, in Actis Regiae Academiae Scientiarum Sveciae anno 1813, editus Tractatus indicat, in quo horum terminologiam Historiae Naturali, tanto magis necessariam judicavi, quo differentia denominationis, quam varii auctores promiscue adhibuerunt, magnam, sine dubio, Lectori attulit molestiam.

1.

LUCANUS (Auctorum).

Tab. XII. *Ibex*, mandibulis exsertis apice incurvatis, quadridentatis; castaneus subtus nitidus, supra purpureo-sericeus, scutello albido. Fig. 1. *a.* (mandibula magnitudine aucta Fig. 1. *b.*)

Habitat Brasiliae.

Descriptio. Statura Corporis fere Luc: paralellipipedi, at minor, mandibulisque majoribus exsertis. Caput longitudine latius, antice semicirculari, medio depressum: angulis anticis sinuato acutis et foveola longitudinali ante oculos; Castaneum, supra purpureo sericeum, subtus nitidum: oculis nigris; mandibulis exsertis, subtrigonis, longitudine fere Capitis Thoracisque, supra depressiusculis, subtus convexis, castaneis, glabris, dentibus 4 parvis; duo ante medium et duo ad basin, antennis nigris. *Thorax* longitudine fere duplo latior, lateribus rotundatis, marginatis, angulisque anterioribus porrectis: postice truncatus, castaneus, supra purpureo sericeus: margine antico albido ciliato; subtus nitidus. *Scutellum* parvum, albido vil-

losum. *Elytra* latitudine Thoracis sed fere triplo longiora, ad apicem attenuata; extus marginata, intra humeros apiceque foveolata, castanea, purpureo sericea, ipso margine suturaque nigris. *Corpus* subtus *pedesque* castanei: tarsis fuscescentibus, subtus lutescente pilosis.

2.

ORYCTES (Illigeri).

+ Thorace cornuto.

Faunus, obscure castaneus, capite antice transversaliter rubrescente; thorace medio retuso, apice unituberculato (foeminae) Elythris stria suturali lateribusque punctato-striatis. Fig. 2.

Habitat Barbariae.

Descr. Statura et magnitudine fere Or. (Geotrupis *Fabr.*) Aloei, cui similis, a quo tamen fascia transversa rubrescente punctisque lateralibus elytrorum differt, ut etiam ab Or. Boae, colore opaciore, tuberculis capitis thoracisque, stria punctisque elytrorum, fasciaque Capitis diversus. Castaneus supra obscurior. *Caput* inaequale, antice truncatum, ad basin duplo latius fascia ad marginem apicalem semicirculari rubrescente, vertice tuberculis duobus inter oculos parvis: mandibulis nigris, antennis vero palpisque obscure castaneis, punctulatis. *Thorax* medio longitudine dimidio latior, ad basin transversus, antrorsum angustior, apice sinuato truncatus, lateribus medio rotundatis, antice lateribusque squamulose rugosus, postice laevis, oculo armato subtiliter et irregulariter striatus, tuberculo ad apicem parvo, foveaque ante medium dorsali magna. *Scutellum* triangulare antice squamulose rugosum. *Elytra* latitudine duplo longiora, stria suturali distincta, latere punctis et serialibus et sparsis, medio et ad apicem oculo armato subtiliter et irregulariter striatis. *Pectus* subtilissime punctatum: pilis sparsis testaceis. *Sternum* antice squamulose rugosum, cum Abdomine glabrum. *Femora* castanea, *Tibiae Tarsique* vero nigrescentes.

Obs Marem ejus non vidi.

3.

RUTELA (Latreilli).

+ Scutello brevi.

++ Unguibus inaequalibus.

Versicolor, viridinitens, supra testaceo pubescens; elytris striato-punctatis. Fig. 3.

Hab. Brasiliae.

Descr. Statura et summa affinitate *R. glaucae*, sed multo minor et convexior differt basi capitis angustiore apiceque truncato, thorace longiore scutello majori elytrisque punctatis. *Caput* latitudine inter oculos longius, antice truncatum, ruguloso punctatum, supra pube testacea brevissima indutum. *Thorax* longitudine latior: angulis anterioribus porrectis, posterioribus lateribusque rotundatis; marginatus, punctatus: impressulis nonnullis lateralibus et dorsalibus; viridinitens pube brevissima testacea *Scutellum* subtriangulare, magnum subtilissime punctatum, viridinitens, minus pubescens. *Elytra* latitudine Thoracis, sed plus triplo longiora, marginata: lateribus sub humeris adpressis; punctato-striata: interstitiis striarum irregulariter et concinne punctatis; viridinitentia, testaceo pubescentia. *Corpus* subtus totum viridinitens, crebre punctatum, pilis marginalibus testaceis; *Pedibus* viridinitentibus, pilis marginalibus testaceis; apice tibiarum tarsisque piceis.

4.

MELOLONTHA (Auctorum).

* Ungulis omnibus binis, apice simplici, medio dente acuto armatis.

+ Clava antennarum lamellis plusquam tribus: ♂ 7, l. 5 — ♀ 7, 6, l. 4.

Opaca, oblonga, rugulosa, obscure picea, apice elytrorum lurida: corpore lineisque tribus thoracis albido villosis. Fig. 4.

Hab. — — —

Descr. Statura et affinitate *M. serrulatae* (Synonymia Dr. *Schönherri* Tom. I. pag. 3, App. pag. 73.), a qua tamen differt

clava antennarum tetraphylla, thorace lineis tribus albidis apiceque elytrorum lurido. *Caput* subquadratum, antice truncatum, marginatum, rugulose-punctatum, obscure piceum: pilis adpressis crebris murinis; antennis piceis clava tetraphylla (mas non visus). *Thorax* longitudine dimidio latior, antice semicircularis: lateribus vix crenulatis, angulato rotundatis, marginatus, ruguloso punctatus, obscure piceus: pilis adpressis sparsis griseis, lineisque tribus pilosis longitudinalibus abbreviatis albidis. *Scutellum* subtriangulare, apice rotundatum, rugositate, coloreque thoracis at crebrius pilosum. *Elytra* latitudine plus duplo longiora, apice truncata, marginata, parum convexa, subtiliter rugulosa, lurida, sed ad basin picea: pilis brevissimis sparsis, adpressis grisescentibus. *Corpus* subtus totum obscure piceum, subtilius rugulosum, albido villosum, pilis sparsis longioribus grisescentibus, unde maculis quatuor latere abdominis triangularibus albidis; Pygidio marginato breviter villoso. *Pedes* nigrescentes: tibiis anticis externe tridentatis.

5.

‡ **Clava antennarum in utroque sexu triphylla.**

M. A e n e a. Oblonga ferruginea, villosa, supra aenea, thorace elytrisque pilis brevibus rarioribus adpressis albidis.

Hab. Brasiliae.

Descr. Statura et magnitudine *M. pilosae var.* β. (*villosae Fabr.*). *Caput* subquadratum, clypeo paulo emarginato angulis anterioribus rotundatis; rugulosum, aeneum, dense lutescente villosum: Oculis nigris antennisque ferrugineis. *Thorax* longitudine duplo latior, antice angustior: lateribus rotundatis; crebre punctatus, aeneus: pilis brevibus rarioribus adpressis albidis. *Scutellum* trinagulare, aeneum, laeve et glabrum. *Elytra* latitudine plus duplo longiora, dorso lineis tribus subelevatis, rugose punctulata; impressione magna oblonga obliqua laterali, sub humero faveolaque minori rotundata ad medium; aenea, pilis brevibus rarioribus adpressis albidis. *Corpus*

subtus ferrugineum, dense lutescente villosum; pedibus aeneis, lutescente pilosis.

6.

M. Gröndahli, Oblonga, ferruginea albo squamulosa: elevatione furcata media, et utriusque lateris thoracis, scutello, margine suturaque Elytrorum chrysoprascis. Fig. 6.

Hab. in Cap. bonae spei.

Descr. Statura et magnitudine *M. ruficornis*. *Caput* subquadratum, clypeo haud emarginato reflexo, angulisque anterioribus rotundatis; rugulosum, ferrugineum; squamulis albidis; subtus lutescente villosum; palpis antennisque ferrugineis, clava triphylla. *Thorax* longitudine dimidio latior, antice angustior, lateribus rotundatis; rugulosus, ferrugineus, squamulis albidis, elevatione furcata a basi supra medium et elevationibus lateralibus difformibus glabris chrysopraseis; subtus obscure ferrugineus: squamulis candidis. *Scutellum* triangulare, glabrum, chrysopraseum, linea pone basin transversa impressa aurea. *Elytra*, latitudine duplo longiora infra humeros paulo dilatata, transversim rugosa, ferruginea: lineis quinque subelevatis denudatis, et interstitiis linearum squamulis albidis indutis, lineis squamulosis tamen pone medium oblique denudato abruptis, margine suturaque chrysoprascis. *Sternum* obscure ferrugineum, lutescente hirtissimum. *Abdomen* obscure ferrugineum squamulis candidis tectum. *Pedes* ferruginei, squamulis candidis et pilis rarioribus lutescentibus.

Obs. In memoriam Medici Regis Sveciae defuncti D^r. Doctoris *Carol. Fredr. Gröndahl*, Historiae Naturalis eximii cultoris, sacra.

7.

M. Aphodiina, gibba, crebre punctata, atra: capite antice retropresso et clypeo porrecto. Fig. 7. *a*. (magnitudine aucta Fig. *b*.)

Hab. Indiae. Dr. *Gröndahl.*

Descr. Magnitudine *M. Ruricolae*, at statura propter corpus ejus gibbosius Aphodio fere simile. *Caput* marginatum, antice retropressum clypeo porrecto emarginato transverso, angulisque rotundatis; crebre punctatum, atrum; palpis antennisque ferrugineis, clava triphylla testacea. *Thorax* longitudine plus duplo latior, gibbus, marginatus, glaber, ater. *Scutellum* triangulare, glabrum puncto uno alterove impresso. *Elytra* latitudine dimidio longiora, lateribus parum dilatata, convexa, lateribus et ad suturam punctato-striata; dorso striis duobus geminatis, punctato-striatis, interstitiis crebre punctatis; atra. *Corpus* subtus totum punctatum, glabrum, atrum. Pygidio tantum oculo armato pilis brevibus sparsis lutescentibus instructo. *Pedes* picei, tarsis vero pallidioribus.

× × × Ungulis aut omnibus simplicibus, aut certorum Parium apice bifidis aut dente armatis.

8.

M. Forströmi, glabra, castanea nitida; fronte impressa, Pygidio barbato. Fig. 8.

Hab. Brasiliae.

Descr. Statura et magnitudine *M. antiquae* (Synonymia D^r. *Schönherr* T. I. pag. 3.) pag. 196. n°. 159, app. pag. 111, n°. 154.) a qua tamen characteribus indicatis bene distincta. Tota castanea, glabra, nitida. *Caput* marginatum, antice truncatum, lateribus sinuatis; punctatum: fronte impressa, linea transversa impressiore. *Thorax* longitudine fere duplo latior: angulis anterioribus prominentibus, sed posterioribus ut etiam lateribus rotundatis; oculo armato subtiliter punctatus: impressione ad utrumque angulum anteriorem parva. *Scutellum* triangulare, laeve. *Elytra* latitudine plus duplo longiora, marginata. Stria suturali et impressione parva sub humeris, rudimentisque oculo armato in dorso punctorum striatorum. *Corpus* subtus laeve: pygidio lutescente barbato pedibusque pilis sparsis castaneis.

Obs. Dr. Pastori Ecclesiae *Forström*, Scientiae Historiae Naturalis in Insula St. Barthelemy indefessa cura Scrutatori denominata.

9.

M. penicillata villosa, chrysoprasea: elytris clare ferrugineis, margine suturaque atro-viridibusque, tibiis tarsisque piceis. Fig. 9.

Hab. — — extra Europam. Dr. *Gröndahl*.

Descr. Statura fere *M. austriacae*, at paulo major. *Caput* oblongum, clypeo exserto, apice emarginato margineque sursum versus flexo; lateribus sinuatis; crebre punctatum, chrysopraseum, antrorsum infuscatum, subtus lutescente barbatum: antennis, clava oblonga palpisque ferrugineis, penicillo unius cujusque maxillae lutescente cujus stipes fuscus. *Thorax* subquadratus: angulis acutis lateribusque paulo rotundatis, antice paulo angustior, convexus profunde punctatus: angulis anterioribus depressis et lineis duabus ad basin transversis impressis; chrysopraseus, lutescente villosus. *Scutellum* triangulare, punctatum, medio laeve: linea basali impressa; chrysopraseum. *Elytra* latitudine thoracis, at fere duplo longiora, ad apicem haud angustiora, ab humeris longitudinaliter elevata profunde et irregulariter punctata; clare ferruginea margine exteriore suturaque atro-viridibus. *Corpus* subtus chrysopraseum squamulose et transversaliter striatum, lutescente pilosum: femoribus viridinitentibus, tibiis tarsisque piceis.

10.

TRICHIDIUS (mihi).

Aurantiacus pulverulente squamosus, supra aurantiacus, subtus pallide ochraceus, capite nigro pedibus ferrugineis. Fig. 10.

Hab. — — extra Europam. Dr. *Gröndahl*.

Descr. Statura fere Trichii (Melolonthae *Fabr*.) Dentipedis at duplo major, thorace angustiore. Totus creberrime punctulatus,

capite excepto squamulis pulverulentis supra aurantiacis subtus pallide ochraceis-tectus. *Caput* oblongum, margine subreflexo, squamulis pilisque sparsis aurantiacis atrum. *Thorax* latitudine paulo longior antice posticeque truncatus, lateribus medio rotundatis pilis rarioribus aurantiacis. *Scutellum* subtriangulare. *Elytra* latitudine anteriore fere duplo longiora, versus apicem attenuata, humeris prominentibus, pilisque rarioribus aurantiacis. *Corpus* subtus glabrum: Pedibus ferrugineis punctatis pilis sparsis ferrugineis.

Obs. Hoc genus differt a Melolontha et Trichio cujum intermedium videtur, habitu, structura corporis femoribus validioribus maxilla multidentata, ungulis tarsorum, etiam posticis, bifidis. Huc pertinent *Melol. (Fabr.) Dentipes*, *arthritica*, *podagrica*, *abbreviata*, etc.

SCHEMA SYSTEMATIS INSECTORUM ELYTROPTERORUM SYNOPTICA ORDINIS PRIMI *COLEOPTERA*

Elytris crustaceis, sutura recta; Maxilla nuda, libera, palpigera.

Sectio I.

PENTAMERA, Tarsis omnibus quinque articulatis.

Legio I. *Saprophagi*, Palpis quatuor.

Phalanx 1. Antennis plus minusve clavatis.

Trib. 1. *Lucanides*, antennarum capitulo pectinato vel lateraliter fisso.

Divisio 1. Antennis non fractis: Genus: Passalus.

— — 2. Antennis fractis: Genera: Lucanus, Platycerus, Lamprima, Aesalus.

Trib. 2. *Scarabaeides*, antennarum capitulo lamellato vel horizontaliter fisso.

Divis. 1. Antennis 11-articulatis: Gen. Lethrus, Scarabaeus.

— — 2. Antennis 10-articulatis: Gen. Aegialia, Trox, Si-

nodendrum, Oryctes, Geotrupes, Phileurus, Hexodum, Rutela, Melolontha, Hoplia, Glaphyrus, Amphicoma, Anisomyx, Trichidius, Chrestomachilus, Pachypus, Trichius, Goliathus, Cetonia.

Divis. 3. Antennis 9-articulatis: Gen. Aphodius, Onitis, Copris, Onthophagus, Ateuchus, Gymnopleurus.

— — 4. Antennis 8-articulatis: Gen. Sisyphus.

Trib. 3. *Histerides*, antennarum capitulo compresso subfoliato: Gen. Hister, Hololepta.

— 4. *Sphaeridiides*, antennarum capitulo compresso perfoliato:

Divis. 1. pedibus gressoriis; articulo tarsorum basali secundo non breviore: Gen. Sphaeridium.

— — 2. pedibus natatoriis; articulo tarsorum basali secundo breviore: Gen. Hydrous, Hydrophilus, Limnebius, Spercheus, Elophorus, Ochtebius, Hydraena.

— 5. *Sarrotriides*, clava antennarum 8-articulata, Gen. Sarrotrium.

— 6. *Gyrinides*, clava antennarum multiarticulata: Gen. Heterocerus, Parnus, Gyrinus, Georissus.

— 7. *Byrrhides*, clava antennarum extrorsum crassiore: Gen. Nosodendrum, Chelonarium, Byrrhus, Scaphidium, Anthrenus, Troscus.

— 8. *Ptinides*, clava antennarum articulis 3-majoribus elongatis: Gen. Dorcatoma, Anobium, Riphidium, Ptilinus, Xyletinus, Ptinus, Gibbium.

— 9. *Dermestides*, clava antennarum oblonga: articulis approximatis: Gen. Megatoma, Attagenus, Dermestes, Byturus, Cryptophagus.

— 10. *Silphaedes*, clava antennarum ovata perfoliata: Gen. Engis, Triplex, Tritoma, Ips, Nitidula, Strongylus, Cercus, Catheretes, Colcebicus, Peltis, Necrophorus, Necropterus, Silpha, Catops, Agyrtes.

Trib. 11. *Scydmaenides*, clava antennarum extrorsum crassiore, Gen. Mastigus, Scydmaenus.

— 12. *Micropeplides*, clava antennarum uniarticulata: Gen. Micropeplus.

Phal. II. antennis extrorsum crassioribus vel filiformibus elytris dimidiatis.

Trib. 13. *Staphylinides*, corpore elongato: Gen. Astrapaeus, Staphylinus, Lathrobium, Paederus, Stenus, Evacsthaetus, Oxytelus, Oxyporus, Lomechusa, Aleochara, Tachinus, Tachyporus, Omalium, Proteinus, Anthophagus.

Phal. 3. antennis moniliformibus vel filiformibus; elytris integris.

Trib. 14. *Cucujides*, corpore valde depresso: Gen. Cucujus, Dendrophagus, Trogosita.

— 15. *Clerides*, corpore oblongo convexo: Gen. Trichodes, Clerus, Opilus, Tillus, Enoplium.

— 16. *Telephorides*, corpore praesertim elytris molliusculis: Gen. Atractocerus, Lymexylon, Melyris, Zygia, Dasytes, Malachius, Malthinus, Telephorus, Lampyris, Omalisus, Lycus, Drilus, Cupes, Scirtes, Cyphon, Atopa, Cebrio.

— 17. *Elaterides*, sterno resiliente, praesertim elytris duris, Gen. Phosphoreus, Elater.

— 18. *Buprestides*, sterno non resiliente, corpore convexo, elytris duris: Gen. Cerophytum, Melasis, Trachys, Aphanisticus, Buprestis, Chloria, Sternoxus.

Leg. II. *Entomophagi*, Palpis sex.

Trib. 1. *Dytiscides*, pedibus natatoriis: Gen. Dytiscus, Colymbetes, Laccophilus, Noterus, Hydroporus, Hyphydrus, Paelobius, Haliplus, Limnius.

— 2. *Carabides* pedibus gressoriis; maxillis arcuatis inermibus: Gen. Scolytus, Cychrus, Procrustes, Carabus, Calosoma, Nebria, Leistus, Blethisa — Loricera, Panagaeus, Agra,

Odacantha, Polystichus, Drypta, Gaterita, Zuphium, Cymidis, Demetrius, Lebia, Dromius, Risophilus, Lamprias, Aptinus, Brachinus, Graphipterus, Anthia, Badister, Synunchus, Licinus, Trechus, Amara, Calathus, Zabrus, Oodes, Poecilus, Harpalus, Chlaenius, Stomis, Sphodrus, Pterostichus, Melops, Brosscus, Ditomus, Siagona, Scarites, Apotamus, Morion, Clivina, Dyscirius, Beubidiuus, Elaphrus, Notiophilus.

Trib. 3. *Cicendelides*, pedibus gressoriis: maxillis ungue apicali corneo armato: Gen. Picendela, Megacephala, Colliuris, Manticora.

Sectio. II.

HETEROMERA tarsis 4 - anticis quinque articulatis, posticis quadriarticulatis.

Leg. I. *Sympephycomeni*, elytris connatis.

Phal. 1. mento parvo.

Trib. 1. *Scaurides*, palpis filiformibus, Gen. Sepidium, Stenosis, Scaurus.

— 2. *Blapsides*, palpis capitatis, Gen. Blaps, Misolampus.

Phal. 2. mento lato.

Trib. 3. *Pimeliaedes*, antennis non capitatis: Gen. Eurychora, Akis, Tentyria, Moluris, Pimelia, Zophosis, Asida, Machla, Platynotus.

— 4. *Erodiides*, antennis capitatis: Gen. Erodius, Chiroscelis.

Leg. II. *Chorizomini*, elytris separatis.

Trib. 1. *Eledonaedes*, antennis serratis: Gen. Cnodalum, Epithragus, Eledona.

— 2. *Diaperides*, antennis extrorsum crassioribus s. clavatis, Gen. Clypcaster, Cossyphus, Trachyscelis, Anisotoma, Tetra-

toma, Eustrophus, Diaperis, Phaleria, Toxicum, Hypophlaeus, Boros.

Trib. 3. *Tenebrionides*, antennis moniliformibus, Gen. Bolitophagus, Pedinus, Opatrum, Tenebrio, Upis.

— 4. *Helopides*, antennis filiformibus plerumque apice moniliformibus, Gen. Helaea, Helops, Melandria, Allecula, Mycetophila, Conopalpus, Orchesia, Hallomenus, Dircaea, Serropalpus.

— 5. *Lagriaedes*, antennis filiformibus; corpore convexo, Gen. Calopus, Dryops, Lagria, Nilio, Scraptia, Notoxus, Streopes, Anthicus.

— 6. *Cistelaedes*, antennis longioribus subsetaceis, Gen. Philodactyla? Oedemera, Stenostoma, Cistela.

— 7. *Pyrochroaedes*, antennis filiformibus corpore depresso: Gen. Pyrochroa, Pytho.

— 8. *Meloides*, antennis diversis, elytris dimidiatis; Gen. Meloë.

— 9. *Cantharides*, antennis subfiliformibus, Gen. Horia, Crisites, Oenas, Cantharis, Zonitis, Nemognatha, Apalus, Tetraonyx.

— 10. *Mylabrides*, antennis extrorsum sensim crassioribus, Gen. Mylabris, Cerocoma.

— 11. *Mordellaedes*, antennis apice paulo crassioribus, Gen. Ripiphorus, Pelecotoma. Mordella, Anaspis.

— 12. *Salpingides*, antennis extus crassioribus; ore rostrato, Gen. Salpingus.

Sectio III.

TETRAMERA tarsis omnibus quadriarticulatis.

Leg. I. *Rhyncophori*, capite rostrato; ore apice Rostri.

Trib. 1. *Bruchides*, rostro lato, Gen. Rhinomacer, Platyrhinus, Anthribus, Bruchus.

— 2. *Attelabides*, antennis rectis, Gen. Brachycerus, Ramphus, Apion, Rhynchites, Apoderus, Attelabus. Cylas, Brentus.

Trib. 3. *Curculionides* antennis fractis:

Divis. 1. Antennis ad basin rostri insertis, Gen. Rhina, Calandra, Cossonus.

— — 2. antennis sub basi rostri insertis, Gen. Lixus, Rhynchaenus, Brachyrhinus, Curculio, Psallidium, Eurhin. Erythrinus, Cryptorynchus, Cionus, Orchestes.

Trib. 4. *Bostricides*, capite exserto haud rostrato, Gen. Hylurgus, Bostricus, Platypus, Cryptogaster, Hylesinus, Phloiotribus.

Leg. II. *Platyprosopi* capite non rostrato.

Trib. 1. *Apatides* clava antennarum perfoliata, aut serrata, Gen. Ligniperda, Apate, Psoa, Corynetes.

— 2. Pausides, clava antennarum solida vel apice globosa, Gen. Pausus, Cerapterus.

— 3. *Cerylonides*, antennis 10-articulatis clavatis, Gen. Cis, Nemosoma, Cerylon, Monotoma.

— 4. *Mycetophagides*, antennis 11-articulatis, extus crassioribus: Gen. Mycetophagus, Rizophagus, Lyctus. Ditoma.

— 5. *Colydiides*, antennis extrorsum crassioribus; Gen. Colydium, Latridius, Sylvanus, Meryx.

— 6. *Cerambycides*, antennis plerumque setaceis longis.

Divis. 1. tarsis subtus non spongiosis, Gen. Brontes, Parandra.

— — 2. tarsis subtus spongiosis, Gen. Spondylis, Passandra, Prionus, Acrocinus, Clenodes, Lamia, Dorcadium, Tetraops, Saperda, Gnoma, Trachyderes, Cerambyx, Stenochorus, Callidium, Clytus, Necydalis, Molorchus, Rhagium, Leptura.

— 7. *Lemaedes*, lacinia maxillarum exteriore vix 2-articulata, Gen. Donacia, Lema, Sagra, Orsodachna, Megalopus.

— 8. *Gallerucaedes*, laciniis maxillarum subaequalibus, Gen. Crioceris, Adorium, Galleruca, Adi[illegible] [illegible]erus, Haltioa.

Trib. 9. *Cryptocephalides*, lacinia maxillae externae majori, Gen. Eumolpus, Cryptocephalus, Chlytra, Chlamys.
— 10. *Chrysomelacedes*, lacinia maxillae externae latiori, Gen. Paropsis, Doryphora, Chrysomela, Helodes, Calaspis.
— 11. *Hispaedes*, corpore elongato; thorace quadrato, Gen. Hispa, Alurnus.
— 12. Cassidaedes, corpore clypaeiforme; thorace semicirculare: Gen. Himatidium, Cassida.
— 13. *Erotylides*, maxillis ungue corneo instructis: Gen. Erotylus, Aegithus, Languria, Phalacrus, Agathidium.

Sectio IV.

TRIMERA, tarsis triarticulatis.

Trib. 1. *Coccinellacedes*, antennis thorace brevioribus; Gen. Scymnus, Coccinella, Chilocorus.
— 2. *Endomychides*, antennis thorace longioribus, Gen. Eumorphus, Endomychus, Lycoperdina.

Sectio V.

DIMERA, tarsis biarticulatis.

Trib. 1. *Pselaphides*, antennis 11-articulatis, Gen. Chennium, Pselaphus.
— 2. *Clavigerides*, antennis 6-articulatis, Gen. Claviger.

DE SUPERNUMERARIO SIVE ABDUCENTE ACCESSORIO *OCULI* MUSCULO,

IN CADAVERE HOMINIS OBSERVATO.

AUCTORE

P. ZAGORSKI.

Conventui exhibuit die 16 Dec. 1818.

Naturam humanam, circa corporum et partium haec constituentium formationem, non semper ad normam et regulas, a Summo Artifice sibi praescriptas componi, per plures observationes compertum habemus. In actis Societatum litterariarum et potissimum in operibus Anatomicorum innumerae pene prostant historiae casuum, ubi natura vel, ut specialiter dicam, ea naturae humanae facultas, quam nomine vis formativae insigniunt, ab archetypo primi creati hominis, quod stricte et exacte sequi deberet, diversimode deflexisset, lususque sui vestigia variis sub formis, tum per deformitates, plus minus notabiles, tum per alias qualescunque partium varietates, et similia id genus vitia, ostendisset.

Si ad tales normae et legum inobservantias, quas vis formativa interdum committere sibi permittit, attendamus, illas crebriores majorisque momenti in partibus vitae organicae, quam in organis vitae animalis hominis occurrere, facile perspiciemus. Sic in systemate circulatorio sive vasculoso, in quibusdam organis reproductionis et in partibus generationis, frequentes et insignes a statu normali aberrationes observatae sunt: in musculari autem et praecipue in nervoso systematibus, quibus character vitae animalis exprimitur, nonnisi raras easque leves varietates contingere videmus.

Inter observationes tamen de varietatibus musculorum, nullibi reperio similem casum, qualis mihi anno praeterito in hominis adulti cadavere sese obtulit; cusum nempe *supernumerarii* s. *abducentis accessorii* bulbi oculi musculi, cujus descriptionem cum adnexa icone hic propono.

Musculus oculi supernumerarius sev *abducens accessorius.*

Priusquam descriptionem insueti hujus musculi faciam, haec esse praemittenda duxi.

Musculos quosdam corporis humani, maxime eos, qui in respirationis mechanismo partem habent, sat saepe variare, neminem Anatomicorum fugit. Tales sunt musculi: sterno-costales, levatores costarum longi et abdominis pyramidales, quorum priores defectu solo, reliqui et defectu et numero peccant persaepe. — Musculi etiam retrahentes auris, psoae minores et plantares sunt illi, qui solent aliquando variare, et quidem priores duo, numero, posteriores quatuor, vel defectu vel mutatione loci insertionis suae; id quod a me multoties, et ante me ab aliis jam pridem observatum, et in compendiis anatomicis notatum est. Variant quoque, sed rarissime, nonnulli alii musculi.

Ut autem musculi bulbi oculi, quorum numerus constanter senarius est, et speciatim recti, defectu vel excessu variarent, nec mihi, per sex circiter lustra Anatomiam colenti, praeter hunc unicum casum, nec aliis de Anatomia humana meritissimis viris, saltem quorum opera legebam, unquam observasse licuit. Quod musculos obliquos organi visus spectat, praeter paucos Anatomicos, Celeberrimus *Albinus* in sua *Historia Musculorum hominis* facit mentionem cujusdam musculi gracillimi, obliqui superioris sev trochlearis comitis, quem tamen clarissimus *Zinnius*, qui accuratissimam oculi omniumque ejus partium descriptionem nobis reliquit, nunquam se vidisse asserit.

Hac nota praemissa, ad descriptionem supernumerarii musculi, a me observati accedo.

Peculiarem lacertum carneum, sat robustum, qui huic observationi ansam dedit, *musculum supernumerarium oculi rectum* appello ob rationes sequentes: 1) quia, praeter solitum organi visus musculorum numerum, aderat; 2) quia progressum, directionem et insertionem similes rectorum musculorum oculi habebat; 3) quia originem cum rectis, abducente, deprimente et adducente communem a ligamento communi *Zinnii* ducebat.

Non erat hic musculus aliuscujusque illorum musculorum fasciculus separatus, ut cum nonnullis musculis accidere interdum solet, sed plane lacertus peculiaris et distinctus, qui, ex angulo originis communis abducentis musculi et deprimentis ortus, pergebat inter hos musculos in regione externa et inferiore orbitae versus bulbum, ita tamen, ut tam in toto tractu suo, quam in loco suae in selerotica insertionis, propior abducenti quam deprimenti musculo esset.

Ex hoc situ et ex longitudine, aequipari longitudini musculi abducentis, qui, ut notum est, omnium rectorum brevissimus sed crassissimus habetur, non improbabilis conclusio deduci potest, quod supernumerarius iste musculus non deprimenti, sed abducenti suppetias suas in agendo praebebat; et hanc ob rem *abducens accessiorius* dici meretur.

Quoad robur et crassitiem fibrarum, accessorius hic musculus abducenti ordinario multum, deprimenti vero et aliis rectis oculi musculis vix quidquam cedebat: ab omnibus tamen in eo differebat, quod non, more illorum, tendine dilatato, sed angustato et quasi rotundiusculo in sclerotica desinebat, uti in figura expressum est.

Explicatio tabulae.

Tab. X. Figura sistit partem mediam et anteriorem baseos cranii cum orbita dextra, cujus paries superior ablatus est, ut oculus in ipsa

jacens cum musculis suis, superficiesque externa palpebrae superioris cum musculo ejus elevatore conspiciantur.

1) Portio media partis orbitalis ossis frontis cum osse ethmoideo, cujus crista galli justo major in hoc subjecto erat.
2) Processus orbitalis externus ossis frontis.
3) Portio ossis basiliaris cum abscissis nervis opticis, sua foramina intrantibus.
4) Musculus elevator palpebrae superioris.
5) Musculus attollens bulbi oculi, elevatori palpebrae subjacens.
6) Musculus trochlearis.
7) Musculus adducens.
8) Nervus opticus.
9) Musculi obliqui inferioris insertio.
10) Musculus abducens.
11) Musculus deprimens.
12) Musculus abducens accessorius.



URSUS BRASILIENSIS,

NOVA QUAEDAM SPECIES, DESCRIPTA ET DELINEATA

A

C. P. THUNBERG.

Conventui exhibuit die 11 Aug. 1819.

Tab. XIII. Contendunt nonnulli Auctores Zoologi, dividi deberi *Ursi* genus in duo distincta genera, scilicet *Ursi* et *Melis*. Nota, quam ut characterem hujus divisionis assumserunt, adeo tamen est exigua, nimirum foramen illud excretorium, quod aeque in *Mele* ac in *Hyaëna* inter anum et genitalia observatur, ut in ambobus his generibus, numquam speciebus nimium multis instructis, non mereatur, ad quam hoc respectu adtendatur, imprimis quod et *Meles* et *Ursus* externo habitu aeque ac vivendi ratione omnino conveniant.

Ad *Ursi* Genus, ob rationes allatas, et ut spero, rectius retuli novam hanc Speciem, quae e Brasilia Americes meridionalis oriunda mecum fuit benevole communicata. E minoribns inter Congeneres est, et ab antea notis speciebus, tam Europaeis, quam Americanis satis sufficienterque diversa et distincta, nec inamoena species.

E loco natali et patria ejus hanc novam speciem *Ursi* apellavi *brasiliensem*, cujus Iconem cum Descriptione heic adjungere volui, ut animalculum e Classe Mammalium, Curiosis Zoologiae Studiosis innotesceret, nec amplius, ut huc usque, obscurum et omnino ignotum in sylvis felicioris Orbis nostri regionis, sibi ipsi relictum delitesceret.

Longitudine Catum domesticum adaequat circumferentia angustiori.
Caput antice et circum oculos nigrum, supra cinereum, gula colloque subtus nigris.
Nasus paulo productus, parum prominens, supra planiusculus.
Vibrissae labii inferioris et menti exstantes, atrae.
Dentes primores 6, excavati, aequales, ut in *Urso*.
canini multo majores: superiores extus sulco exarati; inferiores adhuc majores: omnes conici, basi crassi, apice acuti, curvi.
molares 4, usque 5, trilobi, postici sensim majores.
Auriculae rotundatae, cinereo-pilosae.
Collum supra, dorsum totum, latera et cauda grisea seu cana e pilis atris apice albis.
Pectus et *pedes* omnes nigri pilis raris intersparsis albidis.
Abdomen minus nigrum videtur, itidem pilis pluribus albis intersparsis.
Cauda longitudine pedum, corpore quadruplo brevior, teres, pilosa, parum attenuata, fusco-grisea.
Palmae et *plantae* pentadactylae, fissae: unguibus curvis, acutis, cinereis.
Corporis longitudo a naso ad caudae basin 20 pollices circiter.
caudae circiter 5 pollices; *pedum* 4.
Character specificus sequens esto: cauda fusco-grisea, longitudine pedum; fronte dorsoque cinereis; naso, collo, pedibus abdomineque nigris.
Licet proxime facie sua ad Viverras accedat, cum iis tamen conjungi non potest, ob dentes primores aequales, intermediis minime brevioribus ut in Viverris; ob dentes omnes, imprimis caninos et quoque ungues validiores.
Nisi omnia me fallunt, ad *Ursi* genus referri debent plures in Systemate *Linnaeano* ad Viverras relatae species, nominatim Viverra tetradactyla, Nasua, Narica, vulpecula, qvasje et mellivora.

Singulare etiam est, quod in hac specie observatur, nimirum quod partes corporis inferiores longe obscuriores et nigro tinctae sint, quam quidem superiores. Circumstantia haec obvenit, imprimis apud illa Mammalia, quae antra sibi effodiunt subterranea, in quibus sub dio tranquilla et secura quiescunt, noctu pastum quaesitura exeuntia et circumvagantia.

De cetero ex Animalculi hujus Economia et vivendi ratione nihil innotuit.

EXTRAIT DES OBSERVATIONS MÉTÉOROLOGIQUES, FAITES A ST. PETERSBOURG ANNÉE MDCCCVIII, D'APRÈS LE NOUVEAU STYLE,

PAR

B. PETROW.

Présenté à la Conférence le 23 Oct. 1816.

I. BAROMÈTRE.

Hauteurs extrêmes, variation, milieu arithmétique, hauteur moyenne et nombre des jours, auxquels la hauteur du barometre a été au-dessus de 28 *pouces de Paris.*

NB. *m.* signifie matin ou avant midi, *apr. m.* après midi et *s.* soir ou après midi.

Mois	Hauteurs les plus grandes		Hauteurs les plus petites		variations	milieu arithmétique	hauteur moyenne	hauteur au-dessus de 28 pouces en jours
	pouces	jours	pouces	jours	pouces	pouces	pouces	
Janv.	28,48	le 6 et 17 s.	27,27	le 12. m.	1,21	27,87	28,02	18
Févr.	28,54	le 22 et 29 apr. m.	27,10	le 7 s. et 8 m.	1,44	27,82	28,00	19
Mars	29,23	le 26 m.	27,58	le 12 m.	1,65	28,40	28,50	27
Avr.	28,50	le 21 m.	27,08	le 7 m.	1,42	27,79	27,965	18
Mai	28,54	le 11, 12 et 13 m.	27,58	le 17 s. et 18 m.	0,96	28,06	28,215	26
Juin	28,35	le 6 et 22 m.	27,73	le 11 m.	0,62	28,04	28,10	19
Juill.	28,37	le 24 m. et apr. m.	27,67	le 15 m.	0,70	28,02	28,14	27
Août	28,40	le 31 apr. m.	27,80	le 6 m.	0,60	28,10	28,105	26
Sept.	28,67	le 19 m.	27,54	le 12 s.	1,13	28,10	28,083	19
Oct.	28,65	le 30 m. et apr. m.	27,35	le 1 m.	1,30	28,00	28,30	30
Nov.	28,75	le 4 m.	27,54	le 13 apr. m.	1,21	28,14	28,062	18
Déc	29,04	le 27 s.	27,10	le 7 apr. m.	1,94	28,07	28,23	25
A.	29,23	le 26 Mars	27,08	le 7 Avril	2,1	28,155	28,143	272
H.	29,23	le 26 Mars	27,08	le 7 Avril	2,15	28,155	28,061	116
E.	28,67	le 19 Sept.	27,35	le 1 Octobre	1,32	28,010	28,157	147

A. marque l'intervalle de toute l'année depuis le 1 Janvier jusqu'au 31 Décembre 1808, comprenant les 366 jours de l'année.

H. marque l'intervalle de 6 mois d'hiver depuis le 1 Novembre 1807 jusqu'au 1 Mai 1808, comprenant 182 jours.

E. marque l'intervalle de 6 mois d'été depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre 1808, comprenant 184 jours.

Le tableau précédent indique, que la variation du baromètre a été la plus grande (de 1,94 pouce) en Décembre, et la plus petite (de 0,60 pouce) au mois d'Août; que la hauteur moyenne se trouve être la plus grande (de 28,50 pouces) en Mars, et la plus petite (de 27,965 pouces) au mois d'Avril.

II. THERMOMÈTRE DE Mr. DÉLISLE.

1) Températures extrêmes de l'atmosphère avec leurs différences, milieu arithmétique, et températures moyennes pendant les matins et les soirs, à midi ou bientôt après midi et pour chaque mois entier de l'année 1808.

Mois	Températures extrêmes				leurs différences	leur milieu arithmétique	Températures moyennes		
	les plus basses		les plus hautes				pendant les matins et les soirs	à midi ou bientôt après midi	pour chaque mois entier
	degrés	jours	degrés	jours	degrés	degrés	degrés	degrés	degrés
Janv.	170,6	le 14 m.	148,1	le 5 apr. m. et 24 m.	22,5	159,35	157,70	155,60	157,00
Févr.	192	le 26 m.	148	le 21 apr. m.	44	170	166,19	163,47	16[illegible],29
Mars	190	le 16 m.	143	le 19 apr. m.	47	166,50	168,06	155,09	163,74
Avril	185	le 2 m.	127,5	le 24 apr. m.	57,5	156,25	155,91	144,89	152,24
Mai	153	le 1 et 12 m.	123	le 8 apr. m.	30	138,0	144,20	132,50	140,30
Juin	146,2	le 13 m. et s.	105	le 27 apr. m.	41,2	125,60	131,00	120,06	127,35
Juill.	136	le 12 m., 16 et 28 s.	106	le 8 apr. m.	30	121,0	128,01	117,14	124,39
Août	140,6	le 29 m.	08,8	le 4 apr. m.	31,8	124,7	130,12	121,25	127,16
Sept.	151	le 16 m.	115	le 1 et 3 apr. m.	36	133,0	134,59	126,23	131,81
Oct.	154	le 7 m.	131,3	le 11 apr. m.	22,7	142,65	140,23	137,09	139,48
Nov.	175	le 30 m.	144	le 1 et 2 apr. m.	31	159,50	153,80	151,82	153,14
Déc.	188	le 28 m.	157	le 24 apr. m.	31	172,50	170,51	166,90	169,31
A.	192	le 26 Février	105	le 27 Juin	87	148,50	148,36	141,08	145,93
H.	192	le 26 Février	127,5	le 24 Avril	64,5	159,75	159,34	154,54	158,40
E.	154	le 7 Octobre	105	le 27 Juin	49	129,50	134,69	125,86	131,75

D'après ce tableau on voit: 1) que le plus grand froid (de 192 degrés) a été le 26 Février à 6 heures du matin; 2) que la plus grande chaleur (de 105 degrés) est arrivée le 27 Juin après midi; 3) que la plus grande différence entre la plus basse et la plus haute températures de l'atmosphère fut (de 57,5 degrés) en Avril, et la plus petite (de 22,5 degrés) en Janvier; 4) que la température moyenne, pendant les matins et les soirs, se trouve être la plus basse (de 170,51 degrés) en Décembre, et la plus haute (de 128,01 degrés) en Juillet; 5) qu'à midi ou bientôt après midi la température moyenne la plus basse (de 166,90 degrés) a été en Décembre, et la plus haute (de 117,14 degrés) en Juillet.

---

2) Nombre des jours, auxquels la température de l'atmosphère a été, pendant les matins et les soirs et à midi ou bientôt après midi, pour chaque mois, au-dessous et au-dessus de quelques divisions principales du thermomètre.

Mois	Pendant les matins et les soirs la température à été plus basse que					A midi ou bientôt après midi la température a été plus haute que				
	190°	180°	170°	160°	150°	150°	140°	130°	120°	110°
	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours
Janvier			1	14	30	4				
Février	1	5	12	22	29	3				
Mars		6	17	30	31	8				
Avril		1	6	9	25	22	11	2		
Mai					7	31	28	11		
Juin						30	29	24	17	4
Juillet						31	31	31	19	5
Août						31	31	29	13	1
Septembre					1	30	30	24	4	
Octobre					5	31	22			
Novembre			3	5	22	15				
Décembre		8	18	31	31					
A.	1	20	57	111	181	236	182	121	53	10
H.	1	14	41	88	161	63	11	2		
E.					13	184	171	119	53	10

Il a commencé à geler le 24 Septembre 1807, c'est-à-dire encore avant le commencement de l'intervalle H., et il a gelé pour la dernière fois le 12 Mai 1808, après un intervalle de 232 jours. En A., et notamment en E., il a recommencé à geler le 16 Septembre 1808, après un intervalle de 126 jours.

Il a gelé, pendant les matins et les soirs, en A. 181 jours, en H. 161 jours, et en E. 13 jours; il n'a pas gelé, à midi ou bientôt après midi, et la plupart pendant les vingt-quatre heures et des mois entiers sans interruption, en A. 236 jours, en H. 63 jours, et en E. 184 jours.

La rivière Newa, après avoir été couverte de glaces du 11 au 12 de Décembre 1807, débâcla le 25 d'Avril après midi 1808, conséquemment après un intervalle de 136 jours. Du 28 au 29 Novembre 1808, elle se couvrit de nouvelles glaces, ayant été ouverte pendant 217 jours.

III. VENT.

Tableau général de la force et de la direction des vents pour chaque mois de l'année 1808.

Mois	calme	La force des vents			Rapport de la direction des vents			
		vent faible et médiocre	vent fort	vent très-fort et violent	Nord	Est	Sud	Ouest
	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours
Janvier	2	17	6	6	3	4	14	8
Février	4	15	6	4	6	6	8	5
Mars	15	12	1	3	5	3	2	6
Avril	3	15	8	4	4	8	9	6
Mai	6	16	5	4	7	6	4	8
Juin	7	16	6	1	5	8	6	4
Juillet	3	14	12	2	9	6	6	7
Août	7	17	6	1	5	6	7	6
Septembre	1	20	6	3	7	3	7	10
Octobre	2	15	8	6	2	6	17	4
Novembre	1	17	7	5	6	6	9	8
Décembre	7	18	4	2	2	9	12	1
A.	58	192	75	41	61	73	101	73
H.	28	84	39	31	28	28	55	43
E.	26	98	43	17	35	37	47	49

Les mois de Janvier, de Février, d'Avril, de Juillet, d'Octobre et de Novembre ont été les plus venteux ; ceux de Mars, de Juin, d'Août et de Décembre les plus calmes. L'hiver (H.) a été presque aussi calme que l'été (E.), qui l'a suivi dans le rapport de 26 : 28 ou 13 : 14.

Le vent dominant était dans l'année celui du Sud.

IV. L'ÉTÂT DE L'ATMOSPHÈRE.

Mois	Ciel			brouillard	pluie	l'arc-en-ciel	tonnerre et éclaire	grêle	gelée blanche	neige	paraselenes	l'aurore boréale
	serein	nuages	couvert									
	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours
Janv.	2	11	18	5						14	2	
Févr.	4	16	9	7					1	9	1	
Mars	12	16	3	13				1		6	3	
Avril	2	22	6	5	3					12		
Mai	9	13	9	9	8			1	3			
Juin	2	27	1	8	11	2	4			1		
Juill.	5	23	3	12	11	2	5					1
Août	1	23	7	12	19		5	1				
Sept.	4	24	2	11	10	2	2				1	
Oct.	1	19	11	13	10				2		2	
Nov.	2	15	13	4	2				3	15	3	
Déc.	4	10	17	11						18	3	
A.	48	219	99	110	74	6	16	3	9	75	15	1
H.	21	80	81	44	13			1	2	59	9	
E.	22	129	33	65	69	6	16	2	5	1	3	1

On voit par l'inspection de cette table : 1) que le nombre des jours entièrement sereins a été le plus grand en Mars et en Mai; 2) que dans les mois de Janvier, Avril, Juin et Novembre on a compté deux jours sereins, et dans le mois d'Août ainsi qu'en Octobre un seul jour serein ; 3) qu'il y en avait en hiver (H.) presqu'autant qu'en été (E.).

Cette année-ci il neigea pour la dernière fois du 13 au 14 de Juin, et pour la première fois du 2 au 3 de Novembre, après un intervalle de 142 jours.

Il tonna pour la première fois le 8 de Juin à 2 heures après minuit, et pour la dernière fois le 11 Septembre à 3 heures après midi.

Cette année-ci, ainsi que l'année passée, je n'ai pu remarquer qu'une seule aurore boréale du 23 au 24 du mois de Juillet.

Le 29 Décembre vers les 3 heures après midi il m'est arrivé d'observer deux couronnes, ou, pour parler plus proprement, deux colonnes verticales autour du soleil. Les couleurs de ces deux colonnes ont été à-peu-près celles de l'arc-en-ciel.

III.
SECTION
DES
SCIENCES POLITIQUES.

DE L'EMPLOI DU CRÉDIT POUR SUBVENIR AUX BESOINS DU GOUVERNEMENT DANS LES ÉTATS MODERNES ET PARTICULIÈREMENT EN RUSSIE.

PAR

H. S T O R C H.

Présenté à la Conférence le 8. Juillet 1818.

Dans la situation où se trouvent les puissances de l'Europe, le revenu annuel de chacune d'elles suffit tout au plus pour les dépenses publiques en tems de paix; c'est déjà l'effet d'une administration sage et bien ordonnée quand il y suffit: mais aucun État, quelque bien gouverné qu'il soit, ne peut soutenir la guerre la plus courte et la moins onéreuse avec ses revenus ordinaires. Il lui faut donc, pour ce cas, des ressources d'un autre genre.

Les moyens qu'on a imaginés et tentés jusqu'ici, peuvent se comprendre sous les six chefs suivans:

1°. L'établissement d'impôts extraordinaires pendant la durée de la guerre;

2°. L'accumulation d'un trésor en tems de paix;

3°. La fonte de la vaisselle;

4°. Les subsides des puissances alliées;

5°. La création d'un papier-monnaie;

6°. Enfin l'emploi du crédit.

52 *

L'établissement d'impôts extraordinaires pendant la guerre est une mesure évidemment insuffisante. Souvent la dépense d'une seule campagne équivaut au revenu annuel de l'État : or quel est le peuple qui pourrait supporter le doublement subit de ses impositions ?

L'accumulation d'un trésor en tems de paix a été souvent pratiquée par les gouvernemens de l'antiquité ; mais cette mesure est devenue également insuffisante dans nos tems modernes et depuis que l'invention des armes à feu a rendu la guerre infiniment plus dispendieuse. Les Rois de Prusse avaient autrefois pour principe d'amasser un trésor pour subvenir aux fraix de la guerre ; cependant l'expédition de *Fréderic-Guillaume* contre la France révolutionnaire en 1792 a bien prouvé qu'un trésor, même considérable, ne suffit point pour soutenir une guerre tant soit peu prolongée. D'ailleurs cette mesure a l'inconvénient d'enfouir, longtems avant qu'on en ait besoin, des valeurs qui auraient pu contribuer à enrichir la nation si elles fussent restées dans la circulation.

La *fonte de la vaisselle* est une ressource bien plus pauvre encore, comme l'expérience l'a démontré en plusieurs occasions, par exemple en France, sous *Louis* XIV, pendant la guerre de la succession d'Espagne, et dans le commencement de la guerre occasionnée par la révolution. À cette dernière époque, toute la somme provenue de la vente des vases sacrés et des autres ornemens des églises dans ce pays si grand et si riche ne s'éleva pas au-delà de 45 millions de francs, ou de $11\frac{1}{4}$ millions de roubles d'argent; somme qui pouvait à peine suffire pour continuer la guerre pendant deux mois [1]. Le montant de la vaisselle que les parti-

(1) *Des finances de la République Française en l'an IX, par* Ramel, *ministre des finances, pag.* 36.

culiers offrirent à cette occasion, doit avoir été encore plus modique, puisque Mr. *Ramel* n'en fait aucune mention dans son rapport.

Les *subsides des puissances alliées* sont quelquefois d'un grand secours pour supporter les fraix d'une guerre; mais cet expédient suppose des circonstances qui ne se rencontrent que rarement. Il faut d'abord qu'on ait des alliés; ensuite que ces alliés soient disposés à faire de pareils sacrifices pour la cause commune; enfin qu'ils soient assez riches pour les faire. Et lors même que toutes ces conditions se trouvent remplies, la dépendance dans laquelle la puissance salariée se met à l'égard de celle qui la paye, a presque toujours des suites fâcheuses pour la première et nuit le plus souvent aux opérations de la guerre. D'ailleurs une guerre ne peut jamais être faite avec les seuls subsides qu'on reçoit; la nation en porte toujours le principal fardeau.

La *création d'un papier-monnaie* est à la vérité une ressource prompte, facile et commode, mais sous ces apparences trompeuses elle cache des fruits amers. La quantité de numéraire dont une nation a besoin pour sa circulation, est déterminée de la manière la plus rigoureuse, par la valeur de ses achats et de ses ventes, et par la vitesse que le numéraire met à circuler: une nation ne peut guère posséder ni plus ni moins de numéraire que ce que ces deux rapports exigent. Si elle n'a d'autre numéraire que de l'or et de l'argent, et qu'une circonstance extraordinaire lui en enlève une partie, le déficit est sur le champ réimporté des pays étrangers; car dans ce cas l'argent devient cher chez elle et ses marchandises baissent de prix, de sorte que tous ses voisins trouvent leur profit à lui envoyer de l'argent et à tirer d'elle des marchandises. De même lorsqu'une circonstance extraordinaire lui amène plus d'argent que sa circulation n'en exige, le surplus est sur le champ réexporté; car dans ce cas l'argent baisse de prix chez elle, et ses marchandises renchérissent, de sorte que ses marchands

trouvent leur profit à importer des marchandises étrangères qui sont à bas prix, et à les payer avec de l'argent qui vaut moins chez eux que chez l'étranger. Ainsi quand une nation n'a d'autre numéraire que les monnaies d'or et d'argent, elle en a toujours la quantité qu'il lui faut, ni plus ni moins.

C'est bien autre chose quand le gouvernement crée un papier-monnaie. Celui-ci n'a point de valeur hors des limites du pays; ainsi quand on en met trop en circulation, le surplus ne peut s'exporter nulle-part, et la masse entière du papier reste dépréciée, à moins que le gouvernememt ne retire l'excédent de la circulation pour l'anéantir. Mais autant qu'il est aisé de multiplier le papier-monnaie, autant il y a de difficultés pour le restreindre. À mesure que le papier baisse, les prix du travail et de toutes les marchandises haussent: en conséquence, lors même que le gouvernement augmente les impôts, son revenu n'en est augmenté que nominalement, et il est aussi peu en état qu'auparavant de racheter le papier. Celui-ci reste donc déprécié; et sa valeur incertaine flotte au gré des opinions populaires et des manœuvres des agioteurs. Or cet état des choses est une des plus grandes calamités qui puissent frapper une nation. Comme le numéraire est la mesure du prix de toutes les choses, comme on s'en sert pour exprimer la valeur de toutes les transactions pécuniaires, il n'y a personne qui ne souffre plus ou moins quand sa valeur devient incertaine. Le développement de ces vérités me conduirait ici trop loin; ceux de mes lecteurs qui seraient curieux de connaître toute l'étendue des maux que produit un papier-monnaie déprécié et variable, me permettront de les renvoyer à mon Cours d'Économie politique. Ce que je viens de dire suffit pour prouver que l'émission d'un papier-monnaie est une ressource plus praticable à la vérité que les précédentes pour subvenir aux fraix d'une guerre, mais aussi bien plus ruineuse lorsqu'on n'en use pas avec la plus grande circonspection.

Chez une nation qui n'a d'autre numéraire que des espèces métalliques, la création d'un papier-monnaie pour faire face aux dépenses extraordinaires et instantanées d'une guerre, peut se justifier aux yeux d'une saine politique, pourvu que le gouvernement s'empresse de racheter son papier aussi-tôt après la guerre. L'effet qui résultera de cette mesure, dans des circonstances pareilles, sera d'expulser de la circulation autant de monnaie métallique qu'il y est entré de papier; et d'y faire ensuite revenir la première, à mesure que le papier est retiré de la circulation. C'est en agissant avec ces précautions, que le gouvernement de Prusse a trouvé deux fois dans un court espace de tems une ressource précieuse dans la création d'un papier-monnaie. Mais si, au lieu de racheter le papier pendant la paix, on le laisse subsister, et qu'en entreprenant de nouvelles guerres on l'augmente au point de chasser du pays toute monnaie métallique ou à-peu-près, cette opération devient déjà très-nuisible, et cela sous deux rapports: 1°. le gouvernement se prive pour l'avenir de ce moyen, et 2°. il expose son papier à se déprécier; car du moment que le papier reste seul dans la circulation, sa valeur devient variable, et le public, effrayé de la disparition des espèces, commence à s'en défier. Enfin si le gouvernement persiste à suivre ce système, lors même qu'il n'y a que du papier dans la circulation, la baisse du papier devient progressive, et c'est alors qu'il entraîne les suites pernicieuses qui le rendent un fléau également terrible pour les peuples et pour les gouvernemens.

Reste à considérer la sixième ressource, les *emprunts*. Ceux-ci peuvent se faire de différentes manières et avec plus ou moins de facilités pour la nation et le gouvernement: il convient donc de caractériser ceux qui présentent le plus d'avantages.

Les emprunts publics peuvent se faire dans l'intérieur du pays et dans l'étranger. Pour un pays dont l'industrie est encore

à se développer, il est avantageux d'admettre les étrangers dans les emprunts, afin de ne pas retirer trop de capitaux à l'industrie domestique; d'ailleurs par ce moyen le gouvernement pourra se procurer des fonds à moins de fraix, car parmi les nations étrangères ce ne seront que les plus riches qui lui prêteront; et plus une nations est riche, plus l'intérêt est bas chez elle.

Un gouvernement qui emprunte peut convenir avec ses prêteurs d'un terme à l'échéance duquel il les payera; il peut aussi emprunter sans fixer de terme pour le remboursement: or cette dernière méthode est plus avantageuse pour le gouvernement, parce qu'elle lui laisse la faculté de se libérer de ses dettes quand il en a les moyens. Dans les *emprunts sans terme* l'intérêt ou la rente s'appelle une *rente perpétuelle.* Le capitaliste qui prête ses fonds à cette condition n'est cependant pas privé par là de la faculté de les retirer à volonté; car les titres de sa créance étant transmissibles, il peut les vendre. D'un autre côté, un gouvernement qui emprunte sans terme n'a pas l'intention de rester éternellement débiteur: au contraire, s'il entend bien ses affaires, il affecte, outre la somme annuelle nécessaire pour acquitter l'intérêt, une autre somme proportionnée pour racheter chaque année une portion de ses engagemens, afin de diminuer sa dette. Ainsi les créanciers de l'État qui veulent vendre leurs titres, trouvent toujours un capitaliste prêt à les acheter, savoir le gouvernement lui-même, ce qui maintient leur prix.

C'est cette somme annuelle affectée au rachat d'une dette publique qu'on nomme son *fonds d'amortissement.* Pour accélérer l'extinction de la dette, on y ajoute encore les arrérages des rentes dont il a déjà racheté les titres. Par ce moyen une dette, par exemple, qui porte une rente perpétuelle de 6 pour cent, et dont le fonds d'amortissement est de 2 pour cent, peut être entièrement éteinte au bout de 24 années. C'est à l'institution d'un

pareil fonds d'amortissement qu'il faut surtout attribuer le crédit si longtems soutenu du gouvernement d'Angleterre, qui, malgré sa dette immense, trouve encore des prêteurs qui lui confient leurs capitaux, aux mêmes conditions qu'on prêterait à un bon débiteur ou à un gouvernement non obéré.

On voit que le grand avantage qui résulte pour un État de la faculté d'emprunter, c'est de trouver promptement les secours extraordinaires que réclament les besoins du moment, et d'en répartir les charges sur un grand nombre d'années. Quant aux inconvéniens des emprunts publics, on ne leur connaît que deux: celui de retirer les capitaux des usages productifs; et celui de faire monter l'intérêt. Mais si le gouvernement a besoin de fonds pour la défense du pays (et c'est le cas que nous supposons toujours) il ne s'agit pas d'éviter tous les inconvéniens, mais de choisir le moyen qui en présente le moins. Or comme ce sont les emprunts, nous pouvons établir en principe qu'ils sont le seul moyen recommendable pour faire face aux dépenses extraordinaires qu'exige la défense du pays. Au reste ce principe est reconnu et pratiqué par tous les gouvernemens éclairés; et si plusieurs d'entre eux ont pu soutenir des guerres qui semblaient surpasser leurs moyens, c'est à l'application de ce principe qu'il faut surtout attribuer cet effet. Il est vrai que le crédit public, cet excellent moyen de défense, est encore souvent devenu un moyen d'attaque, et qu'il a multiplié et prolongé les guerres: mais où est l'invention utile dont les hommes n'ayent pas abusé? Dans l'état actuel des choses, aucun gouvernement ne peut se passer de crédit, sans se trouver dans une infériorité manifeste à l'égard de ceux qui s'en servent. C'est comme si on vouloit rejeter une nouvelle arme que les autres emploient avec succes.

Mais l'emprunt n'est pas seulement la ressource la plus recommandable pour subvenir aux dépenses de la guerre; c'est en-

core le meilleur moyen pour tirer un État des embarras où ses finances peuvent se trouver à la suite de guerres qu'on a soutenues sans faire des emprunts. Un gouvernement, par exemple, qui, pour faire face aux dépenses de la guerre, aurait augmenté son papier-monnaie au point de le déprécier fortement, ne trouverait pas de moyen plus expéditif et moins onéreux pour en diminuer la masse et par conséquent pour en relever la valeur, que d'ouvrir un emprunt et d'anéantir tout le papier qui lui rentrerait par cette voie. Sans doute que l'exécution de cette mesure le met dans la nécessité de payer un intérêt et d'assigner un fonds pour l'amortissement du capital; mais lors même qu'il serait forcé d'imposer pour cet effet le peuple, le surplus de charges qui en résulterait pour celui-ci, ne serait rien en comparaison de l'immense avantage que lui procurerait la hausse de son papier et la stabilité que sa valeur attendrait quand l'opération serait achevée. Mais dans un pays dont la population, l'industrie et la richesse vont toujours en augmentant, et où par conséquent les impôts subsistans rendent davantage d'année en année, sans qu'on ait besoin de les hausser ou de les multiplier; dans un tel pays, dis-je, le gouvernement, s'il est économe et bien-intentionné, trouvera peut-être moyen d'épargner au peuple de nouveaux sacrifices pour cet objet: la simple réduction de ses dépenses le mettra peut-être en état d'assigner un fonds annuel suffisant pour payer et l'intérêt des sommes empruntées et la portion du capital qui doit les amortir successivement. Dans ce cas, l'opération joindrait au caractère d'utilité publique qu'elle porte toujours, celui d'une bienfaisance paternelle qui la rendrait doublement précieuse.

Telle est la mesure qui vient d'être ordonnée en Russie par le Manifeste du 16 avril 1817. Régler les dettes de l'Empire, leur affecter à tous un intérêt proportionné au taux usuel; assurer le payement exact de cet intérêt; créer un fonds d'amortissement pour leur extinction successive; rétablir la valeur des assignats en

réduisant leur masse; fonder par toutes ces mesures un système de crédit public qui, dans le cas d'une guerre future, ne force plus le gouvernement de recourir à l'augmentation de son papier-monnaie; enfin consommer toutes ces opérations importantes sans augmenter les charges du peuple : voilà le plan que le gouvernement s'est tracé et qu'il a fait connaître par ledit Manifeste et le Réglement qui y est joint. Un but si utile, des moyens si bien choisis, des efforts si généreux, commandent la reconnaissance; mais ce sentiment ne doit point rester stérile : il faut que la confiance du public vienne au devant des mesures salutaires du gouvernement; et pour que cette confiance naisse, pour qu'elle se soutienne, il importe d'approfondir ces mesures.

Avant de caractériser plus amplement l'opération dont il s'agit, il est nécessaire dr donner une idée de la masse et de la nature des dettes dont le réglement et l'extinction successive doivent s'opérer par son moyen. Les données que je vais fournir à cet égard, ne sont que très-imparfaitement connues; mais le public peut s'y fier, car elles sont puisées dans les bonnes sources.

Toutes les dettes de l' Empire, de quelque nature qu'elles soient, peuvent se classer sous deux divisions : les *dettes portant intérêt* ou devant en porter, et les *assignats*.

Les *dettes portant ou devant porter intérêt* se subdivisent en trois espèces :

1°. La *dette extérieure*, contractée en Hollande sous les règnes précédens. Elle vient d'être réglée définitivement par la Convention du 3 mai 1815. Son montant est de cinquante millions de florins de Hollande, et elle s'éteindra successivement dans l'espace de cent-quatre années.

2°. Les *dettes intérieures à terme*. Elles comprennent : *a*) l'emprunt fait au Lombard, *b*) celui ouvert aux particuliers en 1809, et *c*) les dettes contractées par l'achat de quelques bien-fonds [2]. Toutes ces dettes sont à courte échéance, et doivent être finalement remboursées dans le courant de huit années. Elles se montent à cinquante millions de roubles environ, et exigent dans les années les plus difficiles jusqu'à treize millions par an, les fonds de remboursement et les intérêts pris ensemble. Si elles étaient converties en dettes sans terme, le tiers des sommes qu'elles coûtent actuellement à l'État, suffirait pour les éteindre en moins de quatorze années.

3°. Les *dettes intérieures flottantes et exigibles à tout instant*. Celles-ci comprennent : *a*) les avances faites à la trésorerie par la banque d'emprunt, par le département des appanages et par les chambres de prévoyance (приказы общественнаго призрѣнія) dans les gouvernemens. Ces dettes portent six pour cent d'intérêt. *b*) Les dettes contractées par le département de la guerre envers les fournisseurs des armées. Celles-ci, à la vérité, ne portent point d'intérêt; mais comme les prix des objets fournis ont été en raison des délais et de l'incertitude des payemens, elles coûtent probablement à l'État bien au-delà du montant de l'intérêt.

La masse totale des dettes (en évaluant celle de Hollande suivant le change actuel) ne s'élève pas encore au montant du revenu annuel de l'Empire; ainsi, comparativement aux dettes de la plupart des autres puissances de l'Europe, elles sont peu considérables; et elles le sont encore moins quand on les compare aux ressources de l'Empire.

---

(2) L'emprunt intérieur de 1810, qui était de vingt millions payables en monnaie d'argent, à raison de 50 copeks d'argent pour un rouble en assignats, n'est plus compris dans cette liste, puisque le remboursement s'en est effectué depuis le 15 juillet 1817, et que cette dette se trouve complètement éteinte dans ce moment.

Le montant des *assignats* en circulation, à l'époque où le gouvernement arrêta leur émission en 1810, était évalué à 577 millions de roubles. Comme on n'a point l'intention de les supprimer tout-à-fait, mais seulement d'en diminuer la masse pour les porter au pair avec la monnaie d'argent, la quantité à supprimer ne peut point être calculéé avec certitude.

Telles sont les dettes à éteindre: voici les moyens qu'on emploira à cet effet.

Pour parvenir à ce but, le gouvernement n'établit aucun nouvel impôt; mais il maintient ceux qui, pour le même objet, avaient été créés en 1812, et que l'urgence des besoins de l'État pendant la guerre avait fait détourner de leur destination primitive. Comme le montant de ces droits est plus ou moins variable, le gouvernement leur substitue un revenu fixe et provenant d'une des sources les plus solides du revenu public: il assigne pour cet objet, jusqu'à l'entière extinction de toutes les dettes, un *fonds annuel de soixante millions de roubles en assignats*, devant être prélevé sur le revenu des domaines de la Couronne. L'application de ce fonds au but indiqué, de même que toutes les opérations *y* relatives, sont l'objet d'une Commission particulière, nommée la *Commission pour l'amortissement des dettes de l'Empire*. Cette Commission, ainsi que la banque d'assignats et celle d'emprunt, se trouvent soumises à la surveillance d'un *Conseil*, composé de trois membres du gouvernement et de douze députés de la nation. Les premiers sont: le Président du Conseil de l'Empire, le Ministre des finances et le Contrôleur des finances; parmi les autres membres, six sont élus par la noblesse et autant par le commerce. Ce Conseil examine chaque année la situation du crédit public dans toutes ses branches et sous tous ses rapports; il rend compte à l'*Empereur* de toutes les opérations faites par la Commission et de leur résultat; et ce rapport est rendu public par la voie de l'impression. Si dans l'a-

venir on trouvait nécessaire d'apporter quelques modifications aux mesures adoptées, ces changemens ne pourront être proposées au *Souverain*, sans avoir préalablement subi l'examen du Conseil et obtenu son approbation.

Le fonds annuel destiné au payement des dettes est divisé en deux portions égales: trente millions pour l'extinction des dettes portant intérêt, et autant pour la diminution des assignats (3). À mesure que les dettes de la première espèce s'éteignent, l'excédent des trente millions destinés à cet usage vient grossir le fonds pour l'amortissement des assignats, de sorte que le total de 60 millions est toujours délivré chaque année pour le même objet, jusqu'à l'extinction de toutes les dettes actuellement existantes et jusqu'au parfait rétablissement de la valeur des assignats. Si à l'avenir le gouvernement trouvait nécessaire d'ouvrir un nouvel emprunt, afin de faire face à des dépenses extraordinaires et imprévues, il aura soin d'assigner un nouveau fonds d'amortissement, uniquement pour cet emprunt.

Ainsi la dette de l'Empire actuellement existante est une *dette fondée* ou *consolidée*, puisque le gouvernement lui affecte une somme annuelle, séparée de tous ses autres revenus et dépenses, et uniquement destinée au payement de cette dette et des intérêts qu'elle porte.

Les dettes, soit extérieures, soit intérieures, sont pour la plupart, comme nous l'avons vu, des *dettes à terme*. Le payement des intérêts et le remboursement du principal de ces dettes s'effectueront sans qu'il soit rien changé aux stipulations, sauf les arrangemens pris ou qui seront pris de gré à gré avec les créanciers. Les titres

---

(3) La Commission n'étant entrée en activité que depuis le 1er de Septembre 1817, le fonds d'amortissement pour cette année n'a été fixé qu'à quarante millions, dont 30 étaient destinés au payement des dettes, et 10 à diminuer la masse des assignats.

de leurs créances sont transmissibles et peuvent servir comme sûretés, pour l'accomplissement d'un engagement pécuniaire.

Les créanciers de l'État qui ont des titres à terme peuvent les convertir en *titres sans terme*. Dans ce cas leurs créances jouissent des avantages suivans :

Un titre sans terme rapporte à son possesseur une *rente perpétuelle de 6 pour cent* par an, payable tous les six mois. Tout propriétaire de pareils titres peut les vendre ou les engager en totalité ou en partie. Il lui est également permis de leur attribuer toutes les qualités et prérogatives d'un *bien-fonds* et même celles d'un *majorat*, pourvu que le capital qu'ils représentent ne soit pas au-dessous de cinq-mille roubles ; il peut aussi les rendre *inaliénables*, en assignant la rente à tel établissement, à telle personne ou à telle destination qu'il juge convenable.

Les étrangers peuvent participer aux avantages des titres sans terme, à l'égal des sujets de l'Empire. Le payement des rentes perpétuelles, de même que celui des dettes à terme, se continuera en tems de guerre comme en tems de paix, sans égard aux rapports hostiles dans lesquels la Russie pourrait se trouver avec la nation à laquelle appartient le créancier. Si un étranger, créancier de l'Empire, vient à mourir sans testament ou autres dispositions particulières, les titres de sa créance passent à ses héritiers, d'après les lois de son pays.

Les capitaux placés à rentes perpétuelles ne peuvent être saisis ni mis sous sequestre, ni pour les prétentions de la Couronne ni pour celles des particuliers, le cas excepté où le possesseur aurait livré ses titres comme sûretés. Pareillement ces capitaux ne seront jamais assujétis à aucune redevance ou imposition.

Personne ne peut être forcé d'accepter le remboursement de sa créance; mais pour faciliter la vente de leurs titres à ceux des créanciers qui veulent s'en désaisir ; la Commission les rachète au

taux de la place, et emploie chaque année à cet effet un fonds déterminé, outre celui affecté au payement des rentes perpétuelles. Ce fonds d'amortissement a été dans l'origine de deux pour cent du montant total des dettes sans terme, mais il s'accroît successivement par les arrérages des rentes dont il a racheté les titres.

Dès la publication du Manifeste, les sommes suivantes, qui étaient à la disposition de la Couronne, ont été converties en dettes consolidées sans terme : 1°. Les capitaux appartenant à la famille *Impériale* qui se trouvent au département des appanages ; et 2°. ceux appartenant aux chambres de prévoyance, aux fondations pieuses, aux établissemens publics et aux tribunaux, lesquels ne peuvent jouir que des intérêts, sans toucher au capital. Quant aux capitaux de ces mêmes corporations qui se trouvent placés à la banque pour un tems quelconque ou jusqu'à requisition, ils y restent placés sur le même pied qu'auparavant.

Peuvent également être convertis en dettes consolidées sans termes, au gré des créanciers, les sommes que les particuliers ont à prétendre pour contrats et fournitures faits au département de la guerre en divers tems et jusqu'à l'année 1816, aussi-tôt que leurs prétentions sont reconnues valides.

Toutes les dettes consolidées de l'Empire sont inscrites dans le *Grand Livre*, destiné à constater l'état de chaque dette, les progrès de son remboursement et de l'acquit exact des intérêts ou rentes. Le Grand Livre est muni du sceau de la Commission, de la signature du ministre des finances et de celle du chef de la Commission et de ses membres. Il y en aura deux exemplaires, exactement conformes l'un à l'autre ; l'un sera gardé au ministère des finances, l'autre à la Commission.

Le Grand Livre a trois parties : la première pour la dette étrangère ou l'emprunt fait en Hollande, la seconde pour les dettes

intérieures à terme, et la troisième pour les dettes sans terme. Cette dernière a quatre sous-divisions: 1°. pour les dettes ordinaires de cette espèce; 2°. pour les capitaux inaliénables dont la rente perpétuelle est affectée à l'entretien d'établissemens publics; 3°. pour les capitaux formant des majorats.

En portant le nom d'un créancier sur le Grand Livre, la Commission lui délivre en outre un billet pour certifier cette inscription. Pour les dettes à terme, particulièrement les dettes étrangères, les créanciers conservent les obligations dont ils sont munis, sans qu'il y soit fait aucun changement.

Les inscriptions sont transportables d'un individu à l'autre, soit en entier, soit en partie, pourvu que les sommes transférées ne soient pas au-dessous de cent roubles et qu'elles soient des sommes rondes. Cet arrangement présente aux commerçans et aux gens d'affaires des facilités pour le payement de grosses sommes, telles qu'une banque de dépôt les offre. Le transfert s'effectue à St. Pétersbourg, a la Commission, deux fois par semaine; dans les autres villes de l'Empire par devant les tribunaux civils de gouvernement ou de district; dans l'étranger par devant les missions ou consulats de Russie, à moins que les propriétaires ne veuillent l'effectuer par leurs fondés de pouvoir à St. Pétersbourg.

Si quelqu'un perd une inscription, il suffit qu'il en donne sur le champ avis à la Commission qui le publie dans les gazettes du pays et étrangères; et si au bout de 18 mois l'inscription ne s'est pas retrouvée, elle est regardée comme nulle et la Commission en delivre une nouvelle.

Les titres des créanciers de la dette fondée sont reçus comme sûretés par les tribunaux et les offices de la Couronne, pour 60 pour cent de leur valeur nominale; entre particuliers, suivant les stipulations qui se font de gré à gré. Ne peuvent être ni transférés ni donnés comme sûretés les titres des capitaux de fa-

mille ou inaliénables, puisque ces opérations sont contraires à leur destination. Un titre livré comme sûreté ne cesse pas de rapporter à son possesseur l'intérêt ou la rente perpétuelle à laquelle elle lui donne le droit.

Si un créancier de l'État désire faire un emprunt à la banque d'emprunt, sur un titre qui n'est pas celui d'un capital inaliénable ou de famille, la banque peut acquiescer à cette demande, mais la somme qu'elle lui prête ne peut pas aller au-delà du quart de la valeur du titre.

Les rentes perpétuelles se payent deux fois l'année, savoir depuis le 15 Juillet jusqu'au 1er d'Août, et depuis le 15 Janvier jusqu'au 1er Février; le payement des intérêts pour les dettes à terme s'effectue pareillement deux fois l'année, depuis le 1er jusqu'au 15 Juillet, et depuis le 1er jusqu'au 15 Janvier; ce dernier terme est encore celui du remboursement successif des capitaux, à moins que les créanciers des dettes à termes n'aient désiré et stipulé d'autres époques pour le payement de leurs intérêts et de leurs capitaux. Ceux qui manquent de se présenter au terme fixé, sont obligés d'attendre le terme suivant pour toucher les sommes qui leur sont dues, et comme dans aucun cas la Commission ne paye un intérêt composé, ils reçoivent alors ces sommes sans accroissement d'intérêts.

Les payemens se font indifféremment, soit aux possesseurs des titres, soit aux personnes que ceux-ci ont muni de leurs plein-pouvoirs; on peut les toucher, soit à St. Pétersbourg, à la Commission, soit dans l'intérieur de l'Empire aux caisses publiques des villes de gouvernement ou de district. Dans ce dernier cas, il faut s'adresser à la Commission au moins quatre mois avant l'échéance du terme; autrement l'envoi des sommes dues est remis jusqu'au terme suivant. Les sommes envoyées par la poste aux lettres ne payent point la prime d'assurance établie pour ces envois.

Voilà pour ce qui regarde les dettes portant intérêt; quant aux mesures prises pour la *diminution des assignats*, elles se réduisent à ce qui suit.

Afin de relever la valeur des assignats, le gouvernement en diminuera successivement la masse, jusqu'à l'époque où leur taux se rapprochera de la valeur des espèces sonnantes. Les sommes qu'il destine annuellement à cette opération, sont de quatre espèces:

1°. Le fonds de 30 millions de roubles ci-dessus indiqué, et qui sera uniquement appliqué à cet effet.

2°. Les arrérages du fonds pour les dettes portant intérêt. À mesure que ce fonds sera libéré par le remboursement de ces dettes, il viendra grossir le fonds d'amortissement pour les assignats.

3°. Les sommes qui pourront rester chaque année des revenus de l'État, après avoir satisfait aux dépenses publiques.

4°. Les sommes qui rentreront à la Commission pour les bien-fonds vendus depuis 1810, et qui dès-lors furent destinées à diminuer la masse des assignats.

Pour accélérer la suppression des assignats, le gouvernement a recours aux *emprunts*. Les sommes qui entrent par ce moyen, sont brûlées publiquement; on en agit de même chaque année avec les fonds destinées à l'amortissement des assignats, après en avoir déduit les sommes nécessaires au payement des intérêts et au remboursement graduel du principal des emprunts.

Le premier emprunt a été ouvert depuis le 1er Juillet jusqu'au 20 Décembre 1817. On y a reçu toute souscription volontaire de fonds, tant de la part des sujets russes que des étrangers. Les fonds ont pu être versés, soit en assignats soit en obligations de la banque d'emprunt, ou en monnaie d'or et d'argent de Russie, mais pas autrement qu'en sommes rondes de centaines et pas moins de cent roubles. Pour tout capital versé on a accordé une prime

de 20 pour cent, de sorte qu'au lieu de mille roubles on a inscrit mille deux-cent roubles au profit de celui qui les avait fournis. De plus, en compensation des fraix que l'envoi des sommes par la poste ou leur remise par lettres de change avait pu occasionner, il a été accordé un pour cent de tout le capital versé, lequel a été décompté des sommes fournies. Ces fonds ont été inscrits sur le Grand Livre, comme dettes à rentes perpétuelles, et il en a été délivré des inscriptions dans la forme établie. Le payement des rentes, comptées à 6 pour cent de tout le capital inscrit, s'effectue dans la même monnaie qu'on a fournie, aux deux époques de l'année et de la manière indiquée ci-dessus. Ces payemens se font sur le fonds de 30 millions destiné à l'amortissement des assignats.

Les fonds versés dans ce premier emprunt se sont élevés à 28 millions de roubles en assignats; 38 millions ont été brûlés publiquement en avril 1818.

Telles sont les mesures les plus essentielles que le gouvernement a prises pour régler les dettes de l'Empire et pour en assurer l'extinction. Les principes qui servent de base à ce vaste projet, sont de nature à ne pouvoir être contestés que par l'ignorance; mais l'exécution pourrait sembler difficile, même à des esprits éclairés, s'ils sont prévenus par l'idée que le crédit public ne peut subsister que sous l'égide d'une forme de gouvernement représentative. Cette croyance, qui est assez générale, me paraît dénuée de tout fondement et démentie par l'expérience. Partout et dans tous les cas, le crédit public ou la confiance des prêteurs dans un gouvernement est en raison des *moyens* qu'il a d'accomplir ses promesses, et de la *volonte* qu'on lui suppose de les accomplir. Les moyens sont faciles à constater, et la volonté se juge sur la conduite antérieure du gouvernement à l'égard de ses créanciers. En conséquence un gouvernement représentatif dénué de ressources et ayant déjà manifesté sa mauvaise foi, aura moins de crédit qu'un

gouvernement monarchique ou obsolu auquel on connaît de grands moyens et qui n'a jamais violé ses engagemens. Souvent la conviction des moyens l'emporte même sur les craintes qu'inspire la mauvaise foi. La banqueroute que la France avait faite sous le Régent, n'empêcha pas les emprunts qui se firent sous *Louis* XV; et ces emprunts se conclurent à un intérêt plus bas que ceux du règne de *Louis* XIV, et à aussi bon marché que ceux qui se firent dans le même tems en Angleterre, proportion gardée du taux usuel de l'intérêt dans les deux royaumes. La réduction forcée des rentes sous *Louis* XV n'empêcha pas non plus les emprunts conclus sous *Louis* XVI. Tant il est possible à un gouvernement monarchique d'obtenir du crédit, lors même qu'il n'est pas très-religieux à remplir ses promesses, pourvu qu'on lui connaisse les moyens de les remplir. Désespérera-t-on après cela de voir le crédit public s'établir en Russie? Dans un pays qui conserve encore toute la vigueur d'un jeune État; dont la population, l'industrie et la richesse s'accroissent avec une rapidité qui fait l'étonnement de tous les observateurs; qui offre d'année en année de nouvelles ressources à son gouvernement, sans que celui-ci ait besoin d'augmenter ou de multiplier les impôts; dans un pays que sa position géographique, sa puissance militaire et le devouement de ses peuples paraissent garantir pour longtems de toute invasion étrangère; dans un pays enfin dont le gouvernement a toujours religieusement accompli ses engagemens avec ses créanciers, soit étrangers soit domestiques, quel que fut le caractère personnel de son Chef ou l'esprit dominant de son administration?

En consultant l'expérience des tems passés, il paraît qu'on n'a guère lieu de douter de la confiance du public envers le gouvernement de Russie. Toutes les fois que les Souverains de cet Empire ont fait l'appel aux capitalistes, jamais la confiance de ceux-ci ne leur a manquée; preuve les emprunts négociés à différentes reprises avec tant de facilité à Livourne, à Gênes, à Am-

sterdam, à Hambourg et dans l'intérieur de l'Empire. Tel est le crédit dont jouit ce gouvernement dans les pays étrangers, qu'en mars 1815, à une époque où le payement des intérêts de sa dette en Hollande avait été suspendu pendant trois ans, à cause de la guerre, ses promesses s'y vendaient encore au taux de 65 pour cent, et qu'elles remontèrent à 86 pour cent, du moment que la Convention du 3 mai parvint à la connaissance du public. Depuis que la banque d'emprunt et le Lombard de St. Pétersbourg existent, les étrangers y ont toujours placé des capitaux, et il y a eu des époques où le montant de ces dépôts étrangers n'a pas été loin de cent millions de roubles.

Au reste le tems résoudra bientôt la question si le crédit public peut s'établir en Russie. En supposant le problème résolu d'une manière favorable aux vues du gouvernement, et ses projets salutaires réalisés avec persévérance, voici quels en seront les heureux résultats :

1°. Le gouvernement et ses créanciers se verront débarrassés, le premier de toute gène dans le payement de ses dettes, les autres de toute incertitude à l'égard de leur remboursement. Les payemens du trésor se feront avec une régularité qu'il était impossible d'atteindre tant que la plupart des dettes étaient à terme ou flottantes et exigibles à tout instant ; et il en résultera une épargne remarquable dans tous les achats que fera le gouvernement et dans toutes les fournitures pour lesquelles il passera des contrats.

2°. Au bout d'un certain tems, susceptible d'être calculé, l'État se verra libéré de toutes ses dettes, exceptées celles dont les créanciers ne voudront point le remboursement ou dont les capitaux seront constitués inaliénables. Plus le montant de ces dernières sera considérable, plus l'extinction des autres en sera accélérée.

3°. Le système du crédit public une fois bien établi, le gouvernement, dans le cas d'une guerre future, ne sera plus forcé de recourir au moyen ruineux du papier-monnaie, mais il trouvera une ressource prompte et facile dans les emprunts ; et comme il a déclaré que les emprunts futurs doivent se faire sur la même base que ceux d'aujourd'hui, c'est-à-dire qu'on y affectera sur le champ un fonds annuel pour le payement des intérêts et le remboursement successif du capital, ces nouvelles dettes seront de même éteintes, chacune à une époque déterminée, et sans grever le trésor public d'une manière onéreuse.

Voilà les fruits que l'Empire recueillera du réglement de ses dettes, pourvu que l'exécution du plan adopté soit poursuivie avec persévérance. Quant aux effets que produira la diminution des assignats, cet objet est trop vaste pour être discuté dans ce Mémoire ; j'en réserve l'examen pour une autre occasion.

DES VARIATIONS DANS LES PRIX DES MARCHANDISES.

PAR

H. STORCH.

Présenté à la Conférence le 9. Déc. 1818.

Il faut distinguer trois espèces de variations dans les prix : les *variations réelles*, qui arrivent dans le *prix nécessaire* des marchandises et par suite dans leur prix courant; les *variations accidentelles*, qui n'affectent que le *prix courant* des marchandises, indépendamment de leur prix nécessaire ; enfin les *variations nominales*, qui proviennent des variations du numéraire.

1) *Des variations réelles.*

Le prix nécessaire des marchandises n'étant autre chose que les fraix qu'elles ont coûté à produire, il s'ensuit que les variations réelles ont lieu toutes les fois que ces fraix varient.

Ainsi le prix nécessaire des marchandises *baisse* quand les fraix de production diminuent. Ceci est possible de deux manières:

1°. Quand le prix des sources de production diminue, c'est-à-dire quand le taux des salaires, des rentes ou des profits baisse;

2°. Quand l' industrie se perfectionne. Dans ce cas les sources de production sont employées plus convenablement et elles donnent un plus grand produit, ce qui fait baisser le prix de ce produit.

De même le prix nécessaire des marchandises *hausse* quand les fraix de production augmentent. Ceci arrive:

1°. Quand le prix des sources de production s'élève;

2°. Quand l'industrie décline ou rétrograde.

La *baisse réelle* du prix des marchandises est presque toujours un *avantage* pour la société, quelle que soit la cause de cette baisse :

Car si elle est l'effet d'une *baisse dans le prix des sources de production*, et que cette baisse est à son tour l'effet de l'état progressif de la nation, la perte que font les possesseurs de ces sources sur le *taux* de leurs revenus, leur est compensée par la *multiplication* de leurs revenus (1) ;

Et si elle est l'effet du *perfectionnement de l'industrie*, la perte que font les producteurs sur le *prix de leurs produits*, leur est compensée par la *multiplication* des produits; car dans ce cas les moyens de production devenant plus puissans, la chose produite augmente toujours en quantité à mesure qu'elle diminue en valeur, ou plutôt elle ne diminue en valeur que parce qu'elle a augmenté en quantité.

En conséquence la baisse réelle est *favorable aux consommateurs sans être nuisible aux producteurs ni aux revenus que donnent les sources de production ;* elle est même favorable aux producteurs, car la baisse d'une denrée en multiplie le débit. Enfin comme tout producteur est en même tems consommateur, si la baisse s'étend sur d'autres produits outre les siens, il en profite encore comme consommateur.

---

(1) A mesure qu'une nation s'enrichit, les capitaux rapportent un intérêt moindre mais il y a plus de capitaux qui le rapportent ; les profits diminuent, mais il se fait plus d'entreprises et des entreprises plus vastes. Ainsi il y a toujours compensation, non-seulement pour la société, mais encore pour les individus: et cette compensation est double pour la société tant qu'elle continue à s'enrichir, puisque la baisse de la rente des capitaux et du profit d'entreprise est contrebalancée par la hausse des salaires et de la rente foncière. Chez une nation parvenue au faîte de l'opulence et où les salaires même baisseraient, il y aurait à la vérité compensation pour la société, quant à ce revenu, puisque, si les salaires étaient faibles, il y aurait plus d'ouvriers qui en gagneraient ; mais cette compensation n'en serait point une pour les individus, et la nation même retirerait moins de revenu net de la totalité des salaires.

Par la raison contraire, la *hausse réelle* du prix des marchandises est presque toujours un détriment pour la société :

Car si elle est l'effet d'une *hausse dans le prix des sources de production*, et que cette hausse n'est pas la suite naturelle de l'état progressif de la nation, les gains des possesseurs de ces sources sont autant de pertes pour les consommateurs;

Et si elle est l'effet du *déclin de l'industrie*, les producteurs en fournissant moins de produit, ne gagnent pas davantage qu'avant la hausse, et les consommateurs font des pertes en payant ce produit plus cher.

Ainsi, dans la première de ces suppositions, la hausse réelle est *favorable aux possesseurs des sources de production, mais elle est nuisible aux consommateurs ;* dans la seconde, elle est *nuisible aux consommateurs sans être favorable aux producteurs;* elle est même nuisible à ceux-ci, car la hausse d'une denrée en diminue le débit. Enfin, comme tout producteur est en même tems consommateur, si la hausse s'étend sur d'autres produits outre les siens, il y perd encore comme consommateur.

Ces principes sur les variations réelles du prix des marchandises nous offrent les deux conséquences que voici :

1°. Que le haut ou bas prix des denrées, lorsqu'il provient du prix nécessaire, est toujours de fort longue durée, puisque ce prix est le résultat de la situation progressive ou rétrograde de la nation, qui ne peut changer que graduellement avec le cours des siècles ;

2°. Et que, dans un pays riche, *la plupart des marchandises* sont toujours meilleur marché que dans un pays pauvre, à moins que des impôts excessifs n'y fassent naître une cherté artificielle. Je dis *la plupart* des marchandises; car la hausse de certaines marchandises, surtout des produits agricoles, est très-compa-

tible avec les progrès de la richesse nationale, et elle est même une suite de ces progrès.

2) *Des variations accidentelles.*

Les causes qui font hausser ou baisser le prix courant des marchandises, lors même que leur prix nécessaire ne varie point, se réduisent toutes à une seule cause générale : le dérangement de l'équilibre entre l'offre et la demande des marchandises. Quant aux effets de ces variations accidentelles, ils ne sont pas les mêmes dans la circulation intérieure que dans le commerce avec l'étranger.

Dans la *circulation intérieure* ces variations sont toujours *nuisibles*, car le gain que fait le vendeur est une perte pour l'acheteur, et réciproquement.

Dans la *circulation extérieure*, la hausse accidentelle des marchandises procure des gains à la nation qui les vend, et les pertes retombent sur la nation qui les achète. Pareillement la baisse accidentelle des marchandises cause des pertes à la nation vendeuse, et les acheteurs dans l'étranger *y* gagnent. Cependant, comme dans la règle les gains et les pertes de cette nature se compensent, il est probable que la richesse nationale en est fort peu affectée, quoique ces variations de prix puissent enrichir tels individus dans la nation et appauvrir tels autres.

Nous avons vu que le haut ou bas prix des marchandises, lorsqu'il provient du prix nécessaire, est toujours de fort longue durée : mais quand il provient du prix courant seulement, il est toujours plus ou moins passager, à moins qu'un monopole ne le maintienne forcément à ce taux ; et dans ce cas le haut prix seul est durable. En d'autres termes, les variations réelles sont rares et lentes; les variations accidentelles sont fréquentes et passagères.

3) *Des variations nominales.*

Toutes les fois que l'on compare la valeur d'une marchandise à celle d'*une seule* autre marchandise, fût-ce même l'or ou l'argent, on risque de se faire une idée fausse de l'une des deux valeurs; car on n'est jamais sûr laquelle des deux a varié. L'or et l'argent, comme toutes les autres marchandises, peuvent subir et subissent en effet des variations de prix réelles et accidentelles : ainsi une marchandise dont le prix est exprimé en or ou en argent, lors même que ce prix ne varie point, paraît cependant hausser quand la valeur de ces métaux diminue, comme il paraît baisser lorsque le contraire arrive. Dans ce cas ses variations ne sont que *nominales*, car dans le fond elle n'en subit point du tout.

L'erreur est encore bien plus facile lorsque les prix des marchandises, au lieu d'être exprimés en une quantité d'or ou d'argent fin, le sont en espèces monnayées. Celles-ci sont souvent dans le cas de perdre une portion du métal fin qu'elles contenaient dans l'origine; comme en achetant des marchandises avec de pareilles espèces dépréciées, il faut compenser par le nombre des pièces ce qu'elles ont perdu en valeur, le prix des marchandises paraît hausser, lors même qu'il ne varie point. Cette hausse est également une hausse *nominale*.

Quant aux *effets* des variations nominales, il n'en existe point, par la raison même que ces variations ne sont que nominales; les effets qu'elles paraissent avoir, sont ceux des variations dans la valeur du numéraire; ainsi il nous reste à considérer celles-ci.

La valeur des monnaies est exposée à varier par quatre causes différentes : 1°. par les variations inévitables que subit le prix des métaux précieux; 2°. par l'usure résultant du frottement que les monnaies subissent dans la circulation; 3°. par la cupidité des rogneurs d'espèces; et 4°. par les opérations monétaires du

gouvernement, lequel croit souvent trouver du profit à diminuer la quantité de métal fin contenue dans les monnaies en leur conservant les mêmes noms. La première de ces causes peut faire hausser ou baisser la valeur du numéraire; les autres le font toujours baisser.

Les effets de ces variations sont toujours plus ou moins *nuisibles. La hausse et la baisse le sont également;* car la première qualité requise dans le numéraire, c'est la *stabilité de sa valeur.* Un numéraire qui varie, soit qu'il hausse, soit qu'il baisse, jette de la confusion dans le rapport de toutes les valeurs échangeables, d'où résultent des gains et des pertes non-mérités, et les uns sont aussi pernicieux que les autres. Ce serait juger bien superficiellement de ces gains et de ces pertes, que de leur supposer un effet purement *négatif* pour la richesse nationale, pourvu qu'un citoyen gagne ce que son concitoyen a perdu. Sans doute de pareilles pertes n'appauvrissent pas directement la nation, comme de pareils gains ne l'enrichissent pas non plus; mais pour se convaincre du *mal positif et réel* qu'ils occasionnent, il suffit d'observer que ce sont des déplacemens de fortune injustes, c'est-à-dire que ces gains ne sont point acquis par une plus grande activité de travail ou une supériorité de mérite, et que les pertes qu'ils entraînent ne sont point provoquées par une conduite imprudente ou vicieuse. Or personne de disconviendra que les pertes non-méritées ne soient un mal réel pour la société, et les gains non-mérités ne lui sont pas moins funestes. Leur effet le plus commun est de faire contracter à ceux sur lesquels ils tombent des habitudes plus dispendieuses, de les inviter à la dissipation, à l'oisiveté et aux vices qui vont à leur suite. Ainsi ces gains, directement si nuisibles aux mœurs, deviennent encore indirectement nuisibles à la richesse nationale.

Tels sont les effets généraux des variations dans la valeur du numéraire, soit qu'il hausse, soit qu'il baisse. La baisse du numéraire

est encore particulièrement nuisible à ceux des habitans du pays qui subsistent d'un revenu fixe, stipulé en numéraire ; car dans ce cas leur revenu réel diminue en proportion de la baisse du numéraire, quoique leur revenu nominal reste le même. Si cette baisse n'était que l'effet des variations dans le prix des métaux précieux, ces calamités seraient bien rares ; mais comme elle a encore sa source dans la cupidité des hommes, cette circonstance la rend malheureusement trop fréquente.

Si les suites qui accompagnent les variations dans la valeur du numéraire sont déjà si nuisibles, qu'on juge à quel point elles doivent être funestes quand le numéraire n'est qu'un *papier* sans garantie, dont les variations journalières sont sans terme. Le commerce en est frappé de manière à devenir un jeu de hasard ; les prêts sont découragés, le crédit en souffre et l'on perd l'envie d'accumuler ; les gains et les pertes non-mérités se multiplient à l'infini ; enfin la plupart de ceux qui subsistent d'un revenu fixe, stipulé en papier, se voient réduits à la misère. Encore ces calamités sont-elles peu de chose en comparaison des désordres moraux qu'entraîne la chûte du papier-monnaie. Finalement, qu'on prenne le parti de l'éteindre ou de relever sa valeur, toujours on est obligé de faire faire à la nation de nouveaux sacrifices, lesquels retombent souvent sur les individus mêmes qui ont le plus souffert par sa dépréciation.

SUR L'ÉTAT ACTUEL DE L'ARPENTAGE EN RUSSIE.

PAR

C. T. HERRMANN.

Présenté à la Conférence le 10 Mars 1819.

Si l'Impératrine *Cathérine* II. n'avait acquis pendant son règne d'autres titres à la reconnaissance de ses sujets que celui d'avoir mis à exécution le projet d'arpentage, il suffiroit seul pour rendre son nom immortel.

Qu'on s'imagine un vaste Empire où l'étendue des terres de la Couronne, celle des proprietés particulières et surtout celle des biens appartenans aux différentes classes des paysans, n'avoit jamais été exactement déterminée; où les terres labourables avoient seuls quelque valeur et étoient vaguément désignées par le nombre de tschetwerts de sémailles; où quelques arbres, une grande pierre, un fossé, enfin les traditions transmises par les vieillards devoient suffire pour marquer les limites; où les bois, les lacs, les rivières, les paturages étoient considérés comme des biens de la Couronne dont l'usufruit étoit commun à tous: et l'on pourra prévoir les plaintes innombrables qui doivent résulter de cet état indécis des choses par suite du manque des titres valables, de l'oppression du foible et de la possession paisible des terres d'autrui pendant une longue suite d'années: du moment où la population auroit augmentée, les habitations se seroient rapprochées et les bois et fòrets, les lacs, les rivières et les paturages auroient acquis une valeur considérable en raison des progrés de l'industrie manufacturière, du commerce qui devoit s'étendre d'avantage, de l'organisation de l'armée et de la flotte, enfin par des bésoins artificiels qui se multiplient à mésure que la richesse nationale augmente.

Cet état de choses tout inconcévable qu'il paroisse à celui qui habite un pays cultivé et organisé dépuis plusieurs siècles, est pourtant très naturel dans un Empire immense, où la population n'étoit nullement proportionnée au terrain et où la sûreté dans les campagnes ne date que du commencement du 17me siècle; dans un Etat où des provinces entières étoient devastées par la guerre ou abandonnées par un faux système financier que l'on suivoit alors, où la famine êtoit assez frequente et où la peste s'étendoit quelquefois jusqu'aux contrées septentrionales.

Au commencement du 15me siècle (en 1436) l'on voyoit encore dépuis Moscou jusqu'aux frontières de la Pologne un vaste désert parsemé de villages brulés, où le voyageur trouvoit à peine un gite au milieu des ruines; et l'état des choses n'avoit pas changé en 1483. En 1625 le pays situé entre Moscou, Nowgorod et Plescou étoit même entièrement devasté et en 1661 il n'y avoit qu'un seul village entre Waesma et Mojaisk, c'est à dire sur une étendue de 130 werstes. La route dépuis Smolensk jusqu'à Moscou étoit dévenue dangereuse, non pas à cause des voleurs de grand chemin, mais à cause des loups qui infestoient cette contrée. Enfin depuis Kasań jusqu'à Astrachan l'on ne rencontroit plus d'habitations; mais ce qui paroit le plus étonnant, c'est qu'entre Wologda et Jaroslaw les habitans de 50 villages avoient abandonnés leurs cabanes pour vivre dans les bois comme des chasseurs, à cause des impôts exorbitants qu'ils étoient obligés de payer. La famine et la peste succedèrent naturellement à la devastation du pays, elle eut lieu en 1525, en 1601, en 1615, et Nowgorod perdit dans un hiver 18,000 habitans (1).

Le climat temperé du milieu de la Russie, la fertilité du sol, les bésoins des habitans ne suffisoient donc pas pour fairé cul-

---

(1) V. *Meiners* das alte und neue Rußland.

tiver la terre et peupler le pays ; ce fut l'avénement au trône de Russie de la maison *Romanoff* qui mit fin en 1613 aux troubles de l'intérieur et aména la paix avec les puissances étrangères; c'est ce gouvernement réstaurateur qui organisa l'administration et qui fit connaître et respecter la Russie au dehors ; en rétablissant la sûreté dans les campagnes il donna une nouvelle valeur aux terres labourables, ranima l'industrie, fit fleurir le Commerce et assura par là les progrès de la population, qui augmenta d'une année à l'autre au point de rendre l'arpentage des terres nécessaire. — Mais pourquoi cet arpentage n'eut-il lieu qu'en 1765 ? Ce fut à cause de la non-valeur des bois et forêts dans le plus grand nombre des Gouvernemens et des difficultés qui se trouvèrent à son exécution et différèrent cette mésure jusqu' à ce qu' elle devint absolument indispensable. Tant que les bois furent considerés comme bien commun à tous, il fut impossible de fixer exactement les limites des terres. Mais la communeauté des bois en Russie est prouvée d'abord par la nature des choses, car ils n'eurent aucune valeur tant que la plûpart des terres labourables ne furent pas cultivées et celles-ci ne purent l'être réguliérement, tant que la sûreté ne fut pas rétablie dans les campagnes; cette communeauté est prouvée d'ailleurs par la législation de *Pierre* le grand sur les bois et forêts; elle l'est enfin par l'opinion que les paysans de la Couronne ont eu sur la possession de leurs bois. *Pierre* le grand ayant appris que quelques propriétaires de terres, situées vraisemblablement dans des provinces où les bois commençoient à avoir quelque valeur, défendoient à leurs voisins de le couper sur leur territoire, ou qu'ils leurs vendoient ce droit moyennant quelque somme d'argent; ordonna de couper en conséquence tout le bois nécessaire par des hommes réunis en troupes de 15 à 20, afin qu'ils puissent opposer quelque resistance à tous ceux qui voudroient les en empêcher ; il menaça de la confiscation des biens, des travaux forcés dans les forteresses et même du Knout, ceux qui ôseroient défendre à qui que ce fut de couper du bois sur leurs terres (v. les Oukases du

11 Décembre 1719 et même du 18 Janvier, 20 Mars et 14 Avril 1720). Enfin lorsque *Pierre* le grand sentit la valeur des bois pour l'armée et la flotte, il defendit le 19 Juin 1719 sous les peines les plus rigoureuses et pour toute l'étendue de son Empire de couper les chênes, les ormes, les parables, et quant aux sapins, ceux de plus de 12 pouces de diamètre au dessus de la coupe, lorsque ces arbres se trouveroient dans l'espace de 10 verstes autour des petites rivières navigables qui se dechargent dans les grandes, et de 50 verstes autour des grandes rivières. Il ne devoit, donc rester que très peu de ces bois libres en beaucoup d'endroits. *Pierre* le grand rendit cet Oukase sans distinguer les terres des particuliers de celles de la Couronne, même sans faire mention des bois appartenants aux particuliers. Un Empéreur aussi juste qui n'a jamais attaqué les proprietés particulières, n'auroit pas pris cette mésure, il auroit au moins cherché à la justifier en alleguant des circonstances impérieuses, si les bois n'avoient pas été communs à tous. C'est pour ce motif qu'on les nommoit **общіе и вѣѣзжіе лѣса** (bois dont tous jouissoient en commun) et qu'on les évalouoit d'après une mésure usitée pour les routes, c'est à dire par verstes et non par une mésure agraire, qui n'étoit pas encore en usage en Russie. C'est pour cela enfin que les paysans de la Couronne répondirent encore en 1797 aux commissaires qui leurs demandoient à qui appartenoient ces bois: **мы владѣльцы** (nous en sommes les possesseurs). Or si les bois et forèts qui certainement alors formoient plus de la moitié de la surface, puisqu'ils en forment encore actuellement plus d'un tiers, n'entroient pas en ligne de compte, comment étoit-il possible de fixer les limites des terres avec quelque exactitude?

Mais la population qui vers la fin du règne de *Pierre* le grand s'eleva à 12,900,000 habitans des deux sexes sans compter ceux des provinces nouvellement conquises, monta sous *Elisabeth* à 14,644,000 personnes et au commencement du règne de *Cathérine* II. à 17,303,000. Dix-neuf établissemens nouveaux

vinrent grossir en 1723 le nombre des 50 manufactures, qui montèrent à 73 en 1736, elles étoient déja en 1762 au nombre de 408; enfin en 1765 il en éxistoit 502, dont les produits furent evalués pour cette dernière année à 2,790,110 roubles d' argent. Le commerce étranger sur la Baltique et sur la mer blanche devint considérable. Le nombre des batimens que les Hollandois envoyoient à Archangel étoit de 400; et les navires Anglois qui commerçoient avec St. Pétersbourg montoient à 1200. On comptoit en outre 100 batimens appartenans aux villes anséatiques et 100 autres des différentes nations. Un tableau sur l'exportation des manufactures russes en 1719 l'évalue à environ 500,000 roubles argent, mais un autre daté de 1733 porte précisement la somme à 402,561 roubles en argent formant le produit des objets exportés par les manufactures russes, dont 318,241 pour le compte de l'Angleterre.

La population et l'industrie faisant des progrès aussi considérables, la propriété territoriale qui sert de base à tout travail productif ne put rester plus long-tems indéterminée et c'est alors seulement que des difficultés sans nombre se presentèrent.

L'Impératrice *Elisabeth* conçut le project d'arpentage. Les propriétaires fonciers devoient produire les titres en vertu desquels ils possedèrent leurs biens; les paysans de la Couronne devoient recevoir une portion de terre qui leur étoit assignée par la loi. Un arpentage basé sur ces principes, qui paroissent aujourd'hui si justes et si naturels, produisit alors le même effet qu'une loi agraire chez les Romains, car un tel arpentage supposoit la révision des titres des possesseurs, mésure qui devoit bouleverser un grand nombre de fortunes, et produire la réduction des terres superflues dont les paysans de la Couronne jouissoient en paix dépuis plusieurs siècles. Aussi le mécontentement devint si général

que l'Impératrice renonça à l'exécution d'un projet salutaire et indispensable pour la sûreté des propriétés territoriales.

L'Impératrice *Cathérine* II. le reprit, mais elle donna d'autres bases à l'arpentage. Il ne s'agissoit plus de la révision des titres des propriétaires, ni de la réduction des terres superflues des paysans de la Couronne, mais de la confirmation du status quo de 1765, année normale pour les biens fonds en Russie. Toutes les prétentions dont les titres n'avoient pas été produits avant cette année, devoient être annullées (voyez l'Instruction pour le Comptoirs d'argentage Chapitre 22. §. 1. — 2). Enfin elle accorda aux paysans de la Couronne une si grande pièce de terres, qu'il est presque douteux que l'on ait pu en donner autant dans plusieurs gouvernemens, savoir 32 dessetines par famille et même 60, si l'étendue du terrain le permettroit (v. l'Instruct. etc. Chap. 19. §. 2. Chap. 13. §. 5. Chap. 24. §. 1. Chap. 32. §. 39).

Ces bases de l'arpentage devoient tranquilliser les propiétaires fonciers et il n'est prouvé par aucun exemple qu'il y ait eu des plaintes de leur part. Elles devoient satisfaire les prétentions les plus exagerées des paysans de la Couronne; et cependant leur mécontentement éclata dans quelques gouvernemens. (voyez l'Oukase du Septembre 1776).

La prudence avec laquelle cette grande Impératrice mit son projet en exécution servira toujours de modèle aux Gouvernemens qui veulent exécuter un projet salutaire mais difficile. L'oukase du 20. Septembre 1765 est un chef-d'oeuvre dans son genre, par la sagesse, la bonté, et la dignité qui y règnent. C'est une grande Souveraine qui instruit son peuple de ses interêts les plus chers, c'est une mère qui parle à ses enfans encore en bas-age. Elle promet sa bienveillance et sa haute protection aux propriétaires fonciers qui faciliteroient l'ouvrage des arpenteurs, elle compte sur le zele des véritables fils de la patrie, elle ménace par la même

Oukase, ceux qui entraveront cette mésure salutaire, de leur faire encourir les peines prononcées par la loi, elle ordonne que l'arpentage des terres des paysans de la Couronne ne se fasse qu'en présence d'un Magistrat, qui devra leur expliquer pourquoi l'on fait cet arpentage et leur dire que c'est pour leur assurer la possession tranquille de leurs terres, enfin pour leur propre avantage et que les Tribunaux recevront leurs plaintes s'ils se croient lesés (voy. Instruction Chap. 12. §. 29. et l'Oukase du - Septembre 1776). Elle engage le Clergé des campagnes d'instruire les paysans du but de l'arpentage, elle excuse même quelques exemples de désobéissance qui arrivoient par suite de l'ignorance des paysans malgré toutes les précautions que l'on avoit prises; elle les attribue à la négligence des Magistrats et des Ecclésiastiques qui ne leur avoient pas donné les instructions nécessaires. Le même esprit, les mêmes sentimens se développent dans l'Instruction donnée aux Arpenteurs; elle servira non seulement à assurer le bien d'un chacun, mais encore c'est une mésure d'état qui illustrera son règne en procurant la tranquillité à l'Empire. Elle leur préscrit la manière dont ils doivent mésurer et composer les plans, il leur est enjoint de disstinguer non seulement les terres labourables d'avec les prairies, les bois et les forêts, mais encore de faire des observations sur la nature du sol, de faire des rémarques économiques indispensables au Gouvernement, en se rappelant toutes fois que ces observations doivent être faites avec exactitude et jamais au hazard, puisque le manque d'exactitude pourroit induire le Gouvernement en erreur et qu'il vaudroit beaucoup mieux de manquer de données que d'en avoir de fausses. Il est surtout à rémarquer que la grande Impératrice fut la prémière Souveraine de Russie qui fixa une mésure agraire, savoir la dessetine de 18 toises de long sur 30 de large ou bien de 2400 toises et 3 archines carrées (Instruction, Chapitre 5. §. 1.).

Ce fut donc avec raison qu'elle fit graver sur le sceau des Comptoirs d'arpentage cette legende significative: Suum cuique.

Il y a maintenant 53 ans que l'arpentage continue en Russie, 24 gouvernemens autour de Moscou sont arpentés et l'on s'occupe aujourd'hui de 7 autres, sans parler des arpentages particuliers qui se font de tems à autre pour différentes causes; savoir pour les bois et forêts, les communications par eau, les grandes routes et le mines, etc. Le centre de la Russie, les gouvernemens les mieux cultivés, habités presque tous par des Russes sont mesurés aujourd'hui. Quant-aux autres gouvernemens ils ont suivis ce grand exemple guidès par leur propre intérêt, de sorte qu'il n'y en a pas un seul qui ne soit arpenté d'une manière ou de l'autre, mais ces derniers le seront de nouveau de la part du Gouvernement lorsque leur tour viendra.

La marche que l'on suivit en faisant arpenter successivement les gouvernemens n'étoit pas depourvue de fondement, car il s'agissoit de faire réussir cette grande mésure chez les différens peuples de la Russie et dans les gouvernemens les plus agricoles. La sagesse de l'Impératrice se montra encore dans le choix. Moscou devoit donner l'exemple, l'arpentage fut commencé le 13 Octobre 1765. Il dura 2 ans et 7 mois; la nouveauté de la chose, l'étendue des terres cultivées, le grand nombre de nobles qui vivoient dans leurs terres, rendoient un arpentage très soigné plus qu'indispensable. Nigegorod fut le second gouvernement qu'elle choisit, car il est très agricole, forme le point central des gouvernemens situés sur le Wolga inférieur, et est habité de différens peuples; l'arpentage y commença le 7 de May 1768 et ne dura qu'une année. Un gouvernement de l'Oukraine, celui de Charkow, fut le troisième où l'arpentage commença le 7 de May 1769, il dura 3 ans et demi, mais dépuis cette époque on eut des succès plus rapides. Dans une année et demi, c'est-àdire dépuis le 13 Janvier jusqu'au 4 Juillet 1774, 4 gouvernemens russes furent arpentés, savoir ceux de Wladimir, de Jaroslaw, de Resan et de Kostroma; Pensa le fut ensuite dans l'espace de 9 mois, dépuis le 4 Juillet jusqu'en —

Avril 1775, époque où on commença l'arpentage de Tambow qui fut achevé en 8 mois. Suivirent en 1776 Toula, Kalouga, Smolensk et à la fin de l'année on commença la même opération à Woronesch. En 1777 Koursk et Orel furent arpentés, et le 19 Décembre l'on commença l'arpentage à Nowgorod qui fut achevé en 4 mois, car le 26 Avril 1778 l'on fut déja à même de s'occuper de Plescou.

Tous ces gouvernemens, à l'exception de Charkow et de Smolensk, sont originairement russes et ce n'est qu'après eux que 2 gouvernemens Polonois, Mohilew et Witebsk, furent arpentés à dater du 25 Janvier 1783. L'on entreprit ensuite l'arpentage des gouvernemens moins intéressans pour l'agriculture, ceux de St. Pétersbourg, Olonetz et Wologda. Un gouvernement très intéressant pour l'agriculture mais qui l'est encore plus par ses bois de chêne, celui de Kasan fut le dernier où l'arpentage eut lieu, vraisemblablement à cause des difficultés qu'on prévoyoit par rapport aux bois et forêts.

Voilà les 24 gouvernemens de la Russie européenne où l'arpentage a été terminé. Il s'opère aujourd'hui en vertu de l'Oukase du 25 Juin 1797 dans 7 autres gouvernemens savoir: Saratow, Simbirsk, Waetka, Jekatérinoslaw, Cherson, Orenbourg et la Tauride. La nation est faite à cette grande mésure qui ne rencontre plus de difficultés. C'est ainsi que la persévérance du Gouvernement surmonta tous les obstacles. Il faut espérer qu'il en sera de même de la Statistique de l'Empire, ouvrage qui ne rencontre pas moins de difficultés que l'arpentage, au point même que des personnes eclairées désespèrent du succès.

Quatre Gouvernemens Polonois sont arpentés d'après les mésures polonoises, savoir ceux de Wilna, de Grodno, de Minsk et de Kamenetz Podolsk, depuis aussi le district de Bielostok.

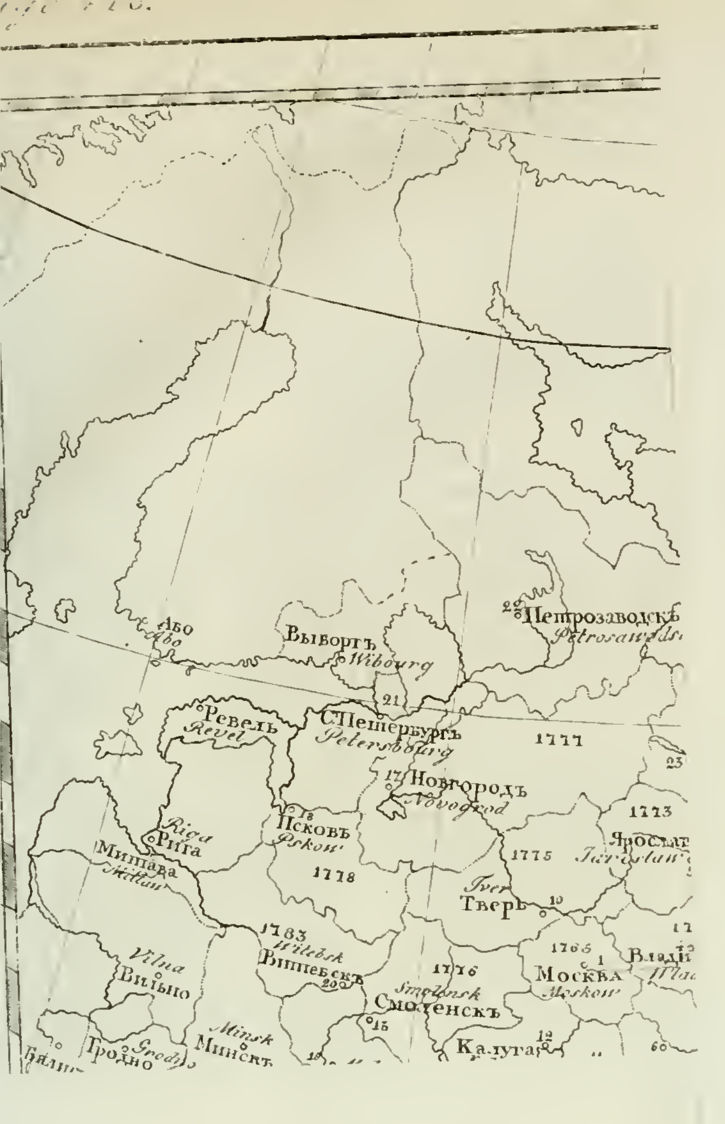
Il reste donc pour l'arpentage 11 gouvernemens: ceux sur la Baltique, l'Esthonie, la Livonie et la Courlande, puis Poltava,

la Volhynie, Archangel, Perme, Astrachan et la Caucasie; enfin les terres des Cosaques du Don.

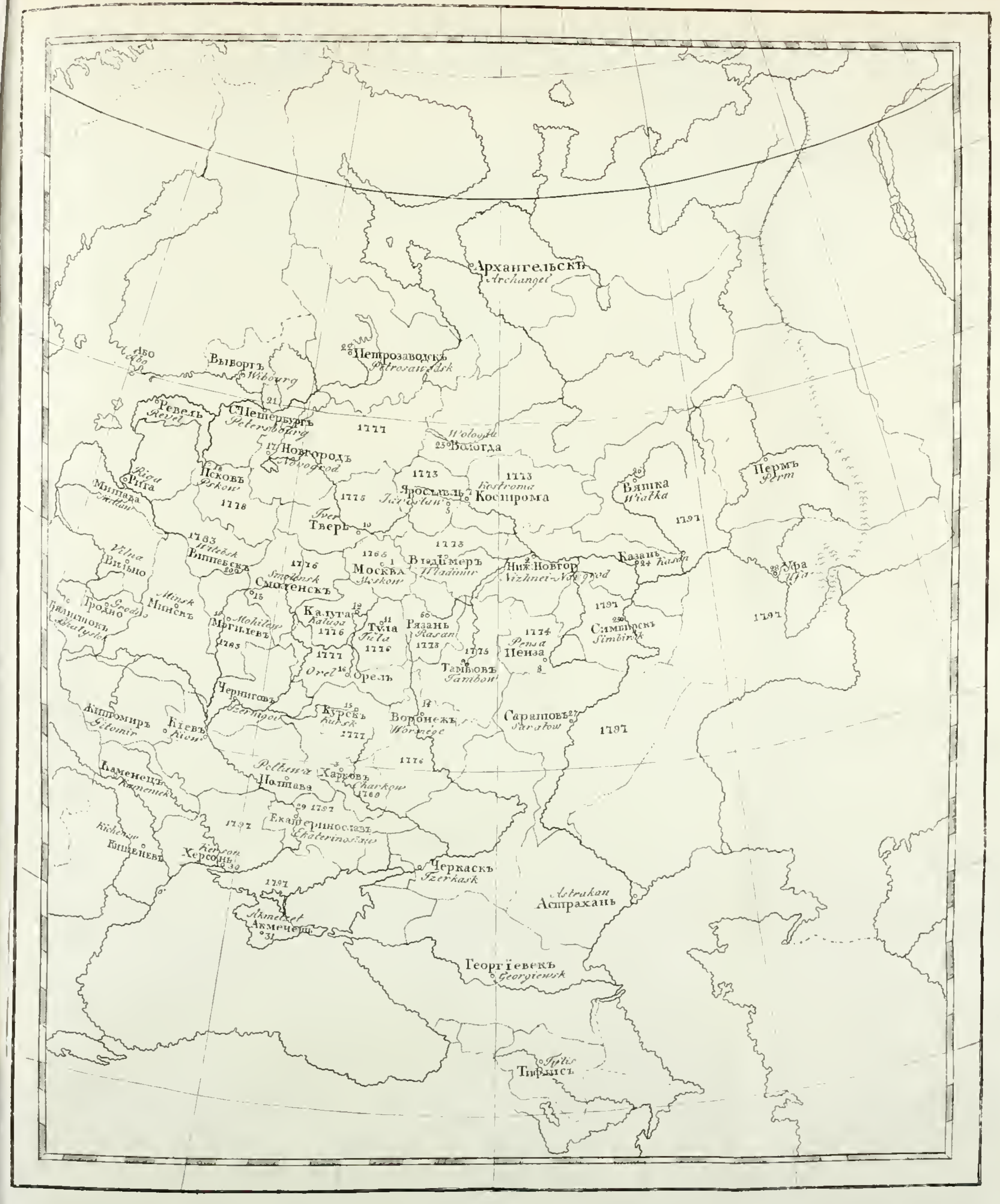
Il n'existe point de donnée sur la manière dont on procédera à l'arpentage dans le Duché de Finlande, en Bessarabie, en Géorgie, en Imérétie et en Mingrélie, dans la province de Derbent, enfin dans le Royaume de Pologne. Un coup-d'œil jetté sur la carte sous N°. XX. rendra l'état actuel de l'arpentage plus sensible.

Il se trouve outre cela dans chaque gouvernement des Arpenteurs de gouvernement et de cercles qui sont aux ordres des Gouverneurs, d'autres sont attachés à des départemens particuliers envoyés dans les gouvernemens pour mésurer les terres confiées à leur inspection. Mais il existe dans les endroits où l'arpentage se fait au nom du Sénat un comptoir - d'arpentage avec tous ses employés. Il est presque impossible d'évaluer la somme que cette entreprise a pu couter jusqu'àprésent à la Russie, on la fait monter à plus de 100 millons; en tous cas il est sûr qu'il a couté bien de millions. Pourtant jamais somme n'a été employée plus utilement, car l'arpentage à règlé d'une manière irrevocable les limites des propriétés territoriales et sans cette stabilité l'agriculture et les Manufactures ne pourront jamais faire de grands progrès.

L'arpentage a assuré la tranquillité de l'intérieur; mais quels sont les résultats statistiques qu'il a produit rélativement à la division des différens terrains qui en a été la suite dans les gouvernemens où cette opération est terminée? Cette question nous occupera dans les Mémoires suivans.



Або
Abo
Выборгъ
Wibourg
21
Петрозаводскъ
Ревель
Revel
С.Петербургъ
Petersbourg
1777
23
17 Новгородъ
Novogrod
18
Псковъ
Pskow
1773
Riga
Рига
Митава
Mittau
1778
1775
Tver
Тверь
10
1783
Witebsk
Витебскъ
20
1765
1
Москва
Moskow
Vilna
Вильно
1776
Smolensk
Смоленскъ
15
Minsk
Минскъ
Grodno
Гродно
Калуга
12
60


Архангельскъ
Archangel
Петрозаводскъ
Petrosawodsk
Выборгъ
Wibourg
Або
Abo
Ревель
Revel
С.Петербургъ
Petersbourg
Новгородъ
Novogrod
Wologda
Вологда
Псковъ
Pskow
Рига
Riga
Митава
Mittau
Ярославль
Jaroslaw
Kostroma
Кострома
Twer
Тверь
Вятка
Wiatka
Пермъ
Perm
Witebsk
Витебскъ
Vilna
Вильно
Москва
Moskow
Владимеръ
Wladimir
Ниж: Новгор
Nizhnei-Novgorod
Казань
Kasan
Уфа
Ufa
Smolensk
Смоленскъ
Minsk
Минскъ
Гродно
Grodno
Білостокъ
Bialystok
Mohilew
Могилевъ
Калуга
Kaluga
Тула
Tula
Рязань
Rasan
Симбирскъ
Simbirsk
Pensa
Пенза
Тамбовъ
Tambow
Orel
Орелъ
Черниговъ
Tzernigow
Курскъ
Kursk
Воронежъ
Woronege
Саратовъ
Saratow
Житомиръ
Gitomir
Кіевъ
Kiew
Каменецъ
Kamenek
Poltawa
Полтава
Харьковъ
Charkow
Екатеринославъ
Ekaterinoslaw
Kichenew
Кишеневъ
Kerson
Херсонъ
Черкаскъ
Tzerkask
Astrakan
Астрахань
Akmetset
Акмечетъ
Георгіевскъ
Georgiewsk
Tiflis
Тифлисъ

RECHERCHES STATISTIQUES SUR LA SEPTIÈME RÉVISION.

PAR

C. T. HERRMANN.

Présenté à la Conférence le 6 Octobre 1819.

La période depuis la sixième jusqu'à la septième Révision est *la plus courte* de toutes celles qui se sont passées entre ces denombremens en Russie, car elle ne comprend que les 4 années de 1812 à 1816. Le Manifeste pour la sixieme Révision est du 18 de Mai 1811, et fixe le terme pour la fin des tableaux de Révision dans les Gouvernemens européens au 1 de Janvier 1812, et pour ceux de la Sibérie au 1 de Juillet de la même année. La septième Révision fut ordonnée par le Manifeste du 2 de Juin 1815, le terme étoit pour les Gouvernemens russes en Europe le 15 d'Août 1817, et pour ceux d'Asie le 15 d'Août 1817.

Mais cette période est *une des plus mémorables* dans les Annales de la Russie par l'invasion de l'ennemi jusqu'au centre de l'Empire, par la nature de cette guerre meurtrière et ruineuse, par les efforts inouis de la Russie faits pour repousser l'ennemi hors des frontières, et puis pour le poursuivre jusque dans sa capitale et y donner la paix et la liberté à l'Europe dechirée par une guerre de vingt-cinq ans et subjugée par le conquérant le plus ambitieux.

Une période où la Russie combattoit pour son indépendance et pour celle des Etats de l'Europe n'étoit pas faite pour faire fleurir l'industrie et pour augmenter la population. *On devoit nécessairement s'attendre à des pertes* et c'est pour constater leur grandeur que la septième Révision fut ordonnée.

Un premier travail sur un peuple immense, mis en mouvement par une guerre qu'on peut nommer nationale, dut avoir des

grandes difficultés, car des milliers d'hommes s'étoient dispersés au loin et ne revenoient plus ou très lentement à leurs foyers. Les pertes faites en cette période dévoient donc paroître d'abord beaucoup plus grandes qu'elles ne l'étoient en effet, et c'est pour cela que le Gouvernement a ordonné *un second travail* pour vérifier les tableaux de la septième Révision.

Elle ne s'étend que sur la *bourgeoisie* et sur les *paysans* (sans compter les femmes) puisqu'ils sont soumis aux impôts directs et au recrutement, excepté les marchands. Le Gouvernement avoit d'abord bésoin de constater la masse des contribuables en général et celle de ceux qui servent à complcter l'armée en particulier. Ce sont parconséquent des états sur la population faits sous le point de vue financiel et militaire.

D'après les états de la population de ces deux classes il y avoit en 1816, 17,950,137 bourgeois et paysans, tandis que le résultat de la sixième Révision avoit donné pour ces mêmes classes en Janvier 1812 le nombre de 18,822,652 hommes.

D'après cela la Russie auroit perdu en 4 ans le nombre de 872,515 hommes de ces deux classes.

Cette perte a paru exagerée et c'est pour cela qu'un second travail fut ordonné en 1817 dont les résultats ne sont pas encore connus.

Mais considérant qu'on n'a pu se tromper de beaucoup dans les Gouvernemens qui n'ont pas été le théâtre de la guerre, (quoique tous dévoient en avoir ressenti plus ou moins les effets pernicieux) surtout à un travail qui se fait ordinairemeut avec beaucoup d'exactitude en Russie pour ces classes (*): il m'a toujours paru inté-

(*) Je viens de recevoir les résultats des vérifications faites en cinq gouvernemens limitrophes qui n'ont pas été devastés par l'ennemi. Ce second travail a commencé le 1 de Juillet 1818 et il a été terminé le 1 de Juillet 1819 et on a trouvé qu'il y avoit réellement quelques bourgeois et paysans de plus, comme suit:

à Orel	344 bourg.	287 pays.	à la Cour.	24	à différ. dép.	141	aux part.	total 796
- Woronesch	19	95	-	-	-	64	-	178
- Tambow	53	197	-	9	-	297	-	556
- Toula	43	7	-	-	-	19	-	69
- Resan	18	17	-	-	-	117	-	152.

ressant de comparer, en attendant les vérifications, le tableau général de la sixième Révision à celui de la septième tel qu'il est actuellement pour savoir quelles sont les classes où les différences sont les plus grandes et en quels Gouvernemens elles se trouvent.

Les derniers résultats sur l'état de la population pour les différentes classes de la bourgeoisie et des paysans sont d'après la sixième et d'après la septième Révision comme suit :

Bourgeoisie			Paysans				
d'après la	marchands	bourgeois et artisans	à la Couronne	aux domaines	a différens départemens	aux particuliers	paysans libres
6me Révision	124,828	702,158	6,362,816	574,247	410,611	10,444,642	203,140
7me Révision	85,947	744,561	6,473 017	551,807	181,929	9,815.490	98 074
	moins : 38,881	plus : 42,403	plus : 110,201	moins : 22,440	moins : 228,682	moins : 692,152	moins : 104,964

En déduisant le plus de 152,601 du moins de 1,042,119 reste le déficit de 872,515.

Le corps des marchands a diminué environ d'un tiers, tandis que celui des *bourgeois et artisans a augmenté environ d'un seizième.* La perte dans le premier corps est très forte et les progrès de l'autre n'en sont qu'une foible compensation, car le corps des marchands est la fleur de la bourgeoisie, tant pour ses capitaux que pour sa culture. Ces deux classes si intimement liées par leur industrie ont assurément fait des pertes sensibles, malgré que l'état de la bourgeoisie en général paroisse avoir été stationaire en cette période, car il étoit d'après la 6me Révision de 826,986 hommes, et d'après la 7me de 830,508. Les progrès de la population de cette classe sont très peu signifians, car ils ne font que $\frac{1}{234}$. — Il paroit que la plupart des marchands ruinés se sont faits inscrire dans la classe des simples bourgeois, puisque cette dernière a gagnée à-peu-près ce que la première a perdue ; la différence de

3,522 hommes n'est pas si considérable, et provient de la classe des paysans.

On pourrait croire que la diminution du corps des marchands prouve la diminution des fonds employés au commerce et que les pertes que quelques classes de paysans ont fait auroient entrainé la diminution des produits agricoles, en un mot que la richesse nationale auroit diminuée en proportion de la population. Pour constater ce fait, nous consulterons les tableaux sur le commerce étranger de la Russie pendant les années 1813, 1814 et 1815.

Années	Importation	Exportation	Transit
1813	121,508,565 r.	132,427,679	1,379,360
1814	113,354,883	194,056,631	2,160,188
1815	113,870,456	219,449,455	1,445,654

L'importation de l'année 1813 étoit vraisemblablement si forte puisqu'elle n'avait été en 1812 que de 76,365,560 r. Les chaînes du système continental étoient tombées en 1813 et la demande des marchandises étrangères étoit forte ; pendant les années 1814 et 1815 elle revint à son taux ordinaire.

L'exportation augmente sensiblement pendant ces années et bien loin qu'on apperçoive ici des pertes il paroissoit qu'elle alloit doubler en continuant d'augmenter de la même manière.

Le Transit est sujet à des changemens considérables.

Ce ne sont pas les bleds et autres articles qui servent pour la nourriture des hommes qui ont fait monter l'exportation, car elle étoit assez constante pour ces articles :

en 1813 elle montoit à 34 millions de roubles
— 1814 — — — 33 — — —
— 1815 — — — 33 — — —

mais c'étoit plutôt celle des métaux et demi-métaux qui montoit en ces

trois années de 5 millions et demi a $11\frac{1}{2}$ et enfin presque à treize millions. Il y avoit des grandes quantités de fer accumulées pendant les années précédentes.

Les lins et les chanvres parmi les premières Matiéres pour les Manufactures, montoient de 42 millions et demi à 53 et demi et enfin à 58 et demi.

Les toiles avec les autres Manufactures russes alloient de 5 millions a 12 et puis à 16.

L'exportation des bestiaux qui étoit presque nulle en 1813, car elle n'étoit que de la valeur de 150,391 roubles, montoit en 1814 à 5,548,810 et en 1815 à 6,607,487.

Surtout l'exportation des Articles compris sous le titre de diverses marchandises a plus que doublée, elle étoit en 1813 de 44 millions et demi, en 1814 de 78 et demi, en 1815 de 91,605,138.

Les principaux articles de l'importation étoient dans les années :

	1813	1814	1815
	roubles		
Marchandises qui servent pour la nourriture de l'homme	$62\frac{1}{2}$ millions	54,900,000	59,4
Pour la médécine -	1,800,000	2,1 —	1,1
Metaux et demi-métaux -	3,5 —	1,9 —	3,3
Premières matières pour les manufact.	28,3 —	22,9 —	22,7
Manufactures - -	7,8 —	10,4 —	7,5
Diverses marchandises -	16,7 —	20,4 —	18,9.

L'article des marchandises pour la nourriture des hommes est le plus fort, ce sont les marchandises coloniales, les vins et autres boissons, suit celui des matieres brutes pour nos manufactures, enfin celui des diverses marchandises qui sont pourtant aussi pour la plûpart des manufactures étrangeres. Il ne résulte nullement de ce tableau que la consommation de marchandises dans l'intérieur ait diminuée.

Quant au Transit il est peu signifiant; il consistoit en provisions de bouche qui étoient en 1813 de la valeur de 125,301 roubles, montoient en 1814 à 964,963 et baissoient en 1815 à 83,753; en manufactures pour 869,667 roubles en 1813, pour 327,470 en 1814, et en 1815 pour 654,775, enfin en diverses marchandises pour 383,899 roubles en 1813, pour 613,660 en 1814 et pour 694,806 en 1815. Outre ces articles ordinaires du commerce de transit il y avoit encore en 1814 pour 936 roubles de médécine et des premières matières pour les manufactures dans la même année pour 253,159, et en 1815 pour 13,320 roubles.

Nous terminerons cet aperçu de l'état du commerce russe pendant ces trois années par le tableau du commerce de St. Pétersbourg, comme point central du commerce étranger.

Années	Importation	Exportation
1813	75,799,838	53,634,495
1814	64,440,375	91,795,342
1815	65,573,193	107,355,470

Ce tableau est de même très consolant, l'exportation fait des progrès rapides, tandis que l'importation tombe à son taux ordinaire

Les principaux articles de l'importation consistoient en

	1813				1814	1814
en provisions de bouche, pour	38	millions	300,000		33,4	33,7
Médécine . .	1,	—	4	—	1,6	741,820
Métaux et demi-métaux	2,	—	2	—	778,433	2,5
Premières matières pour les manufactures .	21	—	5	—	12,9	15
Manufactures . .	$2\frac{1}{2}$	—		—	2,8	848,730
Diverses marchandises	10	—		—	13,7	$12\frac{1}{2}$.

Ceux de l'exportation étoient pour ces mêmes années :

	1813	1814	1815
Provisions de bouche . .	4,8 —	4,9	3,4
Métaux et demi-métaux .	676,193	2,8	5,7
premières matières pour les manufactures	25,1 —	29,1	34,8
Manufactures . . .	2,4 —	9	11,3
Diverses marchandises . .	20,3 —	45,5	51,6

Et c'est ainsi que nous avons deux faits contradictoires à conciller: *la diminution du corps des marchands* pendant les années 1813, 1814, 1815 et *l'augmentation de son commerce étranger* qui prouve en même tems celle *du commerce de l'intérieur* qu'il vivifie et dont il exporte le surplus.

Si *l'agriculture* n'a pas gagnée pendant ces années pour l'exportation du bled, elle a considérablement gagnée pour la culture des lins et des chanvres, puis pour l'éducation des bestiaux et enfin pour les travaux aux mines. La classe des paysans n'avoit au moins rien perdue dans les principales branches de son industrie.

Les Manufactures ont de même considérablement gagnées, surtout les toiles et toileries et les diverses marchandises. — Ces objets manufacturés font vivre les artisans, parconsèquent l'industrie des simples bourgeois ne pouvoit pas baisser.

Donc si les pertes de la population de ces classes existoient réellement, elles ne provennoient pas de la décadence des différentes branches de l'industrie nationale, qui pendant ces années à jamais mémorables s'est soutenue et doit même avoir fait des progrès, puisqu'il y avoit un plus grand surplus à exporter. Et comme l'importation s'est d'abord acrue et puis soutenue au même taux, il falloit bien que les marchandises étrangères eussent trouvé des consommateurs en état de les payer, ce qui prouve que la richesse nationale n'a pas éprouvée les mêmes pertes que la population. — Ce fait saute encore plus aux yeux si l'on considère que ni la consommation des vins, des eaux de vie étrangères et des

marchandises coloniales a diminuée, donc l'aisance de la classe des consommateurs, la consommation parmi les gens riches n'a pas diminuée; ni des premieres matières étrangères qui vivifient nos manufactures à baissée: parconséquent l'industrie à ces établissemens n'a rien perdue; enfin quelle quantité de diverses marchandises n'a pas été exportée!

Il est donc vraisemblable que si la clesse des Marchands a effectivement baissée aussi considérablement, les fonds pour le commerce auront été concentrés dans les mains d'un plus petit nombre de marchands qui se sont soutenus et ont été augmentés par la part active que les simples bourgeois et même des paysans ont pris au commerce. Il y a donc une diminution dans le nombre de ceux qui portent le nom des marchands et la Couronne y perd pour ses revenus du capital accusé par ce corps, mais il n'y a pas eu de perte réelle pour les fonds du commerce et aux différentes branches de l'industrie, au contraire la richesse nationale n'a fait qu'augmenter.

Et comme les progrès de la population dépendent de l'état de la richesse nationale, les pertes que la Russie auroit faite en hommes, même si elles étoient réellement aussi considérables que le tableau sur la septième Révision l'indique, seront reparées en très peu de tems.

Nous ajoutons les états detaillés sur la population de la bourgeoisie et des paysans d'après la sixième et la septième Révision selon le premier travail.

d e e p t i è m e e n 1 8 1 6.

Russie europ e p t i e m e R e v i s i o n							
Pla-teaux	Gouvern	paysans libres	p a y s a n s à la couronne	aux domaines	a différens établisse-mens	aux particuliers	total
I. Plateau du Nord	1) Archan	—	58.221	19.499	—	128	82.204
	2) Olonetz	63	86.782	892	—	5.737	98.202
	3) Wologo	809	172.402	26.119	611	89.660	298.496
	4) Waetka	—	460.860	47.563	3.631	10.499	531.255
	5) Perme	79	282.780	8.079	13.861	168.495	484.190
	6) Ancien	ans les	tableaux	sur la	Révi	sion	- - -
	7) St. Péte	98	32.737	2.257	19.252	121.408	196.176
	8) Novgor	479	116.779	20.298	659	171.837	324.240
		1.528	1.208.511	124.707	38.014	567.764	2.009.763
VI au lone	9) l'Estlan	—	1.863	—	—	94.865	105.465
		636	1.139.088	3.994	3.285	2.195.357	3.552.776
VII. Plateau des Steppes	45) la Tau	357	53.188	18	—	9.588	81.314
	46) d'Astra	—	9.338	—	—	4.233	19.293
	47) la Ca	—	44.965	—	—	4.994	51.589
	Terres de du Do	—	447	—	—	78.544	78.991
	Terres de de la	de	. . .	. .	. .	. . .	. . .
		357	107.938	18	—	97.409	231.187
VIII. Plateau de Siberie	48) Tobol	—	225.224	—	23	1.713	236.527
	49) Toms	—	187.137	—	—	826	202.623
	50) Irkou	—	239.984	—	146	259	247.220
		—	652.345	—	169	2.798	686.370
	Gr	22.670	6.473.017	551.807	181.929	2.815.490	17.950.826

ad pag. 456.

TABLEAU COMPARATIF

de la sixième Revision en 1812 et de la septième en 1816.

Russie européenne		Sixième Revision								Septième Revision								
				paysans										paysans				
Plateaux	Gouvernemens	Marchands	bourgeois	à la couronne	aux domaines	aux particuliers	paysans libres	à différens établissemens	total	Marchands	bourgeois	gens libres	paysans libres	à la couronne	aux domaines	à différens établissemens	aux particuliers	total
I. Plateau du Nord	1) Archangel	205	4.300	61.943	20.139	113	—	—	80.760	226	4.130	—	—	58.221	19.499	—	128	82.204
	2) Olonetz	683	4.320	92.890	953	6.285	—	—	105.131	505	4.223	—	67	86.782	892	—	5.737	98.202
	3) Wologda	1.115	8 231	179.682	26.612	94.060	476	—	310.182	830	8.065	—	809	172.402	26.119	611	89.660	298.496
	4) Waetka	992	7.768	471.713	47.754	14.247	—	—	542.404	926	7.776	—	—	460.860	47.563	3.631	10.499	531.255
	5) Perme	856	10.227	92.519	7.390	165.124	80	203.890	480.086	426	10.470	—	79	282.780	8.079	13.861	168.495	484.190
	6) Ancienne Finlande	Le	Duché	de Fin	lande	ayant une	Admini	stration	particuliere,	ne se	trouve	pas	dans les	tableaux	sur la	Révi	sion	- - -
	7) St. Pétersbourg	5.200	12,999	33,128	2.380	125.678	46	19.552	198.983	4.034	16.390	—	98	32.737	2.257	19.252	121.408	196.176
	8) Novgorod	3.258	11.094	118.448	21.409	177.408	351	631	332.599	1.847	12.341	—	479	116.779	20.298	659	171.837	324 240
	total	12.299	58.939	1.050.323	120 637	582.921	973	224.07	2.056.145	8.794	63 395	—	1 528	1.208.511	124.707	38.014	567.764	2.009.763
II. Plateau Baltique	9) l'Estlande	687	3.758	6.801	—	96.820	—	—	108.066	485	3.775	4.477	—	1.863	—	—	94.865	105.465
	10) la Livonie	1.722	13.438	50.272	—	204.778	—	—	270.210	1.601	14.832	11.170	—	40.200	—	—	209.191	276.994
	11) la Courlande	1.116	14.157	68.914	—	114.415	—	—	193.602	672	11.734	8.872	—	51:055	—	—	109.277	181.610
	total	3.525	31.355	125.987	—	416.013	—	—	570.878	2.758	30.341	24.519	—	93.118	—	—	413.333	564.069
III. Plat. sur l'élévation de la Wolga	12) Twer	6.673	19.699	153.939	19.928	332.056	146	—	533.031	4.538	21.297	—	259	150.817	19.421	—	325.348	521.680
	13) Plescou	2.727	7.181	70.029	23 222	216.750	29	—	319.947	1.814	8.179	—	251	68.700	22.470	—	203.536	304.956
	14) Smolensk	2.967	13.808	30.426	55.836	373.277	—	—	476.313	877	13.819	—	—	23.820	50.763	—	327.711	416,998
	total	12.367	40.696	254.394	98.986	922.683	175	—	1.329.291	7.229	43.295	—	510	243.337	92,600	--	856.603	1.243 834
IV. Plateau du Milieu. 1. Partie orientale	15) Nigegorod	2.050	8.071	70.568	27 709	324.685	516	19.424	453.025	1.444	8.881	—	573	72.673	20.839	19.282	314.448	444.140
	16) Kasan	2.582	10.092	362.499	11.888	83.929	—	100	471.100	1.691	11.168	—	—	356.718	11.580	2.377	81.259	464.793
	17) Simbirsk	2.045	8.190	189.649	30.750	234.586	337	—	465.557	1.181	8.810	—	459	187.845	31.235	150	231.943	461.623
	18) Tambow	7.822	17.492	261.282	29.702	303.240	230	—	619.828	4.186	10.857	—	222	201.636	28.722	3.882	304.080	619.585
	19) Pensa	1.373	5.158	133.937	36.129	232.721	—	2.607	411.925	823	5.427	—	35	132.329	35.621	3.294	233.404	410.932
	20) Saratow	6.970	15.162	187.333	22.735	249.658	91	—	481.944	3.261	19.937	—	94	191.818	23.653	—	251.550	490.313
	21) Orenbourg	2.307	3.966	231 559	17.357	83 853	79	—	338 921	1.305	5.233	—	85	240.053	18.180	22.129	59.645	346.630
	total	25.140	68.741	1.436.827	176.330	1.512 472	1.255	22.131	3.242.900	13.801	70.313	—	1.408	1.453.072	175.830	51.114	1.470.329	3.238.010
IV. 2. Partie occidentale	22) Jaroslaw	3.148	13.352	86.009	1.900	284.062	2.010	3.918	394.405	2.489	13.497	—	2.708	82.601	1 841	5.907	275.301	384,344
	23) Kostroma	1.246	10.236	62.138	56.954	290.510	226	—	421.310	969	10.135	—	484	59.605	55.284	1.269	280.489	408.235
	24) Wladimir	4 812	8.582	112.438	20.191	315.583	111	8.793	476.510	4 274	8.984	—	203	108.004	25.100	10.922	305.771	403.258
	25) Moscou	17 134	25.925	121.723	18.562	305.248	33	13.475	502.100	12.179	31.598	—	96	115.101	17.655	12.735	276.177	465.541
	26) Toula	4.530	21.560	65.939	167	400.812	12	—	493.019	3.850	21.927	—	41	65.761	156	740	376.024	468.499
	27) Kalouga	5.431	17.053	60.849	5.448	318.253	239	3.237	416.510	3.855	16.754	—	225	64.052	5.136	5.167	287.067	382.256
	28) Raesan	3.951	12.957	116.362	2.071	353.225	903	19.737	508.446	2.966	12.656	—	2.222	111.648	1.996	19.927	339.692	491.107
	29) Orel	8.342	23.395	153.832	27.725	356.364	8	—	569.066	5.913	24.654	—	7	145.479	25.962	1.007	332.153	535.175
	30) Koursk	5.341	14.087	335.373	6.230	310.251	44	—	671.326	4.446	14.600	—	747	310.378	5.962	8.495	297.078	641.706
	31) Woronege	2.620	6.330	357.140	13.212	218.663	11.054	28.594	637.613	2.022	7.035	—	11.370	363.809	13.161	20.636	218.358	636.391
	total	53.935	147.147	1.120.662	145.254	2.934.308	3.586	49.160	4.453.292	40.941	154.805	—	6.733	1.062.629	139.092	58.169	2.709.552	4.180.121
	Grand total	79, 084	215, 888	2 550, 489	321, 584	4.440, 770	4, 841	71, 291	7.696, 102	54, 832	231, 118	—	8, 201	2, 515.701	314, 922	109, 283	4, 245.881	7, 418.137
V. Plateau des basses-terres	32) Witebsk	915	19.361	70.438	1.908	260.574	—	—	353.196	090	19.113	—	50	34.006	1.978	—	245.092	300.979
	33) Mohilew	733	31.342	9.816	469	358.081	—	—	401.041	258	23.332	—	16	8.060	367	—	287.206	319 299
	34) Wilna	162	19.457	123.634	—	225.926	—	—	369.179	147	26.176	43.930	—	40.093	—	—	205.483	315 829
	35) Grodno	70	16.952	29.286	—	234 051	—	—	280.359	86	13.926	1.543	—	21.103	—	—	194.860	231.524
	36) Minsk	308	25.516	23.499	—	341.783	—	—	391.100	164	19.112	1.992	—	22.762	—	—	256.600	300.630
	total	2.188	112.622	256.673	2.377	1.421.015	—	—	1.794.875	1.345	101 701	47.465	66	126.024	2.345	—	1.189.367	1.468.261
VI. Plateau sur la prolongation des Carpathes	37) Kiew	135	22.474	51.411	—	488.438	—	1.248	563.700	246	27.817	525	—	43.826	—	1.042	450.277	523.733
	38) Tschernigow	2 975	36.803	237.217	1.097	284.289	—	—	562.381	1.752	33.72.	—	—	2.1.410	88	—	259.071	597.452
	39) Poltawa	1.081	15.337	347.073	419	331 802	—	—	695.712	670	15.119	—	22	332.323	40	—	310.803	659.341
	40) Charkow	798	7.051	273.282	1.485	191.591	2	—	471.209	639	7.062	—	611	268.520	1.438	—	182.395	455.671
	41) la Wolhynie	438	33.422	115.196	—	345.519	—	—	494 57.	214	53,146	1.999	—	13.338	—	859	378.865	448.421
	42) la Podolie	561	33.266	31.951	—	454.408	—	—	520.186	207	26.780	685	—	20.707	—	253	401.16	455.806
	43) Jekatherinoslaw	1.170	12.922	148.418	1.343	117.801	—	1.197	282.911	895	14.026	—	2	149.984	1.204	1.126	116.22	283.515
	44) Cherson	1.165	10.656	95.589	—	96.449	3	—	203.862	1.196	23.420	—	3	97.966	—	—	95.95	218.837
	total	8 323	171.931	1.300.137	4.344	2.310 357	5	2.445	3.797.5..	5 11.	201.086	3.20.	636	1.130.088	3.904	3.285	2.195.357	3.552.776
VII. Plateau des Steppes	45) la Tauride	418	14.112	49.976	19	9.876	404	—	74.805	37.	17.78.	—	357	53.188	18	—	9.588	81.314
	46) d'Astrachan	1.733	4.179	9.301	—	4.076	—	—	19.289	90.	4.76.	—	—	9.338	—	—	4.283	19.293
	47) la Caucasie	647	885	42.526	—	4.808	—	—	48.926	300	1.321	—	—	44.965	—	—	4.994	51.589
	Terres des Cosaques du Don	—	—	—	—	76.791	—	—	76.791	—	—	—	—	447	—	—	78.544	78.991
	Terres des Cosaques de la mer noire	Co	mpr	is da	ns le	Gou	ver	ne	ment	de	Tau	ri	de	. . .	. .	. .	. . .	. . .
	total	2.798	19.176	101.803	19	91.611	404	—	219.811	1.592	23.87.	—	357	107.938	18	—	97.409	231.187
Russie Asiatique																		
VIII. Plateau de Siberie	48) Tobolsk	409	9.292	181.768	—	1.034	—	—	193.339	278	9.280	—	—	22..22.	—	23	1.713	236.527
	49) Tomsk	451	14.092	64.473	2.601	824	32.968	84.198	199.602	34.	14.316	—	—	187.137	—	—	826	202.023
	50) Irkoutzk	740	6.198	74.150	4.457	318	1 tributaires 152.011	133	238.614	611	6.220	—	—	239.984	—	146	259	247.220
	total	1.616	29 582	320 411	7.058	2 776	185.580	84.198	631.339	1 233	29 816	—	—	652.345	—	169	2.793	686.370
	Grand total	124.828	702.398	6.362.816	574.217	10.444.642	203.140	410.011	18.822.652	85.947	794.501	75.404	22.670	6.473.017	551.807	181.929	2.815.490	17.950.825

IV.

SECTION

D'HISTOIRE ET DE PHILOLOGIE.

EXAMEN CRITIQUE DE LA FABLE D'HERCULE, COMMENTÉE PAR *DUPUIS*.

Mémoire présenté par S. E. Mr. le Président le 17 Nov. 1819.

Non me cuiquam mancipavi; nullius nomen fero.
Senec. Epist. XLV.

Depuis long - tems, on avait essayé de trouver dans l'astronomie, la solution de la plupart des difficultés qu'offre le système réligieux des anciens; mais ces tentatives isolées n'avoient présenté aucun résultat satisfaisant. À l'exemple de plusieurs mythographes, *Court de Gebelin*, pour ne parler que de ceux qui ont ecrit en france, plaça les travaux d'Hercule dans le passage du soleil par le Zodiaque en les appliquant plus particulièrement à l'agriculture; mais *Dupuis* en marchant sur ses traces réduisit ces hypothèses en un système complet, dans lequel il fit refluer toutes les connaissances réligieuses et philosophiques des hommes. Ce système, fruit d'un long travail et d'une érudition peu commune, est un phénoméne assez singulier dans l' histoire des lettres, pour mériter une grande attention.

Nous laissons aux habiles l'examen de l'ouvrage entier de *Dupuis;* nous ne nous engageons point à le suivre dans l'immense labyrinthe qu'il s'est tracé; mais tout système repose sur quelques bases principales. Nous examinerons l'une de ces bases, celle peut-être qu'il croyoit la plus solide:

Qu'il nous soit permis d'écarter de cette dissertation tout ce qui a rapport aux opinions personnelles de l'auteur. Les principes

qu'il s'était faits et les conséquences qu'il en tire, pourraient devenir le sujet d'un autre écrit, dont les résultats ne tourneraient pas à la gloire de l'esprit humain. Ici, nous ne considérons dans *Dupuis* que le *Mythographe*.

Hercule est le soleil; voilà la proposition de *Court de Gebelin*, voilà l'axiôme de *Dupuis*. Les douze travaux d'Hercule correspondent aux douze signes du Zodiaque.

La principale assise du système de *Dupuis* est de supposer dans l'histoire de la Grèce, une époque qu'il transporte à 1600 ans avant Homère: époque qu'il appèle l'âge d'or de la poésie. Là, il place les chants du soleil, *l'Héracleïde, ou poéme sacré sur le calendrier* dont il ne reste plus que le canevas, et dont les débris forment l'amas confus des ruines mythologiques (pag. 354). Delà, il suppose une époque d'ignorance et de barbarie jusqu'a Homère et Hésiode, et il ajoute: „Le fil sacré une fois rompu, ne „fut plus renoué par les Grecs: et nous mêmes, dit-il, ne l'avons „retrouvé que dans les sanctuaires de l'Egypte.“

On voit bien que jusqu'à présent, il n'y a pas encore matière à discussion. Un raisonnement que l'on croit historique et qui est appuyé sur une *supposition* de faits est un cercle vicieux dans lequel on tourne sans succès. Il faut seulement observer qu'il était asséz adroit de révoquer en doute l'autorité d'Homère, d'Hésiode, et des anciens poétes, en disant que le fil de l'allégorie ne s'était retrouvé que chez les Egyptiens. En admettant ce principe une fois, on donne gain de cause aux *autorités postérieures* des Pythagoriciens, des Platoniciens et de tous ceux qui voulurent régulariser *a postériori* le grand amas des traditions mythologiques. Voilà précisément le côté faible de tout l'échafaudage de *Dupuis*.

La discussion de la partie astronomique n'est pas de notre ressort. En tout cas elle influe peu sur les objections que nous avons à présenter. Nous nous bornerons à observer que l'embar-

vas du commentateur est visible en plus d'un endroit, notamment dans l'explication du premier travail, où il est obligé de distinguer le premier Hercule, ou le Dieu-Soleil, de deux autres Hercules placés dans les constellations, mais d'un ordre inférieur au grand Dieu-Soleil (1). Pour appuyer cette assertion, l'auteur fait violence à un passage d'Hérodote dans lequel celui-ci loue les Grecs d'avoir établi de la différence entre le culte qu'ils rendaient à Hercule-Olympien, dieu immortel, et celui qu'ils rendaient à un autre Hercule qui n'était que dans la classe des héros ; certes Hérodote ne faisait point ici allusion au Dieu-Soleil, ni à l'Hercule *Ingeniculus* mais bien à cette double nature d'un héros déifié qu'Homère a distingué le premier, comme nous le verrons par la suite (2).

Plusieurs autres endroits du calendrier comparé ne sont pas non plus à l'abri de tout reproche. Dans le quatrième travail, *Dupuis* a été obligé de se servir des sphéres Arabes pour y trouver une biche qui put correspondre à celle que prend Hercule. Dans le sixième travail, il n'est guères possible de comprendre l'analogie qu'il veut établir entre l'entrée du Soleil dans le signe du Capricorne et Hercule nettoyant les étables d'Augias.

Enfin l'esprit de parti a tellement aveuglé *Dupuis* dans son commentaire astronomique, que *le Dieu des Chrétiens*, (ce sont ses expressions) n'est lui-même à ses yeux que le Soleil, excepté qu'au lieu des douze travaux, ce sont les douze apôtres qui font l'office des douze grands Dieux.

Retournons à l'explication philologique : L'examen des autorités est sans contre dit le procédé le plus simple pour éprouver la solidité du système qu'elles supportent. *Dupuis* savait trop bien que loin de trouver dans Homère, dans Hésiode, dans les tragiques, dans Hérodote, quelque chose qui fut favorable à son opinion, tout ce qui y était consigné était au contraire diamétralement opposé à son systéme. Il ne pouvait attaquer la valeur de ces

sources; nous avons vû avec quelle adresse il les écarte de la discussion, mais cette adresse est vaine; quiconque s'est livré à l'étude de cette branche des connaissanses humaines, reconnait que c'est dans ces sources seules que l'on peut découvrir la clef du sanctuaire de l'antiquité; c'est à l'aide de ces grandes et nobles autorités que nous verrons se dissoudre tout ce amas d'hypothéses hazardées et de notices indigestes.

La première autorité que cite *Dupuis*, est celle de Nonnus; personne n'ignore que ce savant poéte vivait à une époque où les traditions mythologiques avaient cessé d'exister, et où on ne pouvait arriver à elles, qu'à travers le dédale des systêmes éclectiques. Nonnus, né dans le cinquième ou sixième siècle de l'Ere chrétienne, trahit visiblement le dessein de donner un sens plus grave aux annales du Polythéisme. Profondément versé dans la connaissance du systême religieux de tous les peuples anciens, le poéte de Panople, tantôt compilateur et tantôt homme de génie, avait fait de tous ces matériaux divers, un amalgame bizarre: et comme un grand nombre de ses contemporains, il s'obstinait à ramener à un ensemble rationnel les formes capricieuses de l'imagination mythologique (3).

Nonnus dans son invocation à Hercule accumule les dénominations et les épithètes:

Βῆλος ἐπ' Εὐφρήταο, Λίβυς κεκλημένος Ἄμμων,
Ἆπις ἔφυς Νειλῷος, Ἄραψ Κρόνος, Ἀσσύριος Ζεύς,
Εἴτε Σάραπις ἔφυς, Αἰγύπτιος ἀννέφελος Ζεύς,
Εἰ Χρόνος, εἰ Φαέθων πολυώνυμος, εἴτε σὺ Μίθρης
Ἠέλιος Βαβυλῶνος, ἐν Ἑλλάδι Δελφὸς Ἀπόλλων.
κ. τ. λ. (1)

Tout ce morceau souvent cité, ne présente qu'un assemblage de notices hétérogènes, recueillies avec beaucoup d'érudition, mais

(1) L. XXXX. v. 1038.

parfaitement opposées aux anciennes notions Grecques; et comme notre dessein n'est pas de combattre l'hypothèse adoptée par *Dupuis* mais seulement de montrer qu'elle a été faite après coup, et que le Polytheïsme à son origine n'offrait aucune trace de l'identité d'Hercule et du Soleil, la comparaison de ce morceau avec les sources primitives, en déterminera la valeur.

Continuons l'examen des principales autorités rapportées par *Dupuis*: „Les Egyptiens, dit Plutarque, pensent qu'Hercule assis „dans le char du Soleil, fait le tour du monde avec lui" (2). Les objections contre le témoignage de Nonnus peuvent s'appliquer en partie à Plutarque très attaché au Syncrétisme, et qui écrivait tard, sur des mémoires étrangers, et dans un siécle où le goût de l'analyse avait gagné tous les esprits; mais il est une objection bien plus solide, et la voici: Plutarque nous dit que les Egyptiens plaçaient Hercule dans le char du Soleil; quel est l'Hercule Egyptien? Quel était son nom? son culte? son origine?

La Mythologie Egyptienne n'a jamais été bien connue. Les seules notions que l'on en ait possédées, ont été transmises par les grecs; et l'on sait comment ils se rendaient compte de ce qui se trouvait hors de l'enceinte de la Grece. S'ils voyaient la réprésentation d'un Dieu qui avait quelque ressemblance avec Hercule, ils le nommaient Hercule, et ne poussaient pas leurs recherches plus loin. Ils négligérent de recueillir les noms Egyptiens, parcequ'ils dédaignaient en général toutes les langues étrangères (4). La Grèce avait presque tout reçu de l'Egypte: mais dépositaire infidèle, elle avait oublié jusqu'aux noms de ses bienfaiteurs (5). Les traditions orientales qui avaient traversé l'Egypte, s'étaient naturalisées en Grèce, et la marche du tems dérobait de plus en plus les formes primitives. Les Grecs n'avaient aucune idée positive de l'Egypte. Ils en ignoraient la langue et l'histoire. Quelques philo-

---

(2) De Is. et Osir. p. 367.

sophes essayérent de soulever le voile qui les couvrait; mais ils allérent en Egypte plutôt pour donner une sanction respectable à leurs opinions, que pour étudier celles des Egyptiens. On ne sait rien des voyages de Pythagore et de Solon. Hérodote se borna à converser avec les prêtres. Platon lui-même ne s'est point expliqué sur son séjour en Egypte; et quand l'école d'Alexandrie se livra à l'étude des antiquités Egyptiennes, les sources originales étaient oubliées, et la langue sacrée perdue depuis longtems.

L'Egypte elle même s'opposait par sa constitution à être mieux connue des Grecs. Tout contribuait à ne leur en donner que des notions superficielles; et si quelques uns d'entr'eux plus curieux ou plus éclairés, allaient interroger les graves oracles de la sagesse Egyptienne elle leur répondait comme le prêtre de Saïs au législateur Athénien: „O Solon, Solon, vous autres Grecs, vous „ êtes encore des enfans! Il n'est pas un seul vieillard en Grèce; „ car vous ne possédez pas une seule discipline qui soit an- „ cienne." (3).

Il s'ensuit que toutes les notions des anciens sur l'Egypte, sont très suspectes *d'hellenisme.* L'assertion de Plutarque n'en est pas exempte. Elle peut être au moins révoquée en doute, 1°. parcequ'il ne nous a pas transmis le nom Egyptien de la divinité qu'il appele Hercule (6). 2°. Parceque lui-même était déja atteint dans ses opinions philosophiques de la manie du Syncrétisme moderne. 3°. Parcequ'il est très probable que les Egyptiens n'ont jamais connu l'Hércule Grec (7). 4°. Enfin parcequ'aucun autre écrivain ne confirme le témoignage du philosophe de Cheronée.

Apres l'autorité de Plutarque, la plus considérable parmi celles que cite *Dupuis* est l'autorité des hymnes Orphiques. On sait

(3) *Plat.* Tim. 3. Ed. Bipont. pag. 290. *Cyrill.* contra Jul. I. p. 15. Ed. Spanheimii. *Clem.* Strom. T. I. p. 356. Ed. Potteri. La dernière phrase n'est pas rapportée par Platon mais par Clément d'Alexandrie. Dans S. Cyrille tout le discours est amplifié.

maintenant que ces hymnes sont très postérieurs à l'époque où on les plaçait autrefois. Cette discussion polémique est épuisée. Il en résulte que tout ce que nous avons sous le nom d'Orphée, non seulement n'offre rien de lui, mais encore que c'est un assemblage informe de productions différentes recueillies et compilées à une époque voisine des derniers systèmes du Polytheïsme.

Dupuis cite plusieurs fois avec complaisance l' autorité de Porphyre (4) qui parle de l'identité d'Hercule et du Soleil, comme d'une ancienne tradition, savoir que la fable des douze grands travaux a pour bàse la division des douze signes du Zodiaque, et qu'Hercule n'est que le Soleil qui parcourt tous les ans cette carrière, dont l'entrée était fixée au point solsticial occupé autrefois par le lion céleste, attribut caractéristique du Soleil arrivé au lieu le plus élevé du ciel. Ici, il suffit de rappeler que Porphyre, ennemi déclaré du Christianisme, se trouvait l'un des chefs les plus illustres de cette grande conspiration qui voulait empècher la chûte du Polythéisme. Nous avons essayé de moutrer dans un autre écrit (5) l'extension de ce système d'opposition et son influence. Nous reviendrons encore à cette époque mémorable. Le témoignage de Porphyre est absolument à rejetter ici, d'autant plus qu'il ne s'appuye que d'une tradition vague et peu connue.

Gèné par un passage de Diodore de Sicile (6) qui, en parlant de l'histoire d'Hercule, dit qu'elle présente de grandes difficultés et qu'on aurait tort de l'assujettir aux régles de la critique ordinaire, *Dupuis* déclare que l'erreur publique a obligé Diodore de composer avec elle.

Outre les passages que nous avons discutés, *Dupuis* cite encore Macrobe, Servius sur l'Enéide, le commentaire de Jean Diacre

(4) Euseb. praep. Evang. L. III. c. 11.

(5) Essai sur les Mystères d'Eleusis; troisième édition. Paris 1816. de l'Imprimérie Royale.

(6) L. IV. c. VIII.

sur Hésiode, Arnobe, Martianus Capella, et quelques astronomes modernes (8).

Pour donner une bâse spécieuse à son système, *Dupuis* aurait sans doute desiré trouver une autorité ancienne quelconque, au moyen de la quelle il eùt pû prouver que dès l'origine du Polythéisme, Hercule avait été confondu avec le soleil; malheureusement pour son système, de toutes les autorités qu'il entasse, pas une n'est antérieure à l'Ere Chrétienne (9).

De toutes les régles de la critique, soit historique, soit littéraire, la plus vulgaire et la plus utile, est celle de classer chronologiquement (quelque soit là dessus l'avis de mon savant ami Mr. *Creützer*) les témoignages cités, mais *Dupuis* ne s'y est pas astreint. S'il avait été de bonne foi, ou plutôt s'il n'avait pas été entrainé par l'esprit de parti, il se serait persuadé lui-même de l'impossibilité réelle de réduire tout le système mythologique à une seule base. En suivant la marche historique de la mythologie Grecque, en classant les époques et d'après elles les autorités, il aurait vû que ce léger et brillant tissu de symboles, de traditions générales, d'allégories, de faits historiques, de notions locales, de connaissances naturelles, présentait à chaque siécle, dans chaque pays, dans chaque ville, des variétés infinies, des faces différentes, des contradictions inexplicables. Ce qui ne pouvait manquer d'arriver, puisque ce vaste ensemble s'était formé successivement, non sur un plan arrèté, mais à mesure que la marche de l'esprit humain faisait naître de nouveaux besoins ou de nouvelles inspirations. Loin de suivre une méthode aussi simple, *Dupuis* semble avoir établi à dessein la plus grande confusion dans son ouvrage, tant dans la discussion de son système que dans l'emploi des autorités citées, confusion très propre à éblouir les demi-savans et à rendre difficile l'analyse d'un ouvrage scientifique.

Pour en revenir avec plus de précision au point de la question, jettons un coup-d'œil sur la marche du système mythologique

en Grèce. Il date d'Homère. Que ses poëmes soyent effectivement des productions originales, ou qu'ils soyent un recueil de poëmes détachés, dont le canevas seul appartient au siècle d'Homère, ici peu importe. Les écrits d'Homère furent non seulement la source de la poësie des Grecs, mais encore le principe de leur théologie. Le témoignage d'Hérodote est positif (7).

Le premier âge connu de la mythologie grecque est donc la mythologie Homérique. À cette époque, les notions religieuses n'avaient encore qu'une forme très simple, et même très vague. La vie civile n'existait pas.

Homère ne fait quelques détails sur Hercule que dans un seul endroit de l'Odyssée, chant XI. v. 601 — 636. Ce morceau est extrêmement remarquable; Ulysse raconte son voyage dans le pays des Cimmériens et son arrivée à l'endroit par où les mânes descendent aux enfers. Après les sacrifices prescrits il voit apparaître successivement les ombres des héros: „Alors je reconnus Her-„cule, dit-il, ce n'était qu'une ombre: Lui-même assiste aux ban-„quets des Dieux immortels, et possède la belle Hébé (8). Tels „qu'une nuée d'oiseaux, les morts effrayés se pressaient en foule „autour de lui: mais Hercule, semblable à la nuit épaisse, tenait „son arc et sa flèche qu'il agitait d'un air terrible, et qu'il pa-„raîssait vouloir décocher. Un baudrier retentissait sur sa poi-„trine; le cuir en était revêtu d'or; et l'on avait retracé dessus „avec un art merveilleux des ours, des sangliers farouches et des „lions aux regards étincelans (9), des combats homicides, le meur-„tre et le carnage. L'artiste qui avait fabriqué ce baudrier n'en „avait jamais fait de semblable et ne pourrait pas le recommen-„cer. Hercule me reconnut après m'avoir envisagé, et en soupi-„rant, il m'adressa ces paroles: „Fils de Laërte, ingénieux Ulysse,

---

(7) Herodot. L. II. c. 53.

(8) Dans l'original: καλλίσφυρον, aux belles chevilles du pied.

(9) Dans l'original: χαροποί. On l'interprête par *fulvi*.

„ seriez vous aussi poursuivi par le sort qui me persécuta tant que „ j'ai vu la lumière du soleil! J'étais fils de Jupiter. et pourtant „ mes maux furent inouis, car je fus soumis à un homme qui va- „ lait beaucoup moins que moi, et qui me commanda de pénibles „ travaux. Il m'envoya dans les enfers pour emmener le chien qui „ les garde, ne croyant pas qu'il fut un combat plus terrible. Je „ le vainquis, et le trainai hors des enfers avec l'aide de Minerve „ aux yeux bleus." Lorsqu'Hercule eut parlé ainsi il rentra dans „ la demeure fatale."

Minerve fait allusion à ce combat d'Hercule contre Cerbère et à la protection qu'elle lui accorda, par l'ordre de Jupiter, dans un passage de l'Iliade, Chant VIII. v. 362 — 372. Hercule est encore nommé dans un autre endroit de l'Odyssée, Chant XXI. v. 24 — 30, où le poéte l'appele *μεγάλων ἐπιίστορα ἔργων* et le fait contemporain de la jeunesse d'Ulysse. Il est fait mention d'Hercule dans quelques autres endroits des poémes d'Homère, mais ces passages n'ont rien de caractéristique. On les trouve notés à la fin de la plupart des éditions d'Homère. (10).

Voilà donc ce qu'Homère nous apprend d'Hercule. Y est-il question du Dieu-Soleil? Y a-t-il un seul mot qui puisse s'appliquer à cette idée abstraite de la force du principe actif? la moindre allusion à cette idée?

La mythologie d'Homère est en général fort éloignée des abstractions métaphysiques. Il serait absurde de chercher un germe d'unité réligieuse à une époque où l'homme gouverné par ses sensations et fier du développement de ses forces individuelles ne s'élevait pas à la hauteur du principe divin, mais abaissait les Dieux à sa portée. Le tableau que le poéte fait d'Hercule est absolument physique. En comparant ces passages d'Homère avec le passage que nous avons déjà cité de Nonnus, on pourra joindre d'un coup-d'œil les deux extrémités de la mythologie greeque.

Hésiode chercha à régulariser le système théogonique. D'anciennes traditions, des opinions vulgaires, quelques notions générales de physique furent le canevas sur lequel il s'exerça. Sa généalogie des Dieux est vague et même obscure en plusieurs endroits ([10]). On sent que le fil lui échappe, et qu'il a peine à suivre la marche irrégulière des traditions et des allégories (11).

L'immense influence d'Homère sur tous les siècles est trop connue pour avoir besoin de l'appuyer de preuves. Tous les genres de littérature puisèrent à cette source sacrée. L'épopée surtout resta son domaine exclusif, et ses nombreux imitateurs copièrent servilement la partie technique de sa langue, et de sa versification dans leurs moindres détails. Les Grecs croyaient avec quelque vraisemblance, la tragédie et la comédie, nées des poémes d'Homère.

Les poétes tragiques et lyriques, forment la seconde époque de la poésie Grecque. Ils décèlent déjà un état plus mûr de la société civile et politique. Les tragiques cherchèrent leurs sujets dans un cercle de traditions dont la plupart étaient originaires des écrits d'Homère. Sophocle a fait sur Hercule la tragédie des *Trachiniennes.* Il y a suivi l'opinion commune en Grèce qui en faisait un héros. Rien n'y décèle le Dieu-Soleil; il y est même question du Soleil ([11]) comme d'une divinité supérieure et protectrice.

À cette époque d'éclat qui dura long-tems et fut l'apogée de la gloire littéraire de la Grèce, succéda une époque différente où la philosophie, née dans l'orient, chercha à s'emparer de toutes les branches des connaissances humaines. Elle parvint à leur donner une direction nouvelle. La Poësie lui soumit ses brillans écarts. Les mythographes commencérent à s'occuper des traditions orienta-

---

([10]) Voyez sur Hesiode et sa Théogonie une dissertation très importante de Hermann: *de Mythologia Graecorum antiquissima.* Il est impossible de montrer des aperçues plus ingénieux et plus de sagacité.

([11]) Chor. v. 96 et passim.

les, à fouiller dans les antiquités, à remonter jusqu'aux sources; la frivolité apparente du Polythéisme faisait rougir les Philosophes. On essaya de soulever le voile qui le couvrait pour découvrir le dépôt mystérieux qu'il renfermait dans son sein. Les Stoïciens se distinguérent par leur constance à chercher le sens allégorique des fables ([12]).

A cette direction de l'esprit public se joignit par la suite la crainte qu'inspira un culte nouveau d'autant plus formidable qu'il était simple et qu'il reveillait dans le cœur de l'homme la pensée engourdie de sa dignité morale. Le Polythéisme attaqué dans ses sanctuaires, appela la philosophie à son secours. Une réligion qui croulait de toutes parts, offrait peu de moyens de défense. Alors parût le Platonisme d'Alexandrie.

Convaincus de la faiblesse interne du culte ancien, les éclectiques combinérent un système très étendu. Pour le fonder, il fallut chercher dans les décombres du Polythéisme le fil de quelques doctrines mystérieuses qui n'y étaient plus. Il fallut dire: „Le „Polytheïsme n'est pas un culte sans morale, sans but, sans dignité. „Le peuple a été trompé; mais les sages de tous les tems et de „tous les lieux, ont su que sous cette enveloppe frivole était déposé „un noyau, un trésor de lumières, dont le vulgaire devait ignorer „l'existence. Ce trésor avait été perdu; nous l'avons retrouvé.“.

Tels furent les principes d'après les quels on commenta la mythologie ancienne. Pour donner de l'unité au Polythéisme, on voulut tout ramener a une seule base; pour lui prêter un caractère intellectuel, on chercha une intention morale dans chacun de ses symboles; on fit violence aux autorités les plus respectables; on leur en substitua de nouvelles trouvées dans les débris des temples de l'Egypte. D'anciennes doctrines furent rajeunies; d'obscures traditions tirées de la poussière. Tout le vaste édifice de la Théologie Grecque fut reconstruit à neuf.

([12]) Cicer. de Natura Deor. passim.

Les Platoniciens les plus fameux: Plotin, Proclus, Jamblique, l'Empereur Julien et ses sophistes favoris, travaillérent avec ardeur au nouveau Polythéisme. Tous procéderent *a posteriori*.

C'est à cette époque qui embrasse un assez grand espace de tems qu'il faut rapporter la plupart des explications métaphysiques des dogmes du Polythéisme; explications consignées dans les écrits des Platoniciens, et des Pères de l'église. Delà, date aussi l'hypothèse de l'identité d'Hercule et du Soleil. Le témoignage d'Eusébe est sans replique. Il consacre le troisième livre de sa *préparation évangélique* à combattre le sens allégorique que les adhérans du Polythéisme prétaient alors aux fables de la mythologie. Il dit au sujet de celle d'Hercule: „Mais pour ne m'occuper que d'un exem- „ ple isolé, n'ont ils pas osé faire du Soleil seul plusieurs dieux? „ n'est il pas pour eux à la fois Apollon, Hercule, Bacchus, Escu- „ lape? mais comment le même personnage sera-t-il père et fils, „ Apollon et Esculape? comment se trouve-t-il métamorphosé en „ Hercule, *né d'une mère mortelle?* comment le Soleil en fureur „ égorge-t-il ses enfans? Il est vrai qu'ils disent que les douze „ travaux d'Hercule représentent la course du Soleil à travers les „ douze signes du Zodiaque; mais que feront-ils d'Eurystée qui „ ordonne au Soleil ou à Hercule d'exécuter ces travaux? De „ quelle manière appliqueront-ils au Soleil la chemise funeste teinte „ du sang infect du Centaure?"

Il est évident que cette hypothèse célèbre de l'identité d'Hercule et du Soleil se trouvait au nombre des moyens de défense employés par les partisans de l'ancienne réligion. Ils n'en négligeaient aucun. Le Platoniciens déployérent toutes les ressources de la mystagogie; ils essayéront de ressusciter le magisme. Aussi de toutes les hypothèses sur la doctrine secrète du Polythéisme, celle qu'ils favorisérent le plus est un culte universel du Soleil, comme principe actif de l'univers; hypothèse indiquée par quelques écri-

vains antérieurs; mais que les Platoniciens adoptérent, et dont *Dupuis* de nos jours, se constitua l'inventeur.

Si les adhérans de son système mythologique voulaient soutenir que l'identité d'Hercule et du Soleil était un dogme de la doctrine secréte du Polytheïsme, on pourrait répondre que c'est éluder la quéstion, que de la transporter sur un terrein tout à fait conjectural. Il est très vraisemblable d'ailleurs que la doctrine secréte du Polytheïsme, renfermait des vérités d'un ordre supérieur et des faits beaucoup plus importans que ne l'est au fond l'identité d'Hercule et du Soleil. Il serait nécessaire d'ailleurs qu'il y eut eu d'avance quelqu'analogie entre l'idée que les anciens se formaient d'Hercule, et celle qu'ils se formaient du Soleil, comme principe vivifiant de la nature. Nous avons vù qu'à la premiere époque connue du Polytheïsme, Hercule était considéré comme un héros déifié. Homère plaçait son ombre dans les enfers avec celle d'Achille et d'Agamemnon. Nous avons vù que cette tradition subsista longtems sous cette forme; et fut en viguœur pendant les plus beaux siécles de la Grèce. Certaines divinités telles que Cerès, Bacchus, Rhéa ou Cybéle, eurent dès l'origine un caractère mystique. D'autres par la suite furent considerées sous les rapports de l'allégorie; mais l'Hercule grec ne fut jamais dans le culte populaire qu'un *personnage historique* (12), et les preuves de cette assertion, se trouvent dans tous les écrivains antérieurs à l'Ere chrétienne.

Il est évident que le Soleil a été l'un des premiers symboles de la Divinité; mais le culte du Soleil, culte très éténdu, était d'origine étrangère; il était né, il s'était développé dans l'orient, et outre la disproportion des objets, on a peine à concevoir l'alliance bizarre d'une réligion orientale et d'un héros absolument grec. Cette dernière réflexion me conduit à renouveller ici une protestation que j'ai déja faite ailleurs, mais que les connaisseurs me pardonneront de répéter encore une fois. Il s'est introduit depuis quelque tems dans l'étude de l'antiquité, une manière absolument défectueuse e'

qu'il est important de signaler: trop long-tems on s'était borné à ne considérer le vaste ensemble de la Mythologie prise dans la plus haute acception du mot, que sous des faces absolument isolées; les grâves défauts de ce système, se sont fait assez sentir par le vuide et l'incohérence de toutes les théories qu'il a fait naître. Depuis que par une heureuse révolution dans la science on a reconnu unanimement les vastes et nombreux rapports qui établissent une liaison intime entre toutes les parties des traditions religieuses de l'antiquité, on s'est vû entraîné dans l'excès contraire. C'est surtout en Allemagne, ou l'étude de l'antiquité a fait de si belles conquêtes et des progrès si immenses, que cette nouvelle manière trouve maintenant des sectateurs passionnés. „Personne n'admire plus que moi, ai-je dit dans un autre écrit ([13]), l'hypothèse qui place dans l'orient le berceau de toutes les idées réligieuses et philosophiques; mais tout en reconnaissant la beauté de cette hypothèse et la rigoureuse justesse des apperçus qui en résultent, je dois dire avec franchise qu'il me paraît tout à fait absurde de ne vouloir pas faire la moindre part à l'esprit des Grecs. Il est incontestable que le Polythéisme est issu de l'Orient; mais il ne s'ensuit pas que les Grecs n'ayent été sous ce rapport si important que des imitateurs serviles et sans invention. Est il vraisemblable en effet que le vif génie, que l'imagination brillante de ce peuple qui se fraya partout des routes nouvelles n'eut à offrir rien d'original, rien de national sous le rapport de ses idées réligieuses, c'est à dire, sous le rapport de la source précieuse de son caractère historique et de sa gloire littéraire? (13)"

([13]) Nonnos von Panopolis, der Dichter. St. Petersburg, 1816. 4°.

NOTES.

(1) „On ne peut pas toujours expliquer par le Soleil seulement quelques fables d'Hercule qui semblent avoir principalement pour objet son image céleste ou la constellation qui le représente. C'est une distinction qui n'est pas à négliger." *Origine de tous les cultes.* T. 1. page 318.

---

(2) Lucien de Samosate, s'est fort agréablement moqué de cette double nature d'Hercule dans son XVIeme dialogue des morts. Ce morceau est une preuve de plus, que même à l'époque de Lucien, les anciennes traditions sur Hercule étaient généralement suivies et n'avaient pas fait place aux nouvelles explications.

---

(3) Nonnus ne pouvait manquer d'être influencé par l'esprit de son siécle, à une époque ou le Platonisme avait fait les plus grands progrès. Il est vraisemblable d'ailleurs que les commentateurs modernes ont souvent pris le change sur ses écrits; souvent, ils ont converti en découvertes nouvelles et profondes les brillans écarts de son imagination. Son abondance d'idées poëtiques, et son penchant pour les étymologies tendent des piéges à ses lecteurs sans qu'ils s'en doutent: Il faut un tact singuliérement exercé pour distinguer le Poéte d'avec le Mythographe. Tout ce qui regarde Nonnus et son siécle a été discuté dans un ouvrage que j'ai publié sous le titre de *Nonnos von Panopolis, der Dichter.* St. Pétersbourg 1816. 1. v. 4°.

---

(4) Il y a encore à ce sujet une observation générale à faire: La terminologie étrangère copiée par les Grecs, ne peut inspirer aucune confiance; nous en voyons la preuve dans les fragmens de Sanchoniaton conservés par Eusèbe. Les Romains à leur tour, s'approprièrent la terminologie Grecque d'une maniére fort infidéle; de

sorte que les noms Grecs correspondent mal avec les noms Orientaux, et les noms Romains assez mal avec les noms Grecs.

---

(5) Le savant Cumberland, en parlant des rapports qui subsistérent entre l'Egypte et la Grèce à l'époque la plus reculée, remarque que ces rapports furent par la suite interrompus pendant long-tems. *Cumberland, Sanchoniato's Phénician history.* London 1720. pag. 79.

---

(6) On trouve dans *l'Etymologicum magnum* que les Egyptiens donnaient à leur Hercule le nom de *Chon*, τὸν Ἡρακλῆν φασὶ κατὰ τὴν Αἰγυπτίων διάλεκτον Χῶνα λέγεσθαι. Court de Gebelin assure que ce mot dans la langue copte signifie force, puissance, vertu efficace (*Monde primitif.* T. I. p. 182). Mais on ne trouve nulle part que les Egyptiens ayent placé leur Dieu *Chon* dans le char du Soleil; ils ne donnaient de char ni à Osiris, ni à Horus. L'idée du char est visiblement Grecque.

---

(7) Je sais que l'on comptait non seulement un Hercule Egyptien (Hérodot. L. II. c. 43). Mais encore un Hercule Indien; Cicéron le dit expressement (De natur. Deorum L. III. c. 16) Arrien l'atteste également (hist. Ind. p. 319); mais il me paraît évident que l'Hercule Egyptien comme l'Indien étaient des divinités nationales qui n'avaient d'autres rapports avec l'Hercule Grec que quelque ressemblance accidentelle, soit dans leurs attributs, soit dans la maniére de les représenter, et dans le culte extérieur. Les savans auteurs *des recherches Asiatiques*, croyent reconnaitre dans l'Hercule Indien que Cicéron nomme Belus, Bala ou Balas, le frere de Crischna, communément appelé Bala-rama, ou Bala-deva (T. IX. pag. 33) Mais les antiquités Indiennes étaient encore plus mal connues des anciens que les antiquités Egyptiennes. Hercule me semble un personnage tout à fait Grec, un Héros populaire idealisé d'après le quel on a nommé mal à propos plusieurs divinités étran-

gères, et que par un système contraire on a voulu regarder ensuite comme la copie d'autres Dieux étrangers, dont la signification et l'emploi, correspondaient aux fonctions et à la physionomie d'Hercule. Cicéron cite aussi un Hercule Phrygien, un du Mont-Ida, un de Tyr. Les Celtes adoraient un Dieu que l'on a aussi nommé Hercule (Voss. de Idololatr. L. 1. c. 35.). L'Hercule Phénicien mérite une attention particulière.

---

(8) *Bryant*, que *Dupuis* semble n'avoir pas connu, a inséré dans son intéressant ouvrage (*A New System or analysis of ancient mythology.* London 1775 in 4°.) une dissertation particulière, par laquelle il tâche de prouver que vù l'extrême légereté des Grecs, leur négligence et leur orgueil national, les meilleures autorités sont les témoignages des écrivains postérieurs, et de ceux qui n'étaient pas nés proprement en Grèce. Parmi les poétes, il cite Lycophron, Callimaque, Appollonius de Rhodes, Nonnus, les commentateurs des poétes anciens; parmi les philosophes, Porphyre, Proclus, et les autres Platoniciens; parmi les Péres, Théophile, Tatien, Origène, Clément d'Alexandrie etc. ce raisonnement est plus spécieux qu'il n'est juste: Le témoignage des anciens Poëtes grecs, ne saurait être admis qu'avec la plus grande circonspection, toutes les fois qu'il s'agit de vérités *historiques* quelconques. Mais sous le rapport mythologique les poétes sont une source irrécusable précisement parcequ'ils offrent le type des opinions et des connaissances de leur siécle. Ainsi il ne s'agit pas de peser la valeur d'un passage d'Homère, ni de découvrir ce qu'il pensait de tel ou tel dogme du Polythéisme, mais bien de déterminer ce que l'on en savait en général de son tems. Voilà sous le rapport mythologique, l'usage que l'on doit faire des poétes. Une étude combinée des Péres et des Platoniciens, est sans contredit l'une des bases de l'étude de l'Antiquité; mais on ne peut s'y livrer qu'avec la plus grande précaution. Les Pères, dont les écrits sont si precieux, ne mirent dans leurs recherches sur l'an-

cienne théologie grecque, gueres plus de critique que les Platoniciens. Comme ils s'appliquaient à cette étude principalement dans l'intention de combattre le Polythéisme, ils se servaient à dessein de différentes sources : et plus ils confondaient les époques et les notices, plus ils donnaient une apparence absurde et incohérente au système dont ils avaient résolu de sapper les fondemens. *Bryant* reduit à son tour presque toutes les pratiques du Polythéisme à un culte primitif du Soleil, mais il ne se hasarde pas comme *Dupuis* à ramener immédiatement à la même source toutes les divagations de ce fleuve immense. Mr. *Bailly* dans ses lettres sur l'atlantide, a déclaré que *l'on ne pouvait douter qu'Hercule ne fut un embléme du Soleil*, p. 124. 125. Les hypothèses de Mr. *Bailly* sont assez décréditées maintenant, pour qu'il ne soit plus nécessaire de les combattre sérieusement.

---

(9) Toutes les autorités citées par *Dupuis* à l'appui de son système sur Hercule, sont postérieures à l'Ere Chrétienne. Cet argument est sans replique ; cependant nous irons plus loin : si l'on trouvait par hazard dans un écrivain antérieur au Christianisme un passage qui favorisât l'hypothèse de l'identité d'Hercule et du Soleil, on aurait tort de s'en prévaloir. Le Polythéisme reposait sur une liberté de penser et d'enseigner indéfinie. Le fait est que cette identité n'a jamais été qu'une idee moderne (si l'on peut s'exprimer ainsi) systèmatiquement introduite dans l'antiquité ; et voila ce que nous croyons avoir suffisamment démontré.

---

(10) Dans les hymnes homériques se trouve le fragment d'un hymne adressé à *Hercule cœur-de-Lion* ; nous le rapporterons ici pour constater le caractère que les anciens lui donnaient, d'autant plus que les hymnes homériques appartenant à une époque postérieure, peuvent figurer en quelque sorte le second âge de la mythologie Grecque.

Εἰς Ἡρακλέα Λεοντόθυμον.

Ἡρακλέα, Διὸς υἱὸν ἀείσομαι, ὃν μέγ' ἄριστον
γείνατ' ἐπιχθονίων, Θήβῃς ἔνι καλλιχόροισιν,
Ἀλκμήνη, μιχθεῖσα κελαινεφέϊ Κρονίωνι·
Ὃς πρὶν μὲν κατὰ γαῖαν ἀθέσφατον ἠδὲ θάλασσαν
πλαζόμενος, πομπῇσιν ὑπ' Εὐρυσθῆος ἄνακτος,
πολλὰ μὲν αὐτὸς ἔρεξεν ἀτάσθαλα, πολλὰ δ' ἀνέτλη.
Νῦν δ' ἤδη κατὰ καλὸν ἕδος νιφόεντος Ὀλύμπου
ναίει τερπόμενος, καὶ ἔχει καλλίσφυρον Ἥβην·
Χαῖρε, ἄναξ, Διὸς υἱέ, δίδου δ' ἀρετήν τε καὶ ὄλβον.

„ Je chanterai le fils de Jupiter, Hercule, le plus grand des „ humains qu'Alcmène aimée du Jupiter aux nuages noirs, mit „ au monde à Thébes (dans l'original: aux belles danses) Er- „ rant sur la terre et les mers, par ordre du Roi Eurysthée, „ Hercule causa de grands maux à ses ennemis et en souffrit „ beaucoup lui-même. Maintenant il habite plein de joye, la „ brillante demeure de l'Olympe couvert de neiges, et il pos- „ séde la belle Hebé. Salut, ô Roi, fils de Jupiter, accorde „ nous la vertu et le bonheur.“

Ce morceau donne une nouvelle force aux savantes objections de l'évêque de Cesarée. Le grand prix que les peuples anciens mettaient à la force du corps, qu'ils regardaient comme un don particulier de la divinité, pourrait fournir une explication de la fable d'Hercule plus vraisemblable et plus analogue à la nature de l'esprit humain, que les paradoxes ingénieux des Platoniciens.

---

(11) Hésiode nous a laissé un fragment connu sous le nom de *Bouclier d'Hercule.* Ce seul morceau suffirait pour déterminer irrévocablement le caractère du Mythe d'Hercule. La description du Bouclier est liée au recit du combat d'Hercule contre Mars, et contre son fils Cygnus. L'idée qu'Héside donne d'Hercule, est parfaitement conforme au tableau d'Homère. Aucune circonstance par-

ticulière n'y décèle la moindre intention métaphysique. Non seulement Hercule y est représenté comme le fils de Jupiter et d'Alcmène, comme un Héros soumis à de cruelles épreuves, mais il y est même plusieurs fois question d'Apollon, et de la protection qu'il accorde à Hercule; voici les passages les plus remarquables :

Ἀλλά οἱ (Κύκνῳ) εὐχωλέων οὐκ ἔκλυε Φοῖβος Ἀπόλλων·
αὐτὸς γάρ οἱ ἔπωρσε βίην Ἡρακληείην,
πᾶν δ' ἄλσος καὶ βωμὸς Ἀπόλλωνος Παγασαίου
λάμπεν ὑπαὶ δεινοῖο θεοῦ τευχέων τε καὶ αὐτοῦ. V. 67.
. . . Ἐν δ' ἄρα μέσσῳ
ἱμερόεν κιθάριζεν Λητοῦς καὶ Διὸς υἱὸς
χρυσείῃ φόρμιγγι . . . . V. 201.
. . . . τὼς γάρ μιν Ἀπόλλων
Λητοΐδης ἤνωξ', ὅτι ῥα κ. τ. λ. . . . . V. 478.

---

(12) En disant qu'Hercule est un personnage historique, nous ne nous engageons pas à prouver qu'il ait effectivement existé. Nous disons seulement que les traditions en faisoient un homme doué d'une force merveilleuse, soumis pendant sa vie à des épreuves très dures, et placé dans le ciel après sa mort. Diodore de Sicile, dont *Dupuis* a voulu en vain atténuer l'autorité, nous a conservé l'ensemble des traditions sur Hercule (L. IV. c. 151). On croirait au reste que le Mythe d'Hercule a été d'avance destiné à être torturé de toutes les façons possibles. Outre les écrivains qui en ont fait le Soleil, le savant *Leclerc* (*Bibl. univ.* T. I. p. 245.) en a fait un négociant Phénicien; *Banier*, un véritable Héros (*Myth.* T. VII. L. III); *Pluche*, une enseigne où Horus était peint une massue à la main (*hist. du Ciel*, T. I. p. 255). *Bryant* croit reconnaître dans le récit des exploits d'Hercule, l'histoire des conquêtes d'une nation entière (Tom. II. p. 73.). *Bergier* n'a vu dans ce Héros qu'une digue de terre bien battue, et dans ses travaux que des ruisseaux et des marécages de l'Argolide enlevés par des gouf-

res profonds, ou tournés par des bergers ou desséchés par des canaux (*Orig. des Dieux* T. II. passim) M. *Hüllmann* Professeur à Königsberg a énoncé récemment dans un ouvrage publié sous le titre de principes de l'histoire de la Grèce (*Anfänge der Griechischen Geschichte.* 1814) son opinion sur Hercule, qu'il envisage comme la dénomination collective de plusieurs colonies Phéniciennes et Carthaginoises. Les détails du Mythe d'Hercule, représentent d'après cette hypothèse qui semble appartenir à la fois à *le Clerc* et à *Bryant*, les combats, entreprises, établissemens de ces colonies le long de la Méditerranée. *Quot capita, tot sensus.*

---

(13) Voyez sur ce sujet dans la troisieme lettre de *Hermann* a *Creützer* (*Briefe über Homer und Hesiodus*, *Heidelberg.* 1818. pag. 64) une observation trés importante et qui donne un grand poids à la miénne. L'opinion de ces deux savans sur *le mythe* d'Hercule ne s'accorde pas avec mes idées; mais ce serait mal connaitre les interèts de la Science que de ne pas èmettre avec franchise ce que l'on croit la vérité. La différence consiste principalement en ce qu'ils mettent au commencement *du Mythe*, le sens allégorique que je voudrais placer à la fin. Ils supposent que l'on a été du composé au simple; tandis que je tiens la marche inverse pour la seule vraisemblable. J'ai peine à croire, je l'avoue, qu'une croyance *populaire*, formée comme celle des Grecs, ait eu pour élémens des combinaisons d'une aussi haute metaphysique. Hercule a commencé par etre un héros deifié; il a fini par etre le Dieu-Soleil. Comment admettre une marche opposée? — Au reste la publication de la correspondance de MM. *Hermann* et *Creützer* est un service signalé rendu à la Litterature et aux recherches mythologiques. Je me suis d'ailleurs expliqué sur le mérite de cet excellent ouvrage dans l'écrit intitulé: *Ueber das Vorhomerische Zeitalter*, *St. Petersburg*, 1819.

EPITAPHIUM CUFICUM MELITENSE

ANNI P. C. N. MCLXXIV.

C. M. FRAEHN

INTERPRETATUS EST.

Consessui Acad. Imp. Scient. d. XXIII Sept. a. MDCCCXVIII proposuit.

In compluvio domus cujusdam de amplissimis Melitae civibus insertus muro cernitur lapis cum longâ inscriptione magnis characteribus Arabicis exaratâ, monumentum Arabum quondam Melitae dominantium superstes. Exempla ab hac inscriptione expressa docti hospites complures secum abstulerunt; at operam lusisse videntur. Celeberrimo Assemanio proposita est; at non constat, quo interpretationis successu usus sit. Celeberrimum etiam Camillum Falconetum de eà consuluerunt; atque is quidem asseruit, in medio lapide legi epitaphium filiae cujusdam Arabis nobilis, nomine Hassan; quae autem a tribus partibus circumjecta cernantur, esse sententias de communi hominum fatali sorte, e Korano petitas. Sed haec universe et laxius, nec omnia recte quidem dicta. Multi deinceps alii viri doctrinae excellentis interpretationem hujus inscriptionis tentârunt, sed irrito successu ([1]).

Post tot irrita conamina qui multis illis magnisque, quae sane objiciuntur, difficultatibus nil territus fortiter aggrederetur arduum opus, est vir in omnibus virtutibus excellentissimus Andreas Jacobides Italinsky, Eques, Augustissimo Russ. Imperatori a consiliis arcanis ejusdemque ad 'Osmanidarum Sultanum antea, jam vero ad Pontificem maximum Romanum Legatus. Tantâ in nobilitate at-

([1]) V. *Fundgr. des Orients.* Vol. I. p. 393.

que luce quis non miretur tetricae Minervae singularem amorem? at vero studium in ipso argumento, quod non nisi hominis chartis impallescentis esse videbatur, illustrando positum quis est, obsecro, qui mecum non stupeat etiam? Habet sane Russiae Musa Asiatica, quod sibi gratuletur talem in ipsis magnatibus fautorem et cultorem intelligentem. Vir illustrissimus hujus epitaphii interpretationem novam et tälem, quae ad singula atque omnia descendat, accuratâ ipsius *cippi imagine* et animadversionibus philologicis auctam, libri egregii Viennensis modo laudati Volumini primo (2) inseruit.

Operi cuique incipienti favendum; quia maxima difficultatis pars in aggrediendo negotio sita Hoc si arduum est, quis primus tentans non hìc illic pedem in eo offendat, quis non aberret a viâ? Συγγνωμη πρωτοπειρα, et شتان ما بين السهل والحزن Atque in hoc quidem epitaphio, bone deus, quot salebrae asperrimae ubique impediunt! Character Arabicus ad Karmaticum, quod vulgo dicunt, genus accedit, ductibus mire et absque ullà normà intricatis et inflexis, obrutus ornamentis superfluis, quae saepe ab ipsis litteris aegre distinguas, idemque, quod molestissimum est, mirandum in modum vagus et inconstans; unde fit, ut primo intuens non possis non exclamare (cum Plauto): *haec praeter Sibyllam leget nemo!* Jam adde maximam elogii partem, non Koranicis, ut alias plerumque, constantem sententiis, sed a cippi auctore forte profectis iisque sublimiore atque poëtico conceptis stylo, id quod divinandi et interpretandi difficultatem magnopere augeat necessum est. Quid igitur, obsecro, mirum, si qui *primus* hoc volvere saxum forti brachio et multà vi aggressus fuit, prius, quam totum evolvisset, deficeret. Ego quidem neutiquam miror; et mihi fidem habeatis oportet, si modo verum est, quod dicunt المطلى بالنار اعلم بحره. Nimirum et ipse rem tentabam, sed idem ipse deficiebam, et quidem integer defatigato quasi succedens.

(2) p. 393-397.

Etenim anno MDCCCXI nactus primum *Fodinarum Or.* Volumen quum in illâ epitaphii Melitensis interpretatione, utut omnibus numeris absoluta a cl. Editore dicta sit ([3]), racemandum aliquid relictum animadvertissem, quae racematus eram, ut rectone incederem tramite docerer, communicabam illi viro, quo vix subactior alter in hac palaestrâ palaeographicâ exstitit, Olao Gerhardo Tychsenio, tunc incl. Universitatis Rostochiensis Procancellario et LL. OO. Professori meritissimo, nunc eheu rebus humanis erepto. Erant autem fere haec: in N°. 1 omnia fere jam eodem, quo nunc lego, modo legenda videbam; in N°. 2 legebam على pro غبر et مضجعى pro مضجع in N° 3 فخر pro فخذ; in N°. 4 recte jam tunc legebam versum primum: انظر بعينيك هل فى الارض من باق او دافع الموت او للموت من راقى; versus etiam secundi initium recte quidem transcribebam الموت اخرجنى قصرا فيا اسفى, sed adeo dubitanter, ut alias simul proponerem conjecturas. In iis, quae proxime sequuntur, misere hallucinabar. Et ultimum versum tunc temporis transcribebam hunc in modum: وفى مدرى وهباءى لما قدمت من عمل معص على وما خلفه باقيا Male.

Senex grandaevus, quo me meaque studia amplectebatur favore singulari, ita ad posita a me rescripsit sub finem anni MDCCCXIII: „ Ich ersehe zu meiner innigsten Freude aus ihrer Kritik des Transcripts und der Uebersetzung der Malthesischen Cufischen Grabschrift in dem Th. I. p. 393 f. der Fundgruben des Orients, „ dafs Sie auf dem geraden Wege der glücklichen Entzifferung der „ alten Arabischen Denkmähler und ein Meister in der Kunst sind; „ weil Sie sich genau an den Buchstaben halten, und nicht zu leicht „ nubem pro Junone ergreifen. Als ich im Jahr 1810 das obgedachte Volumen der Fundgr. erhielt: so bemerkte ich freilich alle „ die Versehn in der Area figurata, die Sie auch gefunden haben,

---

(3) l. c. p. 393 „*Nessuno riuscì mai a darne una traduzione ragionevole e compiuta. Alla fine noi abbiamo il vantaggio di averla attualmente*, eccet.

„ und welche die zum Theil sehr gekünstelten und veränderlichen
„ Buchstaben - Figuren leicht veranlassen konnten. “

Addebat, se a. MDCCCXII, quo cel. Hartmannum, Professorem Rostochiensem, et cl. Magistrum Sjöbring, Suecum, in legendis marmoribus Cuficis exercuerit, hujus epitaphii interpretationem perscripsisse, eamque licet in re non unà parum sibimet ipsi satisfacere professus ad me transmisit.

Ego vero lectà, quae ab hoc etiam tanto viro profecta erat, interpretatione, animo (quid negem?) cadere, spem perdere, consilium abjicere hujus aenigmatis Oedipaei unquam a me solvendi. Attamen intervallo sát longo interjecto denuo forte id perlustranti mihi aliquantum plus lucis videbatur affulgere. Observatà a me, etsi nondum omnes numeros habeant, in medium proferre non dubitavi, siquidem (ut sat trito dicto utar) ما لا يدرك كله لايترك كله. ودرك بعض الخير خيرمن ترك الكل. En vobis itaque lectionem meam, cujus parti primae N°. 1.) faciliori illi uncinis inclusa inserui, quae a Duumviris illis alio, quam quo a me, lecta modo sunt; in reliquis autem eorum versiones, in postremà etiam transcriptiones integras meae praemisi.

N°. 1.

بسـم الله الر

حمن الرحيم وصلى الله

على النبى محمد وعلى

آله وسلم تسليما لله

ٱلعِزَّةُ وَٱلْبَقَآءُ [It: والبقى] وَعَلَى خَلْقِهِ كُتِبَ ٱلْفَنَآءُ [It: الغنى]

وَلَكُمْ فِى رَسُولِ ٱللَّهِ إِسْوَةٌ حَسَنَةٌ هٰذَا قَبْرُ

مَيْمُونَةَ بِنْتِ حَسَّانَ بْنِ عَلِيِّ ٱلْهُذَلِيِّ [It: et Tychs: الهد ابن] وَالِي

(مَأْبُرِ) [It: ماين T: وليد] ٱلسُّوسَةِ [It: et Tychs. السوسى]

تُوُفِّيَتْ رَحْمَةُ ٱللَّهِ عَلَيْهَا [It. نور ويرحمه الله وعابها] يَوْمَ ٱلْخَمِيسِ

ٱلسَّادِسَ

عَشَرَ مِنْ شَهْرِ شَعْبَانَ ٱلْكَائِنِ [It: الكابر] مِنْ سَنَةِ تِسْعٍ وَسِتِّينَ

وَخَمْسِمَايَةٍ

وَهِىَ تَشْهَدُ أَنَّ لَا إِلَهَ إِلَّا ٱللَّهُ وَحْدَهُ لَا شَرِيكَ لَهُ

i. e.

In nomine Dei, miseratoris, misericordis; et bene precetur Deus Prophetae Mu'hammedi atque genti ejus et salutem impertiat omnigenam. Dei est potentia et aeternitas, sed creaturis ejus sancita est caducitas. Vobis autem in Apostolo Dei exemplum est egregium. Hoc est sepulcrum

Maimunae filiae 'Hassani, filii 'Alj. Huseilitae, Praefecti (vel Frumentarii) *Susae* [*It:* Ali Elhud, filii . . . . Susani. *Tychs:* Ali Elhed, filii Welidi, Susani].

Animam reddidit illa, cui gratia divina contingat, [*Ital.* Che iddio lo illumini e gli sia benigno. Essa cessò di vivere (4)] *feriá quintá* (s. die Jovis) *sexto*
decimo mensis Scha'ban, qui est [*It:* „magni" (5)] *anni quingentesimi sexagesimi noni* (6).
Testabatur autem non esse Deum praeter Allah, unum, aequali carentem.

N°. 2.

يَا مَنْ رَأَ الْقَبْرَ اِنِّى

قَدْ خُبِيتُ [بنيت *Tychs.* et *It.*] بِهِ وَ

التُّرْبُ غُبَّرَ [عليّةً *Tychs.*]

أَجْفَانِى [اخفانى *Tychs.*] وَ

آمَاقِى فِى

مَضْجَعِى [مهجع *It.*]

Ital.

O tu che miri la tomba! in essa sono io tratta quale sposa; porto le ciglie ingombre di polvere; il sonno della morte mi ha chiusi gli occhi (7).

Tychs.

„O is, qui videt hoc sepulcrum, quod equidem dudum exstruxi, „et mausoleum excelsum, quod me tegit et angulos in cubili meo,"

(4) i. e. „quem Deus illuminet et benignus respiciat! Desiit ea vivere."

(5) *del gran mese di Sch.*

(6) I. e. d. 21. Mart. a. 1174 p. Christ. nat.

(7) i. e. „O tu, qui contueris hoc sepulchrum! tracta in id sum tanquam sponsa, su„percilia gero oppleta pulvere; mortis somnus meos occlusit oculos."

Fr.

O tu, qui vides (hoc) *sepulchrum, en ego*
abscondita in eo delitesco,
pulvere inquinante
palpebras meas et
rhanteres meos in
(hoc) *meo recubitorio.*

N°. 3.

وَمُقَامِي فِي الْبَلَآءِ

عبر وفِي

نُشُورِي

اذا مَا حُبِيتُ [*It.* et *Tychs.* حيانى]

خَلَّاقِي [*It.* et *Tychs.* خلّائى]

أُحِبَّ [*It.* الى *Tychs.* احى] فَخْر(ا) [*Tychs.* فخر
It. فخذ]

وَجَنَّةً [*It.* وجنّة *Tychs.* ودين]

Ital.

Però questo stato di prova è transitorio; nell' ora della resurrezione, quando il Creatore mi restituirà alla vita, rivedrò piena di gioja i miei congiunti, e felice ne riporterò la mercede [8]).

---

(8) i. e. „Attamen hic status tentaminis transibit; die resurrectionis, quum Creator me „revocaverit in vitam, laetitia plena denuo videbo cognatione mihi junctos eoque „felix mercedem reportabo."

Tychs.

„ Et statum in tentamine, exemplum capiat! Sed in meâ re-„ surrectione, quum me vivificaverit creator meus ad gloriam et pa-„ radisum ,

Fr.

At commoratio mea in tentamine
non diuturna est ; atque in
resurrectione meâ ,
ubi impertiar sorte meâ ,
nanciscar gloriam
et paradisum.

N°. 4.

Ital.

الطب نفسک هلّ فی الارض من نافی او دافع الموت اوللموت
مرزاء فی
الموت اجر جنّی قصرافیا اسقا لم یتحیر ماه القانی واعلا فی
ضرّ وتب مهیا بما مرقد من عمل محصا علا وما خلفه باقیاه

Il genio del tuo animo risplendette quì in terra nella tua condotta in una maniera discordante: or nel procurar di rispingere la morte, or nella sollecitudine di rendertela vantaggiosa. La morte è dessa che fa passare allo stato della celeste rimunerazione , ove si gode il soggiorno dei beati tra il rezzo dei campi ameni ed il mormorar dei ruscelli d'acque perenni. Risorgeranno però dannati a soffrire pene atroci, aspersi dalle acque soporifere, li perfidi malfattori i quali non hanno dietro loro lasciata nel mondo alcuna opera buona (9).

---

(9) i. e. ‚Indoles animae tuae hîc in terrà se manifestat modis inter sese repugnantibus, vel „mortem repellendi studio vel commodum ex ea capiundi conatu. Mors ipsa est „quae perducit ad statum remunerationis coelestis, ubi beati facti commorantur in-

Tychs.

أَنظر بعينىّ هل فى الارض مُن باقى او دافع المَوتِ او للموت
من راى فى
الموت اجر حبّى فضلا فى اساغى لُمّ يتحيّر منّة القرانى واعلى
فى طرب وهناء رُبّما قدمت مِنْ عُمل محّص علىّ وما خلفه باقيًا

„ Oculis meis contemplabor (10), num sit in terra perennis aut mortem propellens (11), aut respectu mortis quis vidit in
„ Morte praemium amoris mei (in Deum), lucrum pro moerore meo? Restitutio in integrum seliget beneficium constellationis meae et summum.
„ In hilaritate et voluptate saepe praestitit praxi examinationis meae et ei adhaerescentibus bonis operibus. “.

Fr.

أُنْظُرْ بِعَيْنَيْكَ هَلْ فى الْأَرْضِ مِنْ بَاقٍ أَوْ دافِعِ الْمَوْتِ أَوْ لِلْمَوْتِ
مَنْ راقِى
الْمَوْتُ أَخْرَجَنى قَصْرًا وَيَا أَسَفى لَمْ تُنْجِنى مِنْهُ أَبْوَابى وَأَغْلَاقى .

„ ter camporum amoenorum umbras et rivorum perennium murmura. At Damnati „ ad subeunda supplicia acerba resurgent, aqua adspersi soporifera, impii scelerati, „ qui bonorum operum nihil in mundo post se reliquerunt.“

(10) *Tychs.* notam subjecerat hanc: Vocabulum secundum بعينيك legendum est, ut nunc video, non vero بعينى. Inde jam pro apodosi haec habens, verto: *Tu* (spectator) contemplare.

(11) Vide me supra pag. 483.

وصرت رهنا بما قدمت من عمل محضر علي وما خلفه باقى

Oculos attolle et vide, sitne in terrâ, qui perennet, aut qui repellat mortem, aut mortem qui magicis averruncet artibus.
Mors me sustulit violenter, nec eheu! me miseram salvare potuerunt portae meae neque serae meae.
Jam oppignerata teneor cum pro iis, quae (in alteram vitam) *praemisi, operibus ibi mihi repraesentandis, tum pro eo, quod retro reliqui* (12).

Jam agedum ad singula a nobis eruderata, quae egere videntur, testimoniis corroboranda accingamur, caussas etiam addentes eas, quae, quominus idem cum Duumviris laudatis sentiamus, impediunt.

---

ad N°. 1.

بسم) Per scripturae rationem, quae in hoc epitaphio obtinet, hoc vocabulum etiam باسم legere liceat, ita quidem, ut Elif cum sequenti litterâ coaluisse statuas, contra orthographiae quidem Arabicae leges, non vero praeter morem et passim in aliis monumentis et in nostri ipsius vocabulo الله l. 6 obvium. Verum etiamsi alias dicunt باسم, ut in illo *Korani* اقرا باسم ربك: tamen, quia usus evaluit, ut in hac quidem *unâ* formulâ tritissimâ بسم الله vel plenius بسم الله الرحمن الرحيم, — quae alteri antea consuetae: باسمك اللهم *in nomine tuo, o deus!* a Mu'hammede prophetâ substituta est (13) — littera ا elidatur et pro باسم scribatur بسم (14), praestat caudam

---

(12) Pressius converti, metu ne circumscribendo Arabica vel consuetudini Latinae magis accommodando alieni quid immiscerem.

(13) Vid. Abulf. *Annal. op.* Reisk. T. I. p. 126.

(14) Quod in *numo Seldschukidico* apud Adlerum in *Mus. Cuf. Borg.* Tom. II. N°. LVIII. بسم امير المؤمنين deprehendatur, quum tamen hîc باسم scribendum fuisset, id jam olim miratus sum, in *L. de num. Bulgh.* p. 45. Et recte me offendit insolita ratio. Nam deinceps hîc loci in *Bibliothecâ Imperiali publicâ* numum vidi Adleriano simillimum, ex quo intellexi ven. Adlerum in

illam, quae litterae ﺑ altius (ut item solet in hac formulâ) ascendenti praefixa est, pro ornamento habere, quali passim in hoc epitaphio litteras praeter morem modumque auctas videre est, veluti ل in هل, ف in اسفى etc.

وسلم تسليما) Quod in *Fodin. Orient.* legitur وسلام تسليم operarum errori adscribendum arbitror. Quem enim fugerit usus tritae illius formulae faustae apprecationis, soli nomini Mu'hammedis prophetae ([15]) apponi solitae: صلى الله عليه وسلم, et mos eidem insuper haud raro, للتاكيد seu ad vim augendam, adjiciendi تسليما? — Ceterum in وسلم ([16]) illo absolute posito observo subintelligendum عليه, quod modo praecessit, scilicet: *et dicat ei: es-salam aleik.* Talem ellipsin usus fert Arabicus, e. c. *Hist. X Vezir. ed.* Knös pag. 87: سجد له ودعى, *Vit. Tim. ed.* Mang. I, 405: تقضيا ماربهما و تخزا, *Chr. Arab. ed.* S. de Sacy I, 178: تاسفا به وسارو; et, qui inprimis apposite ad nostram caussam facit, locus est in praefat. 'Alii ben Sultan Mu'hammed Herawi ad Commentar. suum in *Banet So'ad* النبى صلى الله عليه وسلم وشرف وكرم, ubi intellige وشرفه وكرمه

---

legendâ hac voce errâsse. Nimirum non بسم, sed تسيم legenda est. Vide meos *Beiträge zur Muhammedanischen Münzkunde* p. 50.

([15]) Exstat de hoc argumento tractans liber Arabicus, (vid. Herbel. art. *Delail* et *Giozuli*) isque nuper Museo Academiae Asiatico accessit. Inscriptus est كتاب دلايل الخيرات وشوارق الانوار فى ذكر الصلاة على النبى المختار لابى عبدالله محمد بن سليمان الجزولى. Hic codex agit de faustae, quae Mu'hammedi Pr. fit, apprecationis virtutibus et de variis huic Prophetae prospera precandi modis. (Eidem Mscpto, etiam insunt: nomina seu epitheta Prophetae CCI numero, et imago الروضة المباركة s. Mu'hammedis sepulcrum, quod Medinae est, repraesentans.)

([16]) Pro quo male Michaëlis in *Supplementis* ad *Lex. Ebr.* art. p. 1762. ويسلم habet; quem errorem miror non correctum esse ab aliis viris doctis Michaelem citantibus. — Contra ويسلم legere, quam وسلم, mallem Abulf. *Ann.* T. III. 614, ubi textus sic habet: ونساله ان يصلى على محمد واله وسلم تسليما.

والبقاء) Quod in *Fodinis OO.* legitur واليقى sphalma typographicum esse pro والبقى, vix est quod moneam. Neque vero ipsum والبقى recte haberet. In archetypo video ا in fine vocis, nempe والبقاء, idque ipsum قافية seu rhythmus in τῳ الفناء obvius requirit. — Utor opportunitate oblatâ annotandi, verbum بقى cum suis derivatis etsi plerumque de *aeternâ* duratione ideoque fere de *Deo*, ut hoc ipso loco, adhiberi amet, — unde الباقى unum de الاسماء الحسنى s. epithetis Dei est, et hominem τῳ بقاء seu immortalitate gaudere negant; (17) — tamen et *hominibus* fausta apprecantes, ut fere modum excedunt Orientales, passim eodem utuntur, ut ابقاك الله, ادام الله بقاءك pro: Deus te salvum conservet in serum aevum; atque sic quoque in *Inscriptione Turris Diarbekrensis*, in Niebuhr. *Itiner.* T. II Tab. XLIX, legendum اطال الله بقاءه pro نعماه, quod O. G. Tychsen. in *Elem. Arab.* p. 61 dedit.

خلقه) خلقنا in *Fodin.* iterum operarum lapsus est. Formula autem illa وعلى خلقه كتب الفناء, frequenter in Muhammedanorum epitaphiis obvia, non est, quod sciam, Koranica, licet *Koranus* passim in eundem sensum loquatur et hunc tueatur verbi كتب usum, quo cum على constructum plerumque denotat *sancire, decernere aliquid in aliquem.* De mortis lege, ut hoc loco, usurpatur etiam apud Taberium in Wahlii, V. Cl., *Arab. Anthol.* pag. 216. الموتة التى كتب الله عليك

الفناء) Etiamsi Epitaphium الفنى prae se ferre videatur, malui tamen الفناء, Elif ultimum *ob spatii angustiam* decurtatum

---

(17) Veluti Elmacin. pag. 74. لابقا للانسان, et alius *poëta* apud eundem p. 48: لست بالباقى, nec non p. 263: اعلم بانك لا بقا لك (sic leg.), item Ibn-er-Rumi apud Reisk. ad Abulf. *Ann.* T. II. not. 446: وليس بباق ولا خالد, et Mutenebbi in Reisk. *monum. med.* p. 78: ان اسلم فما ابقى

esse censens, quemadmodum etiam in ل του لا in *Epit. Panorm.* in Rosarii Gregorio *Rerum Arab. Sic. Collect.* p. 146 observare est. Τὴν ὁμοιοπτωσιν ita bene habere, jam antea monui ([18]). Neque vero conveniret النَّنَى cum البَقَاءُ, nec cum البَقِّى.

اسوة (ولكم فى رسول الله اسوة حسنة) in *Korani* locis in *Fod. Or.* citatis, ubi eadem formula legitur, *exemplum quod imiteris propositum* denotat. Qui sensus quum mihi parum aptus videatur in hoc aliisque, ubi occurrit, epitaphiis, اسوة intelligo de *exemplo, quod ad tristem solandum adhibetur, dum scil. aliorum illi exempla recenses*, quemadmodum bene explicuit Pocock ad Togr. 197. In verbo nempe اسا et *consolandi* potestas inest, unde Lexicographi اسوة ipsum *solamen* etiam interpretantur. Usum a Pocockio adductum probabunt haec exempla: Tograï v. 46: وان علانى من دونى فلا عجب لى اسوة بانحطاط الشمس عن زحل, Ibn-Doreidi *Poëm.* v. 193 ed. Scheid: فى خطوب الناس للناس اسى, Abulf. *Annal.* T. II. p. 84. ولنا بما قبلنا اسوة et *poët.* ib. T. IV, 588: لم يشنه اذا طيف بالراس منه وله اسوة براس الحسين Perbene haec faciunt ad nostrum illustrandum locum ejusque hunc sensum probandum: *haud mirandam esse communem hominum fatalem sortem, quum vel ipse Muhammed Apostolus divinus eam non effugerit; imo ex ejus tanti viri exemplo consolationem capiundam esse* ([19]). Adjicere expediet موعظة seu παραινεσιν ex *Chutbâ* aliquà *Kasanensi*: ايها الناس اعلموا ان الموت

([18]) Atque aliis in Epitaph. البقاء et النناء distincte cernuntur, veluti in *Puteolano* apud Ros. Gregorio l. c. p. 152., et in *Messanio* ib. pag. 166 initio versus Cufici secundi, quod, ab Interprete non captum, ipsum و النناء est.

([19]) Recte me assequutum hujus sententiae sensum, Petropoli copiam *Collectionis a Rosario Gregorio* editae nactus intellexi; nam ibi اسوة cum عزاء *solamen* conjunctum occurrit pagg. 152. 155. 166. quod, quae vis priori vocabulo tribuenda, dilucide docet.

معقود بنواصكم ([20]) لا بد من ذوقه لكل امير ووزير وكل صغير وكبير وكل مسكين وفقير ما نجى من الموت ادم صفى الله وما نجى من الموت نوح نبى الله وما نجى من الموت اسماعيل ذبيح الله وما نجى من الموت موسى كليم الله وما نجى من الموت عيسى روح الله وما نجى من الموت محمد حبيب الله يا قوم الموت كل نفس ذائقة الموت ونبلوكم بالخير والشر والينا ترجعون i. e. *Scitote, o homines, mortem vestris innodatam esse antiis. Ejus poculum gustet necessum est omnis et Emirus et Wesirus, omnes parvi magnique, pauperes atque inopes omnes. Mortem non effugit Adam vir dei purus, nec effugit Nu'h* (Noë) *propheta dei, nec effugit Isma'il immolatus deo, nec Musa* (Moyses) *qui locutus cum Deo, nec 'Isa* (Jesus) *spiritus dei, nec Mu'hammed dilectus deo effugére mortem. O devota morti pectora!* ([21]) *quidquid vivit mortis gustat poculum. Tentamus vos, vel bona immittendo vel mala. Tandem ad nos revertemini.*

Ceterum sententia, quâ cum maxime occupamur, passim in elogiis sepulchralibus occurrit, verum ab interpretibus parum animadversa videtur. Sic in *titulo Cufico Columnae lapideae*, quae *Musei Societatis Antiquit. Londin.* est, felicius quidem ab O. G. Tychsenio quam ab omnibus, qui ante eum tentaverant, explicato (Rostoch. 1789), neutiquam tamen ad liquidum jam perducto, versibus 3 – 5 exstat. Sed vir doctissimus quod في *in* legendum erat, minus recte legit فز idque vertit: *decessit*, e vitâ nempe; quasi hoc verbum etiam (quemadmodum in مضى, ذهب all. obtinet) de *mortis itinere* usurparetur. Non ita est. اسوة autem a suis diremtum et ad proxime sequentia tractum pro titulo habuit defuncti Jusufi. Attamen in Tab. adjectâ, nec non pag. 9, ipse dubitans

---

([20]) Leg. بنواصيكم .

([21]) Quod in MS. est يا قوم الموت mihi non arridet.

maluit legere اسفر, quod ex archetypi characteribus manifeste اسوة exhibentibus neutiquam elicueris. Vertit autem: *ora.* At *orandi* vis huic verbo non inest. Imposuit viro doctissimo Castelli Heptaglotton, in quo phrasis اسفروا بالفجر (est ea autem ex *'Hadis* desumta) liberalius conversa est: *orate multo mane.* Verteris potius: *surgite cum primâ aurorâ;* sed quia ibi de precatione agitur, potuit utique reddi per صلوا مسفرين

Occurrit item in epitaphio, quod in *turri ruinosâ Lilybaei* (Marsalae) cernitur apud Rosar. Gregor. l. c. p. 155, at perperam lectum — وفى رسول الله — اسفرعن هذا قبر et perperam versum: *ipsique Apostolo dei* (scil. adscriptus est interitus.) *Ora apud hoc sepulcrum* — coll. b. Tychs. in *Elem. Ar.* p. 64. qui item فر (vel p. 146. فز *decessit*) et اسفر عن, aliena illa, huc quoque admisit. Corrige utroque loco: وفى رسول الله — اسوة وعزاء *in legato dei — exemplum, quod animos erigat, et solamen est.*

Etiam in *Epitaphio Puteolano* apud Relandium in *Diss. de Marm. Arab. Put.* pag. 5. et apud Rosar. Gregor. l. l. pag. 152, quae Relandus وفى رسوله النبوة وعدا legit vertitque: *impleat deus praedictiones prophetae suo factas,* Abbas autem de Longuerue non additâ transcriptione ita reddidit: *persolvit totum debitum istud Apostolus. Supplicate ei* (Deo); *nam misericors est,* — ipsam illam sententiam paullo pleniorem sistunt وفى رسوله اسوة وعزاء *in legato ejus exemplum, quod vos erigat, et solamen habetis.*

Porro eadem sententia in *Cippi Messanii* apud Rosar. Greg. l. c. p. 166 fragmento deprehenditur; nam posterior ejus versus, quem b. Tychsen. non cepit, hunc in modum legendus est: الفناء وفى رسول الله اسوة وعزاء هذا قبر ابى بكر i. e. (creaturis sancita est) *caducitas. Sed in legato dei exemplum animos erigens et solamen est. Hoc est sepulchrum Abu-Bekri* —

حَسَّانَ) Hoc scil. nomen proprium, sive حَسَّانْ sive حُسَّانْ proferas, perinde est. Prius si sequeris, ab حسن derivatum adjectivum formae فعّال est; alterum autem, ab حسّ derivatum, formae فعلان existeret. Adjicio verba Wan-kulii: حسان حانك فتحى وسينك تشديديله بر رجلك اسميدر واكر انى حسندن فعال وزنى اوزره قيلرسك منصرف ايدرسن واكر حسدن فعلان وزنى اوزره قيلرسك كه حس فتح حايله قتل معناسنهدر ياخود كسر حايله ادراك معناسنه اولن حسدن فعلان قيلرسك لاينصرف ايدرسن

بن علی الهذلی والی [مآثر] السوسة) Accipe, quae, quominus in iis, quae in *Fodin. Or.* et apud Tychsenium exstant, acquiescat; animum impediunt. Nomen proprium علی الهذل auribus Arabicis insolitum plane esse judico; unde admittere dubitaverim. Quod proxime sequitur بن potius, quam ابن legendum foret. Videtur ductus ille, qui per connexas superne litteras ه et د trajectus est, pro ا habitus esse, hujus rationis patrocinio forte petito a تشهد ان in ultimo hujus N. versu, quod eàdem in caussâ versari videtur, nisi ا male excidisse in apographo statuere mavis. At moneo, hunc ductum in hoc epitaphio solummodo ornandi caussâ passim adjectum esse, ut in هذا et محمد; deinde ابن si legeris, admitti, quod linguae legibus non satis conveniat. بن, non ابن, scribendum, quum praecedit nomen proprium simulque sequitur nomen patris, eaque conjunctim non sententiam nominalem (جملة اسمية constituunt. بن igitur legendum foret. Quamquam hoc non urgeo, quatenus tam in libris quam in monumentis passim contra hanc regulam grammaticalem peccatum est. Neque ad hoc ipsum approbandum facile inducor. Litteram *b* initialem altius productam defendere utcunque posset بسم initio epitaphii et بكر apud Rosar. Greg l. c. p. 166 in fine alterius versûs Cufici, alia exempla ut taceam. Verum tamen nostro loco neque *b* initialis, nec, quae sequitur littera, *n* finalis esse videtur; imo quisquis accuratius adspexeris, vix poteris, facere, quin pro.

لى habeas (22), coll. على N°. 1. l. 5. et اماتى N°. 2. Quo conjuncto cum praecedenti insolito الهد, habebis الهذلى i. e. *Huseilites, oriundus ex Huseil*, celebri illà tribu Arabicâ. Idque posui — At enimvero vocem proxime sequentem, hujus versus penultimam, unam de difficillimis et maxime ambiguis totius elogii pronuntiare non dubito. Exc. Italinsky transcripsit ماير; quamquam ipse sibi diffidens in versione exprimere veritus est. Estque sane nomen insolens, licet a ductibus archetypi non abhorreat. Equidem aliquando, vocem praecedentem الهذلى legens, hanc والد (*pater*) suspicabar transcribendam; sed quod alieno loco posita, nec usitata tali in caussà est, item quod ultimam litteram vix pro *d* habeas, damnabam. Tychsenius legit وليد *Walid* s. *Welid*. Nomen proprium autem, quale Welid est, licet, si vocabulum antecedens بن legendum foret, optime huc quadraret: tamen, ut de hujus بن fide non constat, ita in hanc et ipsam lectionem وليد notandum est, *d* a consuetà figurà in hoc epitaphio alias usitatà nimis abhorrere, atque potius *n* vel *s* (ز) vel *r* finalem esse videri. Hanc igitur lectionem recipere veritus, dedi السوسة (vel مار) والى الهذلى, licet mihi ipsi nondum satisfaciens et meliora circumspiciens. Scilicet nec mea nullum dubitationi relinquunt locum. Si والى legeris, ا quidem sequenti litterae junctum tuetur رسول الله quod supra legitur; sed hanc, quae cernitur, ى finalis figuram quo tuear non invenio nisi forte in على primi versûs *Columnae prope Monasterium S. Georgii* in Ros. Greg. *Coll.* p. 143; licet illam summa, in quà hujus ipsius litterae ductum finalem versari hoc epitaphium probat, varietas excusare queat. Numquid igitur مار legere praestat? Unice verum pronuntiarem, nisi negotium facesseret haec vox hîc tanquam muneris appellatio adhibita. Quod autem السوسة legerim pro السوسى, id tueatur litterae ى finalis negligentius exarandae consuetudo. سوسة *Susa*,

(22) Etiam Tychsenius id non negavit, ita quidem sentiens in responso ad me dato: „Es kann freilich, was unmittelbar auf الهد folgt, لى gelesen werden; allein da„durch werden die folgenden Namen ungeniesbar."

cujus iste Hassan sive *Wali* i. e. *praefectus, gubernator*, sive *Maïr* i. e. *frumentarius* s. *rei frumentariae magister* fuerit, est urbs *70* مغرب الاوسط s. Maghrebi medii, C. mill. Arabicis a Tuneto in littore maris mediterraneï sita, *ex quâ egressi Arabes Siciliam expugnârunt.* (23)

Erit post me (spero), qui unius illius vocabuli, quod in eà, quae hujus elogii esse deprehenditur, characterum inconstantià, مايز, مايز والد, وليد, والى lectum est et ثاير etiam, imo vel ثارد legi possit, demonstrēt veram lectionem; quo facto et de praecedente proxime et de proxime sequente certius constabit.

توفيت رحمة الله عليها) Ad ea, quae horum loco in *Fodin. Or.* leguntur, liceat mihi haec observare. نور in faustis apprecandis defuncto adhibetur quidem, neque tamen, quod sciam, sine addito sepulchri nomine, ut passim نور الله قبره, vél مرقده, vel ضريحه all. Postremi exemplum habes in *Vitâ Saladini*, *ed.* Schult. p. 15. Quale nomen quum hìc non sit adjectum, saltim ها in نور exspectaveris. At haec lectio suffixum ad posterius verbum rejicit, atque post idem verbum ponit vocabulum الله priori verbo postponendum; id quod ferri nequit. Nec minus admitti potest illud يرحمها Constat Arabibus praeteritum vices optativi supplere; cujus usus caussas expositas lege sis apud Pocock. in *Spec. Histor. Arab.* p. 56 sq. et Schultens. ad *Jobum* p. 496. Memini quidem mihi aliquando unum alterumve exemplum, quod eandem vim etiam aoristo inesse probare videbatur, occurrisse; sed vel in vitio cubabat locus, vel aliâ interpretationis ratione expediri poterat; unde annotare supersedi. Nostro autem loco ne haec quidem exceptio admitti posset ob positum praeteritum verbi praecedentis نور. Porro quod transcriptum est ويرحمها cum pronomine scilicet personae mas-

---

(23) Vid. Abulf. *Africa ed.* Eichh. p. 24 (coll. p. 6.). Edrisi apud I.-M. Hartmann in Eichh. Bibl. T. IV, p. 609. Kurzmann. in Paul. *Memorabil.* T. III. p. 30. not. etc.

culinae, quod versio ad patrem defunctae referre videtur, jam ideo probari haud potest, quod haec fausta comprecatio post interjecta plura aliorum nomina patri neutiquam competere existimanda est; nec vel ad defunctam, cui quidem competit, ita posita trahi potest. Omnino dicendum fuisset: رحمهم الله اجمعين — Quod sequitur, عليها legendum, in *Fodinis Or.* transcriptum est وغابها, figurâ ante عليها obviâ pro و habitâ, quum tamen unum de illis ornamentis sit, quae lithurgus inepto consilio passim interspersit. Atque hoc quidem وغابها l. l., ut ex versione patet, idem valere censetur ac: *mors autem ejus fuit* vel *accidit.* Quid? quod nota etiam addita usum hunc firmare studet. Habet autem ita: „Possedo un manuscritto nel quale trovasi in varj lochi il verbo غاب unito al verbo مات quasi per rinforzar la significazione dell' ultimo, e. g. ولما مات وغاب, ed ecco un passo in cui il sustantivo غاب ha la medesima significazione che ha in questo epitaffio: واوصت الى عبد الله اخيها بما اوصى اليها عمر وبصدقة تصدقت بها بمال وقفه بالغابة — Si tratta quì di Hassan una delle mogli di Maometto, la quale morendo raccomanda a suo fratello ciò che suo padre Omer le avea raccomandato, fra altre cose la distribuzione delle limosine prese dai fondi da lui a questo fine *morendo* consacrate." Ad haec non possum non observare, eam, quae verbo غاب inesse dicitur, potestatem, quà conjunctum cum مات hujus vim intendat, mihi valde dubiam esse. Equidem non memini me deprehendere hunc usum. Nam etsi de 'Hakimi illius famosi fine in Drusorum libris et alibi occurrat verbum غاب, id explicandum ex historiâ hujus principis, quem supra naturam in divorum numerum referebant sectatores; nec vertendum: *mortuus est*, sed vero: *disparuit, oculis hominum subductus est*, ἐξ ἀνθρώπων ἠφανίσθη, quo eodem sensu etiam Masdar hujus verbi غيبة usurpatum, c. c. Eichh. *Repert.* T. XV. p. 277 et alibi. Pronius ad fidem foret, غياب in loco priori in Notà laudato de *sepulturâ* intelligere. Nimirum Wan-kuli sub artic. غياب (locus *latentior*, profundior, fun-

dus putei etc.) adduxit formulam loquendi: غيبه غيابة (lego: غيبه عيابة i. e. abdidit eum locus latens ipsius seu scrobs ipsius), adjectâ interpretatione: ان دفن فى قبره i. e. conditus est sepulchro suo. ([24]) Hoc ipsum autem غياب est unum de Masdaris verbi غاب, non vero غاب. Hoc, uti et غابة, ejus forma singularis, in altero loco notae adducta, neque eam, quae in Fodin. ipsi tribuitur, neque eam, quam in غيبة inesse probavi, significationem habet. *Sylvam densiorem* denotat, لانها تغيب ما فيها s. *quia abscondat quod in illâ est*, uti Ibn-el-Asir observat apud Pocock. ad Togr. p. 97. Pleni sunt hujus usus libri Arabum, inprimis Poëtarum. Quod autem attinet ad locum paullo antea memoratum, ex MS. nescio quo adductum ad probandam protestatem *mortis* vocabulo غاب (imo غابة adest) inesse, ille plane aliud quid vult. Equidem eum verterem hunc in modum: *Illa testamento assignavit fratri suo 'Abdullaho idem, quod sibi olim assignaverat 'Omar, simul et quidquid opum sacro titulo s. piis usibus ab ipsâ legatarum in Ghabâ eleemosynae nomine possidebat.* Num جال recte habeat, nescio.

---

(24) Numquid ex hoc Dscheuharii loco originem traxit, quod Castellus ad Spec. Hdam habet: „abdidit, recondidit eum sepulchro, ecga.“? Legitne Golius غيبه غيابة? — Quod restat, non alienum erit annotare, similem phrasin in دفن ليلا وغيب قبره apud Elmacin. p. 42 haberi, sed alio sensu. Vult, quia nocte sepultus erat, sepulchrum ejus haud cognosci. Cf. Ibn-Kotaib. in *Repert.* T. XIV, p. 105. قبر باصل سور المدينة وغبى قبره, ubi forte rectius غيب legeris, quamquam et غبى ferri potest. An vero utroque loco legendum وعفى قبره quod habes in Abulf. *Ann.* T. II p 366 bene a Reiskio redditum: (foveam, in quâ eum humaverant,) protinus aequabant, ut sepulchri ne notae quidem superessent. Conf. Abulf. *Ann.* T. IV, pag. 90: هدم الحصون وعفى اثره et Poët. in Richards. *Gr. of the Arab.* L. p. 80. عفت ارسمها

Mallem من الله. An vero excidit يعني? Etiam in nomine ʻHassan, filiâ ʻOmari et unâ de Muʻhammedis uxoribus, de quâ hîc sermo esse dicitur, offendo. Neque حسن vel حسّان nomen mulierum est, neque tale nomen alicui uxorum Prophetae fuit. Haud dubie de حفصة *ʻHafsa* agitur, quam, ʻOmari filiam, a Muʻhammede in matrimonium ductam memorant auctores; vide sis Abulf. Annal. T. I. p. 194. Masʻud. in Vat. et Rink. *Leseb.* p. 110. پیرعلی وصیتی (ed. Kasan.) pag. 21 et al. — *Ghaba* autem, hîc articulo praefixo ad peculiarem notionem restrictum الغابة, est nomen loci, haud dubie sylvosi, haud procul a Medinâ versus Syriam, vid. ʻAbd-ul-ʻHakk apud Koehl. ad *Excerpt.* ex Ibn-el-Wardi pag. 170 not. 10 (ubi غابة ex Cod. Lugdunensi restituit Editor, licet Dresdensis, addo, et Lundinensis, nec non Kasanensis, dent غانة.) De الغابة adi etiam Ibn-Kotaib. in *Repertor.* T. XIV. p. 110 sq. Abulf. *Ann.* T. I. p. 114. (ubi Reiskius minus recte pro nomine appellativo habuit) et Wan-kuli, qui: وغابة موضعك اسمى درحجازده Sed haec sufficiant.

Quam ego dedi lectionem tueri supersedeo; adeo cippi characteres ei exacte respondent, adeo legibus usuique linguae consentanea est, adeo nemo non cognitam habet phrasin in libris et epitaphiis tritissimam: توفيت رحمة الله عليها *mortua est, gratiâ divinâ beanda,* proprie: *Morti, Angelo mortis, Deo, quasi debita, soluta est* vel *cessit illa, super quâ misericordia dei sit.* Scil. تَوَفَّى forma quinta activa verbi وفى (*completus fuit* etc.) propriâ sua vi denotat: *factus est* vel *fuit talis, cui integrum solveretur* i. e. *debitum sibi ab aliquo accepit,* indeque *mortalem, quasi debitum sibi, recepit* Angelus Mortis, Mors, Deus (25). Unde passiva hujus formae potestas: *mortuus est* (26).

---

(25) Nempe (ut cum Tarafa loquar) ما الايام الا معارة *vita nostra non est nisi mutuo nobis data* (coll. *Vit. Timur.* T. II, 86.), quam igitur fas est a nobis restitui Deo, qui credidit, vel angelo mortis, qui ejus nomine recipit. Conf. Sche-

عشر من) In *Fodin. Or.* typothetae culpâ impressum عشرين.

الكائن) In *Fodin. Or.* الكابر „*il gran* mese di Schaban.“ — Addunt quidem Mu'hammedani passim mensium suorum nominibus epitheta honorifica ([27]), e. c. رجب المرجّب (vocatur et شهر الله الاصمّ), ذو القعدة الحرام, شوال المكرّم, رمضان المكرّم vel شهر رمضان المعظّم, رمضان المبارك, ربيع النبوىّ, صفر المظفّر, محرّم الحرام, ذو الحجّة الحرام, etc. Atque sic ipsum mensem Scha'ban titulo المعظّم auctum inveni. Verum الكابر, utut ab Archetypi ductibus non abhorreat, tanquam epitheton, *magnus*, *augustus*, neutiquam admitti potest. Unice verum est, quod dedi, et

---

ref-ed-din T. I, p. 335: Elle rendit à l'Ange Israël [l. Israfil] la vie, qu'elle n'avoit qu'en depot; et *Chondemir* in 'Habib-es-Sijar T. III. f. m. 589 vers. جان بقابض ارواح تسليم نمود item cf. Latinor. *homo morti debitus*, similiaque.

(26) Occurrit haec verbi forma, sensu *moriendi*, haud raro in libris scripta توفا et توفت, active scilicet; item in Castelliano certe *Heptaglotto* haec eadem vis Activo tributa legitur; atque adeo ipse S. de Sacy, auctor in rebus etiam grammaticis gravissimus, active phthongisat تُوُفِّيَ hac, de quâ agitur, potestate praeditum (vid. e. c. ejus *Gramm.* T. II, p. 270. 295.) Attamen in solo Passivo hanc vim obtinere et تُوُفِّيَ proferendum esse, diserte mihi videtur probare, *cum* Activi formae quintae potestas genuina, paullo ante indicata, *tum Korani* lectio (veluti *Sur.* II, v 234. XXII, v. 5.), tum optimum quodque monumentum Cuficum apud Rosar. Greg. *tum* foemininum توفيت scriptum in optimis libris et in monument. (veluti in nostro epitaph. et in al. apud Ros. Greg. p. 161.), quod aliter, quam passive, proferri non licet (توفت autem et توفا non nisi in libris minus critice editis me reperire memini), *tum* porro قافية seu ὁμοιόπτωσις membrorum apud Ibn-'Arabschah T. I, 144: صوفى et توفى, *tum* denique Turcis receptus modus loquendi متوفّى اولق, non vero متوفّى.

(27) De quo more vide sis M. T. Beckium ad *Ephemerides Persarum* p. 7. et *Voyages de* Chardin, ed. Langl. II. p. 104.

ipsum cippi ductibus non minus conveniens, الكائن i. e. *existens, qui est, fuit*, quod vocabulum Arabes passim inter mensis et anni notam pleonastice interponunt, cujus usus exempla adducere supersedeo (²⁸).

وستين) In Autographo copula abesse videtur (ut ea sane in aliis etiam monumentis inter ipsa numeralia haud raro male omissa est), nisi forte circulo cum subjectâ lineolâ hic quidem eam repraesentari vis. Similiter Elif conjunctionis paullo post sequentis ان excidisse statuas oportet, nisi illud in ductu per conjunctas superne litteras ه et د in voce تشهد transacto latere mavis.

وهى تشهد الخ) Solemne in epitaphiis additamentum, innuens defunctum non modo Islamismo addictum fuisse, in quem, editâ testatione: لا اله الا الله, imo additâ alterâ: ومحمد رسول الله (quas conjunctas الشهادتين vel كلمة الشهادة vocant) transiri notum est, sed etiam post hanc fidei Mu'hammedanae testificationem vel pronuntiatam vel certe pronuntiari penes se auditam, spiritum emisisse. Est nempe dictum prophetae: من كان اخر كلامه لا اله الا الله دخل الجنة (*is, cujus postrema verba sunt: non est deus nisi Allah, paradisum ingredietur*). Neque tamen opus est, ut ab ipso moribundo proferantur, possunt etiam ejus loco ab adstantibus proferri. Ita *Comment.* in مختصر القدورى p. m. 63: اذا احضر الرجل الموت وجّه الى القبلة على شقه الايمن ولقن الشهادتين لقوله عم لقنوا موتاكم شهادة ان لا اله الا الله *Homo, animam agens, versus Kiblam convertatur in latus dextrum et geminum testimonium ei suggeratur, propterea quod Propheta san-*

(28) Id vero nunc notare juvat, in *Monumentis Cuf. Siculis* apud Rosarium Greg. p. 148 eâdem plane viâ erratum esse. Transcripta ibi sunt: من شهر ذى القعدة الحرم من سنة; sed tu ita corrige: القعدة الذى من سنة - - -, quemadmodum jam cel S. Assemani in *Mus. Cuf. Nan* posuit. — Etiam ib. p. 155 mensis Rabi' male auctus est epitheto المحرم. Lege: خلت من شهر ربيع الاخر

xit: Moribundis vestris suggerite testationem, non esse deum, nisi Allah. (29)

ad N°. 2.

In hoc N., uti et in NN 3 et 4, sepulta ipsa loquens inducitur, raro exemplo, quod sciam, in Mu'hammedanorum epitaphiis, sed frequentissimo in Romanorum, quibus *Allocutio ad viatorem* in hac caussâ magnopere adamata fuit.

يا من را القبر انى) را pro ران mihi ita insolitum accidit, ut diu, admitterem nec ne, incertus haererem. Attamen postquam in omnes partes characteres hos vertendo, quod magis arrideret, non potuissem eliccre, admisi, quia et in poëmate *'Akila* dicto apud ill. L. Baron. S. de Sacy, tam in *Extrait du Tome* VIII[e] *des Notices et Extr.* p. 143, quam in *Mémoire sur la litterat. des Arabes* p. 180, coll. notâ, item in nomine urbis 'Irakensis سامرا (pro سرمن ران) eundem scribendi modum deprehendebam. Sed vide, quisquis post me hoc idem elogium aggressurus es, lateatne in hoc versu aliud quid. Conjiciebam aliquando: يا من ران اقترابى vel اغترابى — — —, vel etiam يا من ران لعبراتى. Certe ante القبر demonstrativum هذا desidero. Displicet etiam h. quidem loco انى إ

خبثت) Olim legendum censebam بليت, duplicem admittens interpretationem. بَلِيت si pronuntiaveris, sensus exiret hic: *jam corrupta sum in eo* (sepulchro), *jam putrida evaserunt in eo ossa mea.* Habes hoc sensu بلى Abulf. *Ann.* T. III. p. 396. Mutenebb. ed. Reisk. pag. 78 et 89. Satis commode haec jungi posse cum proxime sequentibus videbantur. Sin vero protuleris بُلِيت

(29) Vide Muradg. d'Ohsson *Allg. Schild. des Osm. R.* I, 389. *Vita Saladin.* ed. Schult. p. 276. al. *La Vie de Timur-Bec par* Cherefeddin T. IV, p. 228. *Historia prior. regum Persar. ex Mirchonde* p. 70.

tentationem, quâ prober, jam subeo hoc in sepulchro, videbatur τῷ مقامى بالبلاء apte praemitti. Jam vero lego: انّى قد خبّيت به *ecce ego in eo* (sepulchro) *abscondita delitesco*, scil. quemadmodum olim in gynaeceo latebam. In memoriam revoces velim, lector, مخبّاة, de puellâ domisedâ e gynaeceo in publicum non prodeunte, verecundiae et modestiae caussâ, dici solitum, vid. Mutenebbi ed. Reisk. p. 86. et conf. proverbium اخبى من مخبّاة in Meidanii *Prov. op. posth.* Schult. p. 243. In figurâ litterae خ noli offendere; habes eam ipsam in voce حسنة ir N°. 1. l. 6.

والترب) تُرْب *pulverem*, *arenam* denotat, e. c. Meidan. *Prov. op. p.* Schult. p. 208, peculiariter autem *tumuli*, *tellurem tumulo aggestam*, veluti *Bord.* vers. 58. ad quem *Scholiastes* Heratensis: الترب بمعنى التربة او الترايب (pro ult. voc. legend. التراب), Muten. *ed.* Reisk. pag. 77. *Poët.* alius apud Reisk. in *Act. Erudit.* 1749. Jan. p... et passim alibi.

غبّر) *inquinavit pulvere*, ab exc. Italinskyo recepi. Antea legebam علّى, quia status praesens et cum maxime vigens mihi visus erat hìc requiri, cujus nota praepositio على est; quae praeterea, crebra in vestitu particula, hìc in tegumento etiam aptum locum occuparet. Sed غبّر recte habet tueturque eam lectionem عبّر in N°. 3.

اجنانى) اجنان sunt *palpebrae* (Augenlieder), كوزقپاغى apud Wan-kulium, non, ut vulgo explicant, *cilia* (Augenwimper) quae turcice كرپك (كرفك tatar.) audiunt.

اماقى) مُؤْق, unde pl. اماق, est *oculi angulus ad nasum*, tatar. كوزتوبى, graece κανθος et, quia inde lacrymae stillant, ῥαν-

τηρ dictus. Sic *Scholiastes* ad *'Hamas* in Vat. *et* R. *Les.* p. 146: موق هو طرف العين الذي يلي الانف وهو مخرج الدمع, cf. etiam *Scholiast.* ad 'Harir. *Mekâm.* XIV. l. c. pag. 140. ubi ماقى ad explicandum مدامع adhibetur. Inde, ut hoc ipsum مدمع, non quidem de oculo in genere, sed de *oculo lacrymante*, lacrymis tumente, usurpatur haec vox, quae fere styli sublimioris et poëtici est, v. c. *'Hamas*, l. c. *Poët.* in Abulf. *Ann.* T. III, p. 270. S. de Sacy *Chr. Ar.* p. 256. et loco ex *Anthologiâ* laudato ab exc. Italinskyo. Hîc autem teneri velim primam ejus et propriam significationem. Notus est foeminarum Orientalium mos, collyrio كحل dicto oculos suos denigrandi, vid. Arvieux *Sitten der Beduinen*, p. 112: „Den *Rand ihrer Augenlieder* schwärzen sie mit einem schwarzen Pulver von Bleyerz, das sie Kohel nennen, und ziehen eine Linie von gleicher Farbe nach dem *Augenwinkel*, damit die Augen gröſser scheinen sollen;" quibus adde quae ex aliis itinerariis ad h. l. not. 35 attulit celeberr. Rosenmuellerus. Ad hunc morem hîc alludi suspicor, quasi dicat defuncta: *ego quae quondam palpebras, imo cilia, rhanteresque collyrio denigrare solebam, jam utrumque pulvere foedatum habeo in hoc meo recubitorio.* Comparandus omnino est Mutenebbi l. c. p. 89: وكم عين مقبلة النواحى كحيل بالجنادل والرماد ubi Reiske inter alia: „Mit dem Augenpulver, mit dem die Morgenländer ihre Augen bestreuen und färben, vergleicht der Dichter den Sand, den Staub, die Kieselsteine, unter welche die Leiche verscharrt ward."

مضجعى) Hîc etiam teneto duplicem potestatem vocis مضجع. Proprie *locum recubitûs, recubitorium, lectum, torum genialem* denotat; deinde ad *sepulchralem domum, quietum sepulchrum* transfertur, veluti in egregio illo *epicedio in Ma'anum* in Schultensii *'Hamasâ:* فيا قبر معن انت اول حفرة من الارض خطت للسماحة مضجعا, (unde et ضجيع pro *sepulto cum altero* habes in poëseos specimine praeclaro in Abulf. *Ann.* T. IV, p. 562.) Similis metaphora obtinet in مرقد *cubili*, deinde *cubili sepulchrali* e. c. *Koran.* xxxvi.

v. 52. Cf. *Slapigravi*, pro sepulchro, apud Lipsium in *Epist. ad Belg. Cent.* III. p. 52 et Owenii *Epigr.* p. 52:

Angli *Bed* lectum vocitant, Cambrique sepulchrum;
Lectus enim tumuli, mortis imago sopor.

Jam cur ab iis, qui ante me hujus epitaphii interpretationem aggressi sunt, hìc etiam in nonnullis recedere coactus fuerim, si cognoscere vis, haec habe. Versum secundum legere utique cum exc. Italinskyo et b. Tychsenio liceret: انى قد بنيت بها, verum neutrius versionem usus linguae tuetur. Italinskyus vertit: „*in essa* (la tomba) *sono io tratta quale sposa.*" — Dicunt Arabes بنا فلان على اهله, vel, (quod, etsi improbetur Dscheuhario, tamen longe usitatissimum est,) بنا فلان باهله, quod proprie sonat: *super* vel *cum sponsâ construxit* scil. قبة Kubbam seu *tentorium fornicatâ formâ*, quod solus cum solâ sponsus ingrediatur, indeque idem valet atque: *nuptias cum aliquâ celebravit.* Sic Mas'udi l. c p. 109. تزوجها وهى بنت سنين وبنى بها بعد الهجرة بسبعة اشهر, et Abu-Sacarja in Eichh. *Repert.* T. VII, p. 138. نكح عائشة وهى بنت ست سنين ثم بنى بها وهى بنت تسع سنين. Quo eodem sensu et eâdem cum ellipsi non solum forma hujus verbi octavâ utuntur (e. c. Ibn-Kotaiba in *Rep.* T. VII, p. 146: تزوجها وابتنى بها et Elmac. p. 136: ابتنى ببوران بنت الحسن) sed etiam verbo دخل, ut دخل بها proprie: *intravit* (sponsus) *cum eâ tentorium nuptiale* (30). Ad ellipsin illam quod attinet, conferas velim Abulf. *Ann.* T. I. p. 210: وضرب له قبة وطيبها بالبخور واجتمع بها Ex exemplis autem hisce, quae facili negotio augére possem, patebit, بنا hoc sensu de *sponso* dici, non vera de *sponsâ*; et licet in *Hist. X Vesir. ed. Knös* V. Cl. p. 89 legatur: انها دخلت على ابن الملك وحملت منه, id vitium esse judico, Arabismo recentiori corrupto tribuendum, cui simile quid in sextum a Fugà saeculum vix ceciderit. Non potui igitur hanc amplecti lectionem.

---

(30) Moneo ὡς ἐν παρόδῳ, in *Nocte* CLXIII adjectâ Richards. *Grammar of the Arab. lang.* pag. 206 legendum فاذا دخلت بها

Qui sequitur versus tertius et quartus, in *Fodin. Or.* rectè lectus versusque est; sed qui ex *Anthologiâ* aliquâ ad الترب laudatur versus, non erat afferendus, si quid video. In eo enim non التُّرْب legendum, sed التُّرَب, qui, plur. του تُرْبَة, *tymbos, tumulos* significat. Verto: Tymbi comprehendunt decus formae pulcherrimi cujusque mortalis.

In ultimo hujus N. vocabulo, quod موجع invitis characterum ductibus lectum est, non immoror.

In alia omnia autem abiit Tychsenius ὁ μακαρίτης. Conjungenda ipsi visa est haec areola lateralis cum initio sequentis, Numero 3 insignitae. Verum enim vero in ejus interpretatione quominus acquiescas, inter alia impediunt haec. بنيت به pro: *exstruxi id*, ab usu linguae respuitur, quippe qui aedificium, quod exstruis, in accusandi casu poni flagitat. Porro الترب علية non significaret: *mausoleum excelsum*, sed: *mausolea sunt excelsa*. Addit quidem تغمده الله برحمته: „vere ut dicam, adest الترب علىّ *tumulus excelsus* vel *supra me*; تُرْبَة tamen usu frequentius est.“ Sed nec hac viâ barbarismum fugeris. Neque enim ترب Arabes unquam, quod sciam, dixerunt, nec علىّ pro عليًّا, nec, si ترب pro تربة significatione tumuli sumere liceat, الترب علىّ mausoleum excelsum significare potest, sed: mausoleum est excelsum. — Verba ultima واماقى فى مضجعى legendi ratio viro beato mecum convenit, non vero intelligendi. Vertens: *et* (qui videt) *angulos in cubili meo,* quid intenderit, non intellexeris, nisi ex notâ additâ: „Forte cubiculum, inquit, in quo sarculus positus, octogonum erat.“ Scilicet seni grandaevo imposuit Lexicorum *angulus oculi*, quod alios etiam quoscunque angulus designare existimavit, quod non ita est. Videtur etiam cubile et cubiculum promiscue habuisse. — Haec cum aliis, quae taceo, sunt,

quae hanc viri pie defuncti interpretationem neutiquam admittendam probant.

ad N°. 3.

ومقامى فى البلاء عبر) *Sed commoratio mea in tentamine est transitus* (عبْر) , *non diuturna est.* Sic ego, praeeunte exc. Italinskyo: *però questo stato dì prova è transitorio.* Sed moneo, de بلاء mihi dubia oboriri. Significat quidem haec vox *tentationem*, peculiariter *divinitus immissam*, sumiturque sive in bonam, sive in malam partem, praecipue tamen in *malam;* unde passim denotat *afflictionem*, *calamitatem*, *miseriam*, quà homo hoc in mundo probatur quasi, veluti *Koran.* II, v. 46. coll. *Scholiast.* ad ʿHarir. *Mekam.* XIV, p. 134. et *Glossâ Korani Petropolitano-Kasanensis* pag. 194: البلاء على ثلاثة اوجه نعمة واختيار ومكروه, ubi pro اختيار legendum est اختبار, idque rectius τῳ نعمة anteponendum erat. Verum an eadem vox etiam de سوال القبر seu de transactae vitae examine post mortem in sepulchro a Munkir et Nekir angelis instituendo, aut de statu hominis inter mortem et resurrectionem intermedio adhiberi possit, ambigo. Liceret quidem quodammodo huc trahere *Koran.* XXI, v. 36. كل نفس ذائقة الموت ونبلوكم بالشر والخير فتنة والينا ترجعون, sed ordinem sermonis, ut passim in Korano, ita hoc quoque loco turbatum esse potius crediderim. Accedit, quod afflictiones illae in sepulchro jam subeundae (عذاب القبر quoc. conf. Judaeorum חבוט הקבר) in solos improbos cadunt. Quae in *Fodin. Or.* ad البلاء adducta sunt, non faciunt ad illam notionem illustrandam. — Item عبر mihi in dubium venit, quia hoc sensu praeditum vix probari defendique posse videtur, nisi forte a locutione عبرالناس زمانا يفعلون كذا وكذا. Estne forte legendum علٍ? et مقام *status*, ut منزلة, de *dignitate* intelligendum? quasi dixerit defuncta: sed dignitas mea in hoc tentamine alta est, i. e. probata sum. Cf. de hominis probi tentamine sepulchrali Jaʿhja apud Maracc. ad *Koran.* T. II, p. 378. — Beat. Tychsenius عبر

interpretatus: *exemplum capiat*, primae hujus verbi formae tribuit, quae octavae est, significationem. Nec, si haec illi etiam inesset vis, praeteritum aoristi, qui hìc adhibendus fuisse videtur, vices pensare posse censeo.

اذا ما حُبيتُ خَلاّقى) Exc. Italinskyus et b. Tychsenius: اذا ما حيانى خَلاّقى *cum Creator meus me ad vitam revocaverit.* حيانى etiam p. 396 *Fodin. Or.* legitur. Frustra tamen in ipsâ tabulâ, quae epitaphium aere expressum sistit, ultimam syllabam ى circumspicio. Sed ponamus adfuisse in ipso lapide, omissum autem esse in apographo; plane tamen insolitum mihi accidit illud حيّا pro احيى, forma nempe secunda pro quartâ. Haec quartae verbi مات opponitur, non illa, quam, nisi in salutationibus, non deprehenderis usurpatam; et corrigendus est Wilmet in *Lexico*, qui exemplum ex *Vitâ Timuri* adductum secundae formae attribuit, quum quartae debuisset. Tychsenius haud scio an difficultatis quid in hac legendi ratione odoratus sit, subjiciens: „Pro اذا ما حيانى lego etiam ادام أُحيا i. e. *perennabo. Renovatur* sors mea etc.“ Nec tamen vel sic procedit. — Ego legens: اذا ما حبيت خلاقى *cum impertiar sorte meâ*, ita me tueri posse mihi videor. Quod in textu epitaphii est, primo adspectu utique habere licet pro حيا, cujus litterae Elif a parte dextrâ adjectum ornamenti nescio quid, quale eidem litterae et alibi in hoc epitaphio additum videre est. Sed in eâ, quae hujus elogii est, scripturae inconstantiâ non male religiosus, sumendam duxi hanc litterae Elif figuram pro ب, reflexâ nempe in altum caudâ, quam spatii angustia extendi in sinistram vetabat, coll. الغناء supra et صبر aliisque in *Epitaph. Messanio* apud Rosar. Greg. p. 143. حبا autem inter alia idem valet atque اعطا *dedit, donavit*; vide exempla in Meidanii *prov. op. p.* Schult. p. 80. et 'Harir. *Mek.* XIV. l. c. p. 133. Construitur cum gem. acc. unde in Pass. recte dicere licet حُبيتُ خلاقى *accepi portionem meam;*

خَلاُقِى enim insuper profero, non خَلّاقِى. (Tychsenio etiam in notâ paullo ante laudatâ id obversatum esse vidisti.) خَلَاق autem est *sors, portio boni*, pecul. *in vitâ futurâ* accipienda, vid. *Koran.* II, v. 96: ما له فى الاخرة من خلاق, et III, v. 71: اوليك لا خلاق لهم فى الاخرة

اُحْبِى فخر(اً) وجنّة) Pro his non spoponderim. Violenter fateor factum, intrudere textui integram litteram ا; ausus tamen sum, tum quod Elif cum limbo sinistro facile poterat commisceri et confluere, tum quod, id nisi factum est, in ipsâ illâ figurâ, quae in versus ultimi initio cernitur et alibi tantum ornandi caussâ adjecta est, forte latet hujus litterae eo trajectae residuum. Accusativo autem egebam propter احبى. Quod ad فخر, noli offendere in litterâ ultimâ, quae potius figuram د prae se ferre videtur; attamen ab ر in vocabulo شريك quodammodo defenditur. — وجنّة a b. Tychsenio mutuum sumsi. Ad figuram τον ج quod attinet, conferenda sunt vocabula حسنة et خبيث. Nec ambiguam habeas velim vocem hanc, articulo quippe destitutam. Vel absque articulo de *Paradiso* nonnunquam adhibetur, veluti *Koran. sur.* LXXVI, v. 12. In *Fodin. Or.* haec transcripta sunt hunc in modum: امى فخذ ودين atque ita reddita: *rivedrò piena di gioja i miei congiunti, e felice ne riporterò la mercede.* Ego quidem fateor, me non capere, quì ex illis vel hic vel alius sensus commodus elici possit. In امى, quomodocunque id verterim, non deprehendo, quod ei hìc tributum video. Numquid animo vertentis obversabatur اجى? at tunc accusativo opus erat. Porro فخذ designat quidem familiam minorem, proximam alicujus cognationem et familiam; at, si quid video, non hoc vocabulo, sed اهل potius usus fuisset Arabs. — Denique دين nec ex istis ductibus archetypi elicueris, nec commode hoc impertieris sensu. — Beatus Tychsenius legit الى فخر وجنة: quum creator meus me vivi

ficaverit *ad gloriam et paradisum* — Apodosis ipsi est initium sequentis N°. 4. Verum nec الى latere potest in primâ voce versus penultimi; manifesta apparet littera ه; neque apte sane haec ab illis, quae in N°. 4 sequuntur, continuari videntur.

ad N°. 4.

Hucusque non solummodo eruderata a me argumentis, quibus opus erat, tueri conatus sum, sed simul etiam singula atque omnia, quae in Transcriptionibus ante me tentatis minus probari posse videbantur, recensui, nec quaecunque eorum fidem imminuere censebam silui. Ipsemet etiamsi forte non omnibus difficultatibus tollendis par deprehensus fuero, vel indicâsse eas tamen proderit. لو لم يكن فى هذه الالفاظ الا ما يشاكل فى اعتقادك الموروث لكفى بذلك نفعا فان من لم يشك لم ينظر ومن لم ينظر لم يبصر ومن لم يبصر بقى فى العمى والحيرة. Fas est porro etiam a me transcripta auctoritatum fide probare et corroborare. Fas esset, caussas etiam, ob quas a Duumvirorum, qui ante me in hanc palaestram descenderunt, placitis recesserim, exponere et demonstrare. Sed in immensum exspatiandum foret. Tam in alia omnia jam a me abitur, quoad lectionem, quoad interpretationem. Cum utràque Transcriptione et Versione supra adductâ meam ibidem in medium prolatam si contuleris, fieri non potest, quin aliud prorsus elogium exc. Italinskyo, aliud b. Tychsenio, aliud tandem mihi ante oculos positum fuisse suspiceris; quamquam unum idemque est. Sufficiat itaque, observare ab utroque transcripta stare non posse, et non nisi a me prolata idoneis testimoniis tueri, quibus tamen parum egere videantur, quum vel per se intelligenti probatum iri (sine invidia dixerim) spes me tenet et fiducia.

انظر بعينيك) Additamentum: *oculis tuis ambobus* vide, energiae inservit. Similiter Latini: *hisce oculis vidi.*

هل فى الارض من باق او دافع الموت) Ad haec forte haud abs

re fuerit monere, in sententiis interrogativis negationem involventibus subjectum nonnunquam praepositione مِن praemissâ circumscribi, id quod praecipue in sententiis negativis usu tritissimum, e. c. ما من اله الا الله. Illustr. quidem S. de Sacy ([31]) شيء vel احد subintelligi posse statuit. Verum quod ad احد, memini me legere in *Korano* ما يعلمان من احد.

او للموت مَنْ رَاقِي) Hic مَنْ phthongisavi, quoniam ita *Koranus* loco statim laudando, quamquam nec مِن male haberet. رَاقِي autem scripsi pro رَاقٍ, propter اغلاقي τοῦ ثانية versus sequentis. Verbo autem رقى inest etiam vis *immurmuratis magicis formulis*, vel *adhibito amuleto magico, prohibendi noxam.* Haec in epitaphio nostro obtinet, cujus auctor id ex *Koran.* LXXV, v. 27 hausisse videtur, ubi haec leguntur: اذا بلغت التراقي وقيل مَنْ رَاقٍ i. e. *ubi* (spiritus, anima, النفس) *pervenit ad fauces, et clamant: quis est, qui incantando me tueatur, vel a me avertat*, scilicet *mortem* ([32])? Habes in *Makfurâ* Ibn-Doreidi v. 175 ed. Scheid. eandem fere sententiam: الردى اذا اتاه لا يداوى بالرقى, item apud *poët.* in Abulf. *Ann.* I, p. 376: واذا المنية انشبت اظفارها النيت كل تميمة لا تنفع Nimirum تميمة, quod Reiske minus recte vertit *pretiosum*, significat *amuletum magicum.* Ceterum conf. Sa'adi *Gülist.* Lib. VI, c. 1, fin. ibique Olear. item Schult. *Comment. in Prov.* X, p. 91 sq. ad quem Scheidius l. c. lectores able-

([31]) In *Gram.* II, p. 193. add. I, p. 365.

([32]) Nempe locutio illa اذا بلغت التراقي, uti similes Koranicae اذا بلغت الحلقوم, اذا القلوب لدى الحناجر كاظمين, اذا بلغت القلوب الحناجر, *mortis momentum* indigitant, quando nempe prae anxietate spiritus jam in faucibus haeret Cf. Turcarum جانى اغزنه كلدى

gat, quem ipse quidem consulere nequeo, quia mihi libri hujus copia non est.

الموت اخرجني تقصرا) Post اخرجني mente suppleo من الدنيا *ex hoc mundo*, *ex hac vitâ*, quae ellipsis non durior videatur. تقصرا autem sumo pro تقسرا *per vim*, *violenter*. Habet illud etiam poëta in Abulf. *Ann.* T. IV, pag. 600, ubi Reiske mutandum in تقسرا censuit. Sed licet utique ص τῷ س substituere in voce, cui et littera ق inest, vid. ill. S. de Sacy *Chr. Ar.* T. II. p. 564.

يا اسفى) Dolentis formula, e. c. *Koran.* XII, v. 84. Apud Mutenebbium inveni وا اسفا eodem sensu. Cf. etiam يا لهفى.

لم ينجنى) Sive ينجّنى sive ينجنى legas, perinde est, ut patet inter alia ex *Koran.* II, v. 46. 47. A verbo نجا derivandum esse, vix operae pretium videatur monere, nisi vel arabice doctos nonnunquam in ejusmodi minutiis errare deprehendissem. Habes hujus ipsius verbi exemplum notatum a me in *Comment. de Arabicorum etiam auctor. libris vulgatis crisi poscentibus emaculari* pag. 16.

وصرت رهنا بما قدمت الخ) Horum mens, nisi fallor, haec est: *jam pignoris nomine obligata Deo teneor*, *pro vitâ a me sive bene sive male institutâ; repignerabor*, *ubi approbata fuerit; sin minus*, *committar*, i. e. prout merita fuero, sive praemio sive poenâ afficiar. In eundem sensum *poëta* in Abulf. *Ann.* T. IV. p. 12: اذا ارتهنت بما قدمت من عملى. Est locutio *Koranica*: كل امرى بما كسب رهين, vel كل نفس بما كسبت رهينة, *Sur.* LII. v. 20. et LXXIV, v. 41. Alb. Schultens. ad *Jobum* pag. 964: „Omnis in eo, quod patrat, pigneratus est. Dupliciter exponi potest, vel active, ut sit: semet poenae oppignerat, vel passive, ut existat: capto velut pignore ad poenam subeundam, vel recipiendam suo tempore, obstrictus est quasi." Sed ad solam poenam respectum non credi-

derim; nec nostro loco id patiuntur, quae sequuntur proxime. Ceterum *pignoris* imago, qua dura necessitas pingitur, poëtis Arabicis perquam adamata est. Sic in Elmac. p. 48. كل حي للمنايا مرتهن *quidquid vivit, fatis oppigneratum est* i. e. (eum Schultensio loquar) dato velut pignore sub mortis nexu est; et alius *poëta* in 'Hamas. Schultens. p. 532; المرء رهن منية proprie: *homo pignus fati est* i. e. fato oppigneratus. (Similiter in nostro epitaphio صرت رهنًا positum pro قد ارتهنت). Inde jam porro Arabes dicunt غلق رهنه (vid. 'Harir. *Mekam.* XIX. in Schult. *Epist.* I. *ad* Menken. pag. 66.) *pignus ejus obstrictum cessit*, nempe pigneratori i. e. Deo, seu Israfilo Angelo mortis (vid. supra not. ad توفي) pro: fato defunctus est.

ما قدمت من عمل) *quidquid praemisi operis.* Est et ipsa signata in *Korano* phrasis. Ex sensu Korani, quidquid homo vivus hoc in mundo patrat sive boni sive mali, quasi praecurrit ipsi in mundum alterum, ibique ei repraesentabitur, a deo vel remunerandum vel puniendum. Plerumque de *bene factis* adhibetur, veluti *Kor. Sur.* II. v. 222. قدموا لانفسكم واتقوا الله, Ibn-Dor. *Maksur.* v. 170. وللفتى من ماله ما قدمت يداه قبل موته لا ما اقتنى, atque sic diserte *Koranus Sur.* II, v. 104: ما تقدموا لانفسكم من خير تجدوه عند الله Non minus tamen frequens *male facta* innuit, ut *Koran.* II, v. 89: ولن يتمنوه (يعني الموت) ابدا بما قدمت ايديهم et III, v. 178: ذوقوا عذاب الحريق ذلك بما قدمت ايديكم et *Sur.* V, v. 83. لبئس ما قدمت لهم انفسهم, nec non Ibn-Zeiduni *Risal.* ed. Reisk. pag. 8. ذلك بما قدمت يداك لتذوق وبال امرك. Atque magis diserte Lokman. *Fab.* XIX: الذنوب التي قدمت ايديهم, ac *Histor.* X. *Vesiror. ed.* Knös. p. 65: هذا جزا افعالي وما قدمت من الظلم. *In utramque etiam partem* adhibent, veluti *Kor.* LIX, v. 19: يا ايها الذين امنوا اتقوا الله ولتنظر نفس ما قدمت لغد واتقوا الله et LXXVIII, v. 41: يوم ينظر المرء ما قدمت يداه, atque sic *poëta* paullo ante laudatus ex Abulf. *Ann.* T. IV, p. 12. In nostro autem epitaphio in prio-

rem sensum accipiendum videtur propter وما خلفته باق . Quod restat, conferas velim similem usum vigentem in verbo اسلف .

محضر على) *coram me*, vel *conspectu meo, repraesentandi* s. *sistendi*, die judicii. Ex *Korano*, qui *Sur.* III, v. 38 : يوم تجد كل نفس ما عملت من خير محضرا وما عملت من سوء, coll. *Sur.* LXXXI, v. 14 : novissimo die علمت نفس ما احضرت *cognoscet quisque quid coram deo stiterit* bonorum vel malorum operum.

وما خلفته باق) *et pro eo, quod post illud* (a me praemissum) *restat*. Nimirum وما est pro وربما , quae ellipsis non est insolita, quod uno ex multis probetur exemplis: Temimi in Vat. et Rink. *Les.* p. 117: يسار منها بما حصل له من الغنائم واعده (i. e. وربما اعده) من الهدايا الى الوليد . Est autem ما قدمته $\tau\omega$ ما خلفته باق oppositum convenitque cum ما اخرته *Korani*, veluti Sur. LXXXII, v. 5 : die novissimo علمت نفس ما قدمت واخرت *sciet omnis anima, quid praemiserit et quid retro reliquerit* e. e. explicante *Maraccio*, quid boni vel mali patraverit, et quid boni distulerit vel omiserit efficere. Cf. et *Sur.* XLVIII, 2. ليغفر لك الله ما تقدم من ذنبك وما تاخر Ceterum باقي per licentiam poëticam pro باقٍ scripsi, ut nempe rhythmus constet.

T a n t u m.

Hoc autem quidquid est mearum in hoc epitaphium curarum ne quis in iniquam interpretetur partem! ne quis autumet me Tychsenii, qui ad silentium sedes abiit, silentio, quod (eheu) nunc est, male usum, ejus manibus proterve illudere voluisse hac editâ scriptiunculâ! Deus id non sinat! اعوذ بالله ان اكون من الظالمين . Nec sane is sum, qui *clavam extorqueam Herculi* vel mortuo. Neque Italinskyo, viro excellentissimo, ausim *detrahere*

haerentem capiti multâ cum laude coronam.

Unice veritatis indagandae inveniendaequae studio ductus protuli has curas meas, et prolatas cui judici magis idoneo submittam dijudi-

candas, quam ipsi nobilissimo et eruditissimo primarum curarum auctori, non habeo. Cujus et ipsius secundis curis, cujus ingenii et doctrinae face, spes me tenet futurum, ut tum duo illa vocabula, quae in N°. 1. notavi ambigua, tum quaecunque in N°. 2. praecipue autem in N°. 3. minus certa adhuc relicta sunt, illustrentur et ad eandem fidem manifestam, nullis argumentis revincendam, ad quam reliqua tantum non omnia hae meae curae perduxerunt, perducantur. Scripsi a. MDCCCXV.

ONYX CUFICUS SORANO-NEAPOLITANUS

INTERPRETE

C. M. FRAEHNIO

in Consessu Acad. Imp. Scient. d. III Mart. a. MDCCCXIX habito.

Abhinc annos complures ad Soram, oppidum Calabriae, onyx titulo insignitus Cufico a terram molientibus repertus atque Augustissimo Regi Neapolitano oblatus est. Vella, Abbas ille, qui nomini suo aeternam falsarii notam inussit, hanc etiam gemmam falso interpretando Regem suum fallere ausus, perhibuit, se ex inscriptione cognoscere, Rogerum Normanum, regni Siculi conditorem, hanc gemmam in nuptiarum suarum solemniâ sculpi jussisse. Quod Rex quum audiisset, tanto hujus onychis amore teneri coepisse dicitur, ut diu annulum gestaret in digito ejusque ectypa vitrea facta inter eos, qui ipsius gratiâ florebant, distribueret.

Celeberrimus Hager, dum Vellae fraudes alias longe graviores detegeret et falsario personam detraheret ([1]), hac quoque in gemmâ qualia Vella legi dictitaverat, inveniri primus negavit. Abstinuit quidem vir doctissimus ab ipso rectius interpretandae periculo; attamen aliis doctis gratissimum fecit eo, quod *gemmae imaginem* libro suo modo laudato pag. 26 (vel vers. Gall. p. 31) adjungi curaret. Copia enim nunc aliis quoque interpretationis hujus tituli tentandae data erat; nec frustra data. Mox alii viri docti rectiorem illi substituendi periculum fecere. Uno fere tempore, a. MDCCXCIX in hanc metam animum contendebant ven. Adler et magnus Sylve-

([1]) Vid. Io. Hagers *Nachricht von einer merkwürd. litterär. Betrügerei. Erlangen*, 1799, vel *Relation d'une insigne imposture littéraire, par Mr.* Hagen ib.

ster de Sacy; etiam *Berolinensis* nescio quis ausus est; deinde paucis interjectis annis O. G. Tychsen, nunc piorum sedem consequutus, nodum hunc expedire tentavit. Sed tantum abest, ut harum interpretationum ulla omnibus numeris absoluta dici queat, ut etiam singulae notam suspectae fidei prae se ferant. Igitur non ab re esse duxi periculum, quod et ipse feci, hujus inscriptionis enucleandae viris doctis proponere. Propono tamen (non diffiteor) paullo timidior, quamvis me rectiora, quam alii, (absit invidia verbo) vidisse confidam.

Quod in tam paucis vocibus, iisque linguâ conceptis Arabicâ notâ, et in gemmâ illaesâ atque integrâ obviis hic titulus tantum negotii facessiverit viris doctissimis, quod me quoque, qui post varia aliorum conamina aggressus sum, etiamnunc paullulum ambigentem relinquat, quod ejus explicationes inter se cum verbis tum sensu ita discrepent, ut saepe ne vestigium quidem mutuae convenientiae deprehendas et induci possis ad suspicandum, interpretes alios alium titulum ante oculos habuisse, — id non mirabitur, quisquis *ligatâ* compositum esse *oratione* et *Cufico charactere* exaratum cogitaverit.

Constat hanc scripturam Arabicam priscam esse, paullo ante Mu'hammedem ex priscâ Syrorum scripturâ Estrangelo dictâ originem traxisse, *Cuficae* nomen a *Cufâ*, 'Irakae 'Arabicae urbe celebri ad Euphratem sitâ, ubi a grammaticis et Korani lectoribus scribisque mutata aliquantum et emendata videtur, adeptam esse et per saeculorum trium decursum in libris, per octo fere et quod excurrit in monumentis publicis, numis et similibus, licet non solam et intemeratam, obtinuisse. Ea autem est in hac scripturâ litterarum multarum, quas, quippe sono diversissimas, scriptura recentior bene distinxit, figurae similitudo, ea a defectu, non dico vocalium (Arabs et Arabicae linguae probe peritus eas plerumque parum desiderat), sed punctorum diacriticorum orta ambiguitas, ut haud raro multas magnasque interpreti objiciat difficultates. Accedit, quod haec scriptura diverso tempore, diversis terris, diversis sculptoribus fere diversa esse solet.

Quod in gemmâ eâ, de quâ agitur, deprehenditur scripturae Cuficae genus, nullis quidem ornamentis, quibus temporis decursu hanc scripturam obruere coeperunt, auctum est, quid? quod antiquam ejus naturam redolet, nec adeo longe abest ab illâ, quam in antiquissimorum praesertim numorum Umaijadicorum elogiis aliisque nonnullis monumentis admiramur, simplicitate et elegantiâ. (2) Nihilosecius multis magnisque hic titulus obstructus est difficultatibus. Nimirum inscriptio non, ut vulgo solet, merum nomen possessoris, vel versiculum aliquem Koranicum, sed sententiam aliquam fortasse a poëtâ nescio quo mutuam sumtam comprehendit. Ligata oratio quum in quavis fere linguâ, ut ut scriptura, quâ exarata est, quam maxime distincta et perspicua sit, majores quam soluta, lectori objicere soleat difficultates tum a verborum structurâ, tum a vocabulis, raris illis saepe et in oratione pedestri insolitis (alias caussas ut taceam), duplo majores objiciat oportet in scripturâ adeo ambiguâ, qualem Cuficam esse novimus. Inde fit, ut qui Cufica interpretandi leges religiose observet, hunc nodum difficulter expediat, et licet probabiliorem, quam alii ante ipsum, deprehendisse sibi videatur interpretationem, eam dubitet unice veram praedicare.

Ea autem primaria lex titulorum Cuficorum interpreti tenenda est, ut quam tenacissime inhaereat ductibus antiquis eosque singulos solvat transferatque in recentiores i. e. Neschicos, a vocabulis sibi quidem notioribus exordiens. Id ut rite facere queat, non sapiat e solis tabulis, in quibus nonnulli viri docti Alphabeta Cufica repraesentârunt. Sunt ea fere ex Korani exemplis, vel etiam ex numis petita nec adeo multis nec quâ aetate, quâ patriâ satis distinctis. Imo vero ipsorum monumentorum, quotquot hujus generis oculis usurpare datum est, accurato studio, et characteris Cufici diuturno usu subactus sit oportet, ejusque indolem pro variis temporibus,

---

(2) Ea vero hujus characteris indoles est, ut hanc gemmam quae patria, quae aetas tulerit, definire difficile sit. Puto tamen eam saeculo a Fuga quinto posteriorem non esse.

terris, civitatibus variam respiciat. Est ea sane passim ita comparata, ut non possit non in oculos cadere. Exempla sunto character Siculus saec. XII aer. Christ., qualis in Pallio Imper. German. et in pluribus aliis monumentis a cel. Rosario Gregorio (3) vulgatis cernitur, et Bulgharicus in Epitaphiis saec. XIV aer. Chr. obvius, item numi Chalifarum et numi Cufici Dschudschidarum, inscriptiones saec. IV. H. quae a principibus Buidicis profectae in Tschihil-Menar leguntur et specimen Cuficum saec. nescio cujus, quod Muradgea d'Ohsson exhibuit, videndum in Tab. IV. libri *Allgem. Schilder. des Othom. Reichs.* Tom. I. (4) Adeo nonnunquam ejus indoles distincta est et ad certam aliquam civitatem restricta, ut tituli alicujus, vel omni loci notatione carentis, patriam primo obtutu cognoscas; quâ in caussâ e. c. character Cuficus Choresmicus versatur. — Licentiarum denique rationem habeat, quas sibi alias alii sculptores sumserunt in litteris vel ornandis, vel contra orthographiae normam jungendis, vel disjungendis quas junctas scribi oportebat, et quae id genus alia sunt. Sic, ut hanc rem paucis exemplis illustrem, inventi sunt, qui litteram initialem ه ductu augerent, quo ad similitudinem τοῦ ر accedat, vel litterae ا pedem ad sinistram ita inflecterent, ut fere *lam* finale referat (veluti in سالم *Amuleti Bylariensis* et التاتب *Epit. Messanii* (apud Ros. Greg. p. 143.)), vel ductui litterae alicujus in altum extenso alterum similem, quem facile pro ا habeas, adjicerent, vel litteras ا, و al. sequenti litterae conjungerent etc. Pauca quidem numero, si cum Graecis Romanisque conferas, hucusque in vulgus edita sunt monumenta

---

(3) In *Rerum Arabicarum, quae ad historiam Siculam spectant, ampla Collectione.*

(4) Hoc specimen, in quo ut animum ad singularem litterae *d* figuram advertas velim, quum forte sint qui non satis capiant, non a proposito alienum erit, id in characteres recentiores transcribere. Continet autem haec: ——— العوامّ كالهوامّ

من مات فى طلب العلم فقد مات شهيدا — محمّد سيّد الكونين والثقلين

Cufica, neque tamen vel haec pauca frustra consuluntur et in usum convertuntur. Ne igitur ea negligat interpres, cui eorum copia est. Equidem gaudeo mihi contigisse, ut monumentorum Cuficorum, tum quae ab ipsis auctoribus profecta tum quae ex archetypis arte chalcographicà expressa sunt, haud contemnendum numerum oculis usurparem.

Interpres, ubi ductus Cuficos diligenti curà in Neschicos i. e. Arabicos recentiores transtulit, eosque punctis diacriticis, vocalibus et signis orthographicis, quae convenire censet, et quibus mortuas quasi litterarum figuras animet, instruxit, videat et expendat, an translata Arabica recte habeant quoad linguam, puta, an usui et legibus Arabismi congruant aptumque fundant sensum. Vocabulo inusitato, ut زيان pro زين (ornamentum), vel compositione in Grammaticae canonem aliquem offendente, veluti الحبّى pro حبّى (amor meus), in transcriptis a se deprehensà, diffidat sibi, nec talia insolita in linguam invehere studeat. Deprehenduntur quidem nonnunquam in Cuficis etiam inscriptionibus peccata non sólum in orthographiam, sed in ipsum linguae genium commissa a sculptoris ignorantià; deprehenduntur alia, quorum culpa in ejusdem oscitantià, alia quorum culpa in spatii angustià. Disserui hoc super argumento in Libr. II. de *numorum Bulgharicor. f. antiq.* pagg. 109-117, ibi quidem solos numos spectans, quare hìc ex nonnullis aliis antiquae memoriae monumentis paucula exempla subjiciantur. Veluti in *Inscriptione Caucasicâ*, cujus apographon ill. Adelung mecum communicavit, inveni جعا pro جعلنا, سابا pro سباتا, الل pro الليل Item in *Titulo turris Diarbekrensis* apud Niebuhr. *Reisebeschr.* II. Tab. XLIX. A. طالل pro اطلال cernitur. Sed talia vitia a describente profecta esse ne quis forte suspicetur, ipsum archetypon simili in caussà versans producere expediet. Est penes me *lampas* antiqui operis in *Bylariae* ruderibus nuper inventa, cujus egregius titulus Cuficus السر habet pro السرور et لصا pro لصاحبه, quorum prius a negligentià sculptoris, alterum a loci angustià esse

suo tempore probabo. Est in *Mus. Asiat. Petrop. theca Koranica Kasimowiensis*, in quâ nunc syllabam نًا vocabuli عزنًا omisit, nunc سَنا bis posuit artificis incuria. Verum enim vero prius quam ejusmodi vitia locum habere putes, etiam atque etiam te obtestor, ut omnes alias expediundi vias circumspicias nihilque non tentatum relinquas. Notam autem sibi inuret et malo mactabitur, quicunque et palaeographiae et linguae Arabicae usu parum exercitatus Cufica aggreditur: qui perperam a se transcripta pro veris vendit ne suspicans quidem eorum pravitatem: qui distinguere nescit quid ab Arabe proficisci possit, quid non: qui denique perperam a se transscriptis sensum intrudit, quo carent. Videbimus in hujus onychis tam eruendâ scripturâ quam lectione animandâ vertendâque varie erratum esse ab iis, qui ei operam suam impenderunt.

Equidem in monumentis Cuficis tractandis id semper curae habui, *primo* ut quam arctissime premerem singulos ductus Cuficos inque tales Neschicos transferrem, quibus vere eos respondere diuturno hujus characteris usu edoctus sum; *deinde* ut quae in scripturam vulgarem transcripseram cum linguae consuetudine conveniant; *denique* ut sententia ipsa transcriptorum a genio populi, a quo profecta est, ne abhorreat. Atque, ut in *Cippo Melitensi* supra illustrato, ita in hujus gemmae titulo explicando, non solum rationes, cur virorum doctorum eorum, quos ego proxime sequutus sum, interpretationes mihi minus probentur, ad singula fere annotare eâ, quâ decet, erga tantos viros reverentiâ non neglexi, sed etiam mea singula atque omnia cum aliorum monumentorum Cuficorum tum scriptorum Arabicorum auctoritate firmanda censui. Volui enim, ut ii quoque, qui in hac palaeographiae palaestrâ minus versati sunt, magis intelligant et dijudicare ipsi queant; volui etiam harum rerum studiosis nondum satis exercitatis specimina quasi χειραγωγίας ad Cuficos titulos rite solvendos exhibere; volui denique ut iidem, quum ex hujus annuli titulo ipso pro historiâ nihil fructus capere liceat,

ex ejus certe interpretatione palaeographico-philologico-criticâ hoc illud nullius non momenti discant. Scio, alios non ita rem gessisse, sed in discendi cupidorum damnum, quin in suum ipsorum etiam. Nuda fere posuerunt a se transcripta, vel maxime insolitis nullâ exemplorum Cuficorum et auctorum Arabicorum fide firmatus; quo fit, ut alius, quem latent, quae illis ante oculos fortasse versabantur, exempla similia caussam ipsorum tuentia, aut in verba magistri jurare cogatur aut temere inducatur ad fidem interpretationis cujusdam suspectam habendam. Quis mihi v. g. fidem habiturus esset asserenti, versus prioris vocabulum secundum للعل legi posse, nisi simili figurâ litterae ل finalis ex alio monumento, ubi dubitationi locus non est relictus, allatâ probâssem? Fuisset forte etiam, qui in راى meo offendisset, nisi item et ductus Cuficos et sensum usumque vocis exemplis firmâssem.

Haec praefati الآن نشرع فى المقصود بعون الملك المعبود, et examinatis antea, quae ante nos tentatae sunt, hujus inscriptionis interpretationibus nostram subjiciamus.

§. 2.

Primo ponamus loco interpretationem eam, quae viro maximi in Palaeographiâ Cuficâ nominis, meritissimo Musei Cufici Borgiani interpreti, s. ven. Adlero, Episcopo Slesvicensi debetur. Edita legitur tum in W. Ouseley's *Oriental Collections* Vol. II, pag. 425 sq. tum in Klaproth's *Asiatisch. Magazin* Part I. p. 90 sq. aucta utrobique ipsius *gemmae imagine* a secundâ manu repetitâ; sed moneo, quanto Berolinensis elegantior et accuratior est, tanto Londinensem rudiorem et in nonnullis Hagerianae dissimiliorem esse. Solvit autem vir doctissimus titulum ita in characteres Neschicos:

يسير الحق من الغدر
كل من راى ذلا عدر

quae vertit:

„*Wahrheit und Recht kommt von Gott;*
„*Jeder, der das wahrnimmt, irrt sicher nicht,*"

i. e.

Jus et fas (s. quod verum et justum est) *progreditur a Deo;*
Id quisquis animadvertit (s. videt), *sane non errat.*

Neque cel. Ouseley de hujus interpretatione fide dubitavit (5), neque cel. Klaproth. Hic quidem pro veritate ejus non solum Adleri viri linguarum Orientalium peritissimi nomen celeberrimum, sed etiam formam externam, inprimis autem simili exitu clausum versum utrumque spondere censuit.

Verum enim vero magnopere dubito (id quod sine fraude summae existimationis Adleri, viri meritissimi, dictum esto) 1°. hanc transcriptionem Neschicam satis accurate insistere ductibus scripturae Cuficae, 2°. Arabica transcripta linguae legibus et usui ubique congruere, 3°. versionem eorum Germanicam satis recte habere, et cum vero sensu inscriptionis Cuficae consentire.

Ad transcriptionis fidem quod attinet, ipsam primam vocem بسير admitti posse, negabit, quisquis figuram aere expressam inspexerit. Quinque apices, non vero sex, in hac voce erecti cernuntur. Occurrit quidem passim in monumentis Cuficis, praesertim numis littera ـس contracta, veluti in Dschudschidarum numis vocabulum السلطان *Sultan* omnibus, qui ejus litterae *s* debentur, apicibus exaratum raro deprehenditur; nunc duobus, nunc uno, nunc nullo prorsus instructa est. (6)

---

(5) *Or. Coll.* l. c. *A letter, dated Aug.* 22, 1799, *from the learned* Adler, *whose skill in Cufick literature is universally known, confirms the Doctor* Hager's *opinion* [viz. that the Abbé Vella's explanation was together false and that the words had no relation to Roger, king of Sicily], *by thus explaning the Inscription on this Onyx* a. s. f.

(6) De hac litterae hujus contractione quia non cogitabat *Monumentorum Cufico-Siculorum* apud Rosarium Gregorio interpres, factum est, u. in *manicâ Albae Imp. Friderici* II, et in *Abaco aeneo Musei Academi-*

Idem fere in ejusdem dynastiae numis nomini urbis *Gülistan* accidit, quod a paucis si recesseris, vel كلسان vel كلسان scriptum. (7) Similiter in numo Harun-Raschidi a. 191, qui hîc in *Museo Imperiali* asservatur, nomen loci, ubi cusus est, طبرسان exaratum pro طبرستان; et in numo 'Ass-ed-dini Caicausi (apud cel. Tychsen. in *Com. Soc. Reg. rec. Vol.* III Tab. I. N°. XII) nomen ultimi Chalifae 'Abbasid, المستعصم scriptum est المتعصم, quod neutiquam cum doctissimo editore (l. c. p. 98, 101 et 102) legere licet *el-Motaqsem* (el-Mota'assem), et in Inscript. apud Rosar. Gregor. p. 184 obviâ السعد *felicitas* quia الـعد scriptum, non captum est ab interprete, qui cum alienâ litterâ conjunctum inde creavit العدن Sed ejusmodi contractio non cadit fere, nisi in vocabula et nomina translaticia atque nemini non nota, quale *Sultan* esse et qualia suo quidque aevo suisque in terris nomina *Gülistan*, *Tabristan*, *Musta'sem*, fuisse non infitiaberis. Verum in vocibus minus frequentis usus et ambiguitati facile obnoxiis eam nunquam deprehendi nec in numis nec aliis in monumentis; quâ in caussâ يسير versari patet.

Lectionem secundi vocabuli الحق tueri quidem *quodammodo* potest tum Elif in priscâ scripturâ subinde litterae sequenti conjunctum, tum flexus ille finalis litterae ق ad figuram τοῦ ن accedens in hoc ipso vocabulo الحق in numis Chalificis passim obvius (vid. e. c. *Goett.* N°. VI. *Borg.* I. N°. IV.). Ultimam tamen litteram quominus pro ق finali habeam, tam ejus figura plus justo extensa in altum, quam apices in superiore ejus parte obvii, ab hac litterâ sane alieni, me impediunt.

Quod in altero versu obvium ven. Adler كل transcripsit, ejus litteram priorem vix probaveris exemplo aliquo, quod e chara-

---

ci, item in *vase aeneo Monasterii St. Martini*, quae omnia *Panormi* servantur, *Otho* s. *Othon* الاطان s. الطان lectum sit, quod السلطان *es-Sultan* legendum erat. Deleantur itaque, quae apud laudatum auctorem de his monumentis necessitudinem, quae Arabibus Siculis cum *Othone* IV. *Imperatore* intercesserit, illustrantibus valde docte disseruntur.

(7) Unde id Interpretes alii *Casan*, alii *Gülschan*, alii aliter legerunt.

etere Cufico priscae aetatis, ad quam haec gemma referenda mihi videtur, petitum sit, estque omnino talis ejus figura, qualem hic ei attribuendam putavit auctor, a Cufica scriptura aliena. Medii quidem aevi scriptura Arabica numaria vel lapidaria admisit, sed ea non Cufica, sed de genere scripturae *Sülüs* vel *Sülüs-dschcrisi.* Sic e. c. in numo (8) Sultani Seldschukidici Caikobad filii Caichosru (a. H. 617, ut videtur) ليقباد scriptum dixeris; item in numo (9) Sultani Seldschuk. Caicaus filii Caichosru (a. 644) ليكاوس pro كيكاوس cernitur; item in numo, a rege Georgiae auctoritate Mängu-Ka'ani cuso مىلو exaratum pro منكو est; (10) in numo a Timurlengo et Ma'hmude, Chano Dschaghataïdico, cuso prius ک τον کورکان ad figuram τον ه in gemmà obviam accedit. Sic porro in *Solarii Panormitani Inscriptione trilingui* apud Rosar. Gregor. p. 176. اللليّة scriptum est العليّة legendum; id quod non adtendens Interpres الالية transcripsit et in aliis etiam hujus epigraphes vocabulis errans eam minus recte vertit. Est autem sic vertenda: *Majestatis* (l. الحضرة pro الحصة) *regiae*

---

(8) Est in *Museo* Krugiano.

(9) Exstat in *Mus.* Lebzelteriano.

(10) Hujus numi rarissimi, cujus exemplum unum in *Bibliothecâ Imper. publicâ* Petropoli, alterum in museo ill. *Rühle de Lilienstern* Berolini servatur, epigraphas, quoad legi possunt, adjicere juvat.

A. I.— بقوة خدا	*Potestate Dei* —
— باقبال پادشا	*fortunâ Imperatoris*
— جهان منکو قاا	*Mundi Mängu Ka'an.*
M. سنة خمسين (?) و ستماية	*anno* 650.
A, II. — (?) داود ملك	*Dawid Rex* (?)
بن كيوركى	*filius Giorgi*
العراملى (?)	. . . .
infra: تفليس *Tiflis.*	

De hoc Davide cf. cel. Klaprothii *Reis. in den Kaukas.* T. II, p. 185. et cel. St. Martin. Mémoir. sur l'Arménie T. I, p. 385.

(الأثيلة) *augustae* (l. المعظمية pro المعظمية) *Rogericae celsae — cujus dies perennes esse jubeat* (l. أبد pro أيد) *et signa* (s. vexilla) *stabiliat* (s. victricia reddat) *Deus — jussum emanavit, ut construatur hoc instrumentum ad observandas horas,* (الساعات) *in Siciliae Urbe* (primariâ) *quam Deus tueatur* (المحمية i. q. حماها الله), *anno* 536. Similiter l. c. pag. 182. in *Abaco aeneo Musei Acad. Panormit.* littera ك *k* ad modum ل *l* formata, in vocabulis perperam lectis الأثرن, اللان, اللالى et الأملى, quae legenda sunt: الكبيرن, الكالى, الكاملى. Similiter l. c. p. 184. in *Ollâ aeneâ*, quae *Panormi* in *Parthenop. S. Mariae Virg.* asservatur et in cujus inscriptione legendâ plus quam cogitaveris erratum est, اولى الالمالات exaratum pro الكمالات (i. e. *Ei qui omnibus praeditus est virtutibus*). Interpres legit: اولى الأثرن والاد quae sensu carent. Porro apud eundem Ros. Gregor. p. 185 in *Vase aen.* in *Monasterio St. Martini Panormi* asservato, الكل scriptum est اللل, id quod nec Interpretem fugit. Eodem modo l. c. p. 186 in *ejusd. Monasterii abaco aeneo*, qui viri alicujus *excellentis* fuit (de tali enim القز — male ibi lectum العز — usurpari solebat) اللريم scriptum cernitur, quod non اللهم, ut ibi factum est, sed الكريم legendum; item اللس quod الكبير non autem الليقى legendum erat. — Etiam in *Vase aeneo Musei principis Biscaris Catanae* l. c. pag. 187 ك ad instar litterae ل formata. Sed satis exemplorum est. Ad quae moneo, ut numi illi, ita haec quoque monumenta saeculorum H. sexti, septimi atque adeo recentioris esse, et omnia, non charactere Cufico, sed Neschico vel Siilus-Dscherisi exarata.

Quod proxime sequitur, *m* finale Cuficum est, passim eâdem figurâ in antiquis monumentis gaudens, non vero من. Hoc quo modo scribatur, ipse prior versus docet.

Nec postrema vox, transcripta غدر, admitti potest. Quem primum hic titulus Cuficus sistit ductum, is litterae غ neutiquam respondet. Est omnino ه. Inspice, si placet, e. c. وحده illud in numis Cuficis tritissimum.

Ad Arabica venio eorumque versionem. Ab ipso initio quum يسير legi nequeat; restaret يسر. Sed يسرالحق من القدر quid sibi velint, non assequaris. In quamcunque partem verteris torserisve, eum, quem versio exhibet, sensum non deprehendes. يُسْر vel يَسَر quominus efferas, vetat Arabismus hac in caussâ aoristum apocopatum non admittens. Pronuntiandum itaque foret يُسِّرُ vel يُسْرٌ (scil. stat. constr. 78 يُسْرُ); sed neutrum huc quadrat.

القدر versum: *Deus*. Minus recte. القادر i. e. destinans res omnes, hoc sensu utuntur. القدر est *fatum, necessitas fatalis* etc.

فلا غدر) Etsi non sit, quod quis in penultimâ voce ita transcriptâ offendat; nam in Cuficis لا, etiam praecedente praepositione vel conjunctione ف, passim لا exaratum deprehenditur, veluti in *Pallio* illo *inaugurandis Imperatoribus Germanicis* لا, et in fragmento *Korani Cufici* (v. S. de Sacy *Gram. Ar.*) فلا; tamen non patet, quo pacto ف hic commode admitti possit, quum verbum sequatur in praeterito positum nec قد adsit (dicunt من كتم سرّه بلغ مراده et من نقل اليك فقد نقل عنك), nec quomodo verbum temp. praeteriti praecedente negatione لا hic commode locum habeat. Aoristum hac in caussâ desideres, veluti dicunt: من يؤمن بربّه فلا يخاف بخسا ولا رهقا. Atque ipsi verbo غدر aliena vis tributa: *errare, falsum esse*. Imo vero denotat: *fallere, prodere, fraude obruere.* Nec vel passive prolatum غُدِرَ significare potest: *in errore versari.*

Tota denique sententia, inprimis autem pars ejus posterior, quam langueat, nil attinet multis exponere. Quisque, vel me non monente, id ipse non potest non sentire.

Verbulo adhuc observare juvabit, in transcriptorum Arabicorum pronuntiationem, in *Asiatisch. Magazin* l. c. litteris latinis expressam additamque, nonnullos operarum lapsus irrepsisse, ut القدر *akkader* pro *alkader*. Nam etsi lingua vulgaris nonnunquam *lam* articuli ante litteras nonnullas, quae non sunt e solarium numero, ad harum imitationem coalescere cum sequenti litterâ patitur, (ut cum dicunt قنطرة الجديدة *Kantaret-edschedide*, من الجب *min eddschubbi*): tamen tale quid in litteram ق etiam cadere nunquam observavi. Atque si ea et ipsa admitteret, cur in sententiâ nostrâ eâque poëticâ vulgarem pronunciandi modum sequeremur? Operis etiam debentur vitia من *min* pro *man* et راى *rai pro ra-a.*

§. 3.

Ill. L. Baro Sylvester de Sacy, quum librum *Hagerianum* supra laudatum in *Magasin encyclopédique*, V. année, Tome VI (a. 1799) recenseret, tantum abfuit, ut onychem hunc silentio praetereundum duceret, ut potius dignum haberet, cujus inscriptionem nodosam solvere et illustrare experiretur (vid. l. c. pag. 355 sq.). Idem in *tabulâ* diario adjectâ gemmam denuo delineari curavit; quamquam haec delineatio ab accuratâ illâ elegantiâ, quam *Hageriana* et *Klaprothiana* prae se ferunt, remota est. Juvat viri eruditissimi interpretationem suis ipsius verbis conceptam ponere; habet ea autem hunc in modum:

„Si je lis bien cette devise, elle n'appartient point à un Musulman, mais à un Chretien. Elle signifie à la lettre:

بِسْمِ ٱلْعَلِىّ مَنَ ٱلْتَجَى
قَامَ رَأَى ولا نَجَا

In nomine Ali qui refugium quaesierat,
Surrexit, vidit, et non (erat) *salus.*

ce que l'on peut traduire ainsi :

Celui qui avoit mis son refuge dans le nom d'Ali,
S'est levé et a vu qu'il n'y avoit point, pour lui, de salut.

C'est donc, à ce qu'il paroit, une sorte de satyre de la confiance que les Arabes de Sicile, partisans d'Ali, comme les Khalifes Fatimis auxquels ils obéissoient, mettoient dans le nom et les merites de cet imam. On pourroit même donner à cette devise une application historique plus précise, en supposant qu'elle a pour objet le Kaïd Ali ben Nama, surnommé Ebn-al-Hawasch, qui lorsque Roger soumit la Sicile, étoit maître d'Agrigente, et de Casriana (Castro Giovanni, anciennement Enna). Ces deux places furent les seuls qui soutinrent, pendant quelque temps, l'effort des armes de Roger. Ali ben Nama soutint même un siége dans Casriana, après avoir été battu, devant cette place, par Roger (Voy. Aboulf. *Annal. Mosl.* ed. d'Adler, T. III, pag. 277–279). On pourroit donc supposer que cette pierre fut gravée pour Roger, après qu'il eut vaincu Ali ben Nama, qui avoit inutilement compté sur la protection d'Ali dont il portoit le nom. — Au reste je soumets cette explication au jugement des savans."

Viri doctissimi acutum ingenium quis est qui hic quoque non admiretur? Neque tamen haec interpretatio Cuficis concinit. Ab ipso ill. auctore jam retractatam esse novimus; itaque nostrum esse non censemus eam recensere.

§. 4.

Quam *tertio loco* ponimus, interpretatio profecta est a viro juveni nescio quo, et in libello menstruo Berolinensi (*Neue Berlinische Monathsschrift*, 1799, Novemb. N°. 4, pagg. 386-389.) in vulgus edita a Klaprothio. Transcripsit autem ille Cufica sic in litteras Latinas:

Dasaa saliya man a'lkadri.
Dsalulon aaf la battata.

quae ad verbum ita sonare ait:

Expulit tranquillitudo animi amarum providentiae.
Obsequens jumentum moritur non prorsus.

et germanice:

Seelenruhe verscheucht die Bitterkeit des Geschicks.
Ein folgsames Lastthier stirbt nicht sogleich.

Patet ex transcriptione Latina ([11]) additâque versione, Cuficum titulum lectum esse itâ:

دَسَعَ سُلِيٌّ مِرَّ ٱلْقَدْرِ
ذَلُولٌ آفَ لَا بَتَّةَ

Haec legens olim *obstupui*, *steteruntque comae*. Adeo ea tum a characterum Cuficorum ratione tum a linguae Arabicae usu abhorrent, atque auctor tantum abest, ut hujus elogii eruendi difficultatem subolfaceret, ut etiam Cufica haec quasi contemtim haberet levique brachio expediri posse sibi persuaderet ([12]). Id probatum dare, ludus est.

([11]) Auctor Arabica litteris Latinis expressisse videtur propterea, quod Berolinum tunc temporis typis Arabicis carebat.

([12]) Ipse disertis verbis ita: *Aus der Cufischen Inschrift geht, wie mit grofser Leichtigkeit zu ersehen ist, folgendes hervor —*

Ad primum vocabulum, دسع lectum, quod attinet, litteras د et ع qui in ipsà Gemmà, h. l. deprehendere sibi persuadeat, nae is nihil non ex Cuficis elicuerit. Harum litterarum figurae Cuficae plane differunt ab iis, quas onyx tibi sistit. Nec verbum دسع sensu eo, quem auctor hìc ei attribuit, gaudet. دسع (cum masdaris دَسْع et دَسْعَة, quod posterius Castello addendum) significat quidem *pellere*, *propellere* (دفع) [13], sed usus evaluit, ut specialiter adhibeatur de *camelo*, *qui ex imo in os propellit*, *protrahit* (*eructat*) *pabulum ad ruminationem*, vel *de homine cibum vomente*. Audi Wan-kulium: الدسع والدسعة دالك نتحی وسينك سكونيلة دفع معناسنة در يقال دسعه يدسعه دسعا ودسعة من الباب الثالث ودسع دوه كويش كتورهكه دخی ديرلر يقال دسع البعير بجرّته اذا دفعها حتى اخرجها من جوفه الى فيه. Inde دسيع ab eodem explicatur اوموزده بيون بتدوكی یر seu *locus*, *ubi inter scapulas demersum collum est*, *interscapiuum*, vel rectius, ut videtur, a Scholiaste ad Ibn-Doreidi *Poëm. ed.* Scheid. v. 76: *locus*, *ubi cibus potusque descendunt per gulam* (ideoque ruminatione ascendunt).

Saliya) Versio: *tranquillitas animi* docet auctorem scripsisse *Salijjon* سلى. At littera س hìc nulla deprehenditur. *Sin* Cuficum a Neschico parum abhorret, si a crassitudine ductuum discesseris. Gemma nostra hìc, non unam litteram, sed tres conjunctas بنـ vel لل vel ال conspiciendas palaeographiae Cuficae gnaro praebet.

mana) Non dubium est, quin operarum lapsus sit, pro quo auctor scripserit *morra* مرّ. Licet quidem sic etiam pro من le-

---

(13) Ut دفع, ita دسع etiam potestate *dandi*, *donandi*, gaudet, veluti in illà *Traditione Mu'hammedicá*: الم اجعلك تربع وتدسع i. e. nonne feci ut camelos verno tempore parientes possideas et larga dona effundere possis (an vero: quartam spoliorum partem accipias) lautisque muneribus afficiaris? Inde دسيعة i. q. عطية et فلان ضخم الدسيعة i. q. عظيم الاحسان

gere, siquidem *r* et *n* finales subinde parum distinguit scriptura Cufica. Nec *amaritudo* providentiae (imo: *fati*) ab usu aliena, veluti occurrit مرارة الموت *acrimonia mortis*, apud Ibn-'Arab-Schah. T. II. p. 838; item: fortuna لم تحل الّا وتمرّرت *tam dulcis non est, quin et amaritiem prodat*, Abulf. in *Annal.* Vol. III, p. 638, et Ibn-Doreid. *Poëm.* v. 172: امرّ لى حيناً واحياناً حلا *praebuit mihi aliquando potum amarum, aliquando dulcem.* Coll. Elmac. pag. 68: ايّام صعبة مرّة *dies duri et amari* (14).

al-kadri) Hoc unicum vocabulum est, quod ab hoc auctore satis recte lectum non negamus.

dsalulon) Versus secundi vocem primam et secundae litteram primam male conjunxit; nec minus ruit in his transcribendis litteris. Primam litteram pro ذ et tertiam pro ل habere quo pacto possit, qui vel unum monumentum Cuficum legerit, equidem mente non comprehendo. Adeo harum figura aliena ab eà est, quâ in charactere Cufico induuntur.

aaf) Ejusmodi soni vocabulum quomodo ex litteris proxime sequentibus elici queat, assequi non possum. Videtur interpres voluisse آف. Sed quid? habuitne pro nihilo ductum ى an vero non animadvertit? quamquam oculos fallere neutiquam potest. Numquid illud *aaf* errori operarum debetur? Nam آف neutiquam denotat: *mori*, imo vero: *nocere, laedere.*

la battata) لابتّة. Sed interpres *he* foemininum hujus vocis in ipsâ Gemmâ desiderari ait. Igitur لابت aut لا بتت ibi deprehendere sibi visus est. Mala noxa (credo) hominem egit. Vocis هذر

---

(14) Moneo, in versibus illis ab Haruno Raschido moribundo recitatis, quos legere est in Abulfed. *Ann.* II, 94. pro مرّ العواقب legendum utique esse — مرّ.

primam litteram Cuficam quis pro ؛ habuerit? quis in sequentibus deprehenderit, quae noster? Vel tiro in palaestrâ Cuficâ adeo non ruerit. Accedit Arabismi, quae hic quoque nulla est, ratio: ذلول انى لا بتة. Fingamus ذلول in Cuficis esse, fingamus انى adesse et valere idem ac: *moritur;* ubinam illa viget dialectus Arabica, quae constructionem hanc tueatur? Dicunt Arabes: لا افعله بتّة vel البتّة *non faciam id ullâ ratione, neutiquam id faciam,* لا نجد منه شيا البتة *eorum nihil prorsus reperimus* لم يسمّ ابدا ذلك الشى نقدا البتة *nullo prorsus tempore talis res moneta appellata est* etc. Non vero dicere licet افعله لا بتة, نجد منه شيا لا بتة.

Intelligitur, tali modo in monumentis Cuficis legendis versari, idem esse atque lubidini et arbitrio fraena laxare; nec hanc explicationem continere nisi اضاليث طسم واحلامها, ideoque non lituris, sed liturà inducendam esse. Dicta haec sunto, quo moniti alii, peregrini et hospites in palaestrâ Cuficâ, temere et petulanter in hanc arenam sese dare caveant!

§. 5.

Quartum solvendae hujus inscriptionis periculum debetur viro illi, qui aetatem fere totus in studiis Cuficis versatus est, qui, quam eorum usu subactus esset, multis et egregiis speciminibus probatum dedit, qui (ne longum faciam), dum vivebat, in palaeographiae Cuficae finibus principatum tenuit, — Olaum Gerhardum Tychsenium dico. Hic vir doctissimus MDCCCII cum C. G. de Murr, quo cum amico nunc in beatorum sedibus versatur, hanc hujus tituli explicationem communicabat:

حسن الحنى [الحبى] من الغدر

حزم زيانى ولا غدر

additâ hac versione:

Praestantior est gratia mea (s. amor mei) potentiâ;
Vigilantia est ornamentum meum, non autem inertia.

Deinceps autem (anno certe MDCCCIX) paullulum mutatâ ratione ipsi legenda visa sunt:

حَسَنُ ٱلْحُلَّى مِنَ ٱلْقَدَرْ
حَزْمُ زِيَانِى وَلَا حَذَرْ

quae ab eo hunc in modum versa:

Vortreflicher ist ein Kleinod als die Macht:
Standhaftigkeit ist mein Kleinod, nicht Furchtsamkeit.

Latine ita fere sonarent:

Praestat cimelium (ornamentum) *potentiae:*
Constantia meum est cimelium (s. ornamentum), *non trepidatio* (s. timor).

In reducendis Cuficis ad Neschica artificem agnoscis diuturno usu exercitatum. Tam curiose, tam religiose ductum fere de ductu expressit, ut quovis pignore contenderis: *hic est, aut nusquam quod quaerimus.* At secus rem habere, probari potest tum ex transcriptis passim a linguae Arabicae normâ aberrantibus, tum ex languore, qui totam sententiam ex transcriptis extorsam tenet. Age jam exploremus singula.

حسن) Primae litterae transcriptio sola in hoc titulo est, quam dubito an defendere potuerit vir b. Erectum ductum pro ح initiali habuit. Ipsa gemma in alterius versus primâ litterâ ح initiale monstrat et tale ab ipso Tychsenio agnoscitur; sed hujus figura ab illâ multum differt. Par erat, eam exemplo uno alterove ex monumentis petito probare. Id facere supersedit vir optimus.

Equidem, quod eam tueatur, in monumentis aliis invenire non memini. — Cum extremâ quidem ejusdem vocis litterâ similem litterae ن figuram in voce tertiâ versûs prioris obviam comparat auctor; id quod non absonum.

Jam hanc vocem non solum minus recte transcriptam, sed etiam minus recte versam esse censeo. Vertens حَسَن *praestantior*, attribuit huic adjectivo vim comparativi احسن, quâ caret. Neutiquam enim in eâdem caussâ atque خير *bonus* (id quod optimus T. mente confudisse videtur) versatur. Hoc utique ad instar adjectivorum Hebraicorum, Syriacorum, Chaldaicorum etc., quae formâ peculiari comparativum et superlativum indicante carent, sequente من comparativi, sequente substantivo superlativi vim induit; coll. Persarum به pro بهتر et Turcarum يك pro يكرك. Sed cum حسن in eâdem caussâ non versetur et احسن sibi soli gradum vel comparativi vel superlativi vindicet, حَسَن non potest verti: *praestantior*, sed: *pulcher*, *egregius* debet.

الحلى) Etiamsi, ita ut legas, utique suadeant litterarum Cuficarum ductus, etiamsi significatione *Kleinod* i. e. κειμήλιον, quam Tychsenius τῷ حلى attribuit, substitueris veram illam, quâ pecul. *mundum muliebrem*, et in genere omne *ornamentum*, *decus*, denotat (ut cum dicunt حلى الرجال الادب *ornamentum virorum est morum et doctrinae elegantia*) frustra tamen hanc lectionem adaptare reliquis studui, nec veram esse censeo; multoque minus autem eam, quam vir b. m. in primo periculo produxit آلْغَنّى vel آلْجَبّى quaeque miror quomodô vel in secundis curis, quae tamen σοφώτεροι esse solent, adhuc ipsi arridere potuerit. Nam licet passim in scripturâ Cuficâ ـ (i. e. ـ, ـ, ـ, ـ, ـ) plus justo in altum erigatur (vid. e. c. in *Inscriptione Kiblae Templi Corduben-*

sis ([15]) حاجبة , رغبة (sic enim legend. non دخلة ut Tychsenio visum), et شرطة (sic leg., non vero cum Tychs. شرطية); tamen nullo pacto الحبي (quod vertit: *amor mei*) vel الحنى (quod vertit: *gratia mea*) legere licet. Nempe lingua Arabica (ut constat), cum plerisque aliis linguis articulo gaudentibus, in substantivo, quod pronom. possessivo auctum, articulum respuit, contra quam Graeci et Itali faciunt. Sed optimus Tychsenius, nescio qui factum sit, ut in hunc linguae Arabicae canonem notissimum saepe offenderet. Evolve e. c. ejus Catalecta Arabica, Praef. pag. VI, et p. VII it. pag. 83, pag. 84, p. 43 et p. 32, h, (coll. p. 183). Videtur sane hujus canonis capitalis prorsus immemor fuisse.

Paucis adhuc notare expediet, حُنّ non denotare *gratiam*, quo tandemcunque sensu hoc vocabulum sumserit vir beatus. Castello quidem si fidem habes, حُنّ est مصدر s. no. act. ad totam primam verbi formam pertinens, quo pacto significare possit στοργήν, *cordis tenerum affectum*, quod alias حنان et حنين; sed Wan-kulio inspecto discimus حُنّ ad solam eam, quae tertium locum apud Castellum occupat, verbi significationem referendam esse ideoque denotare: *prohibitio*, *retentio*.

القدر) Recte transcripto vocabulo significatio minus apta tributa videtur. Potentiam seu vires potius dixeris قدرة s. قوّة. Infra de eo loquar.

حزم) Hanc lectionem quum ego quoque elegerim, rationes, quae defendant atque illustrent, §. 6. invenies.

زبانى) Ductum de ductu expressum ربانى Tychsenius animavit زَبانى. Sed licet etiam animare رَبانى, vel رُبّانى vel رَبّانى,

([15]) In v. Murr *Beyträg. zur Arab. Litt.*

vel زنّانى, quid? quod aliis adhuc modis legeris. Quod ad Tychsenianum زبانى, vide, lateatne anguis in herbâ. Scilicet زَيَانُ pro زَيْن (ornamentum) ab usu abhorret, nec apud Wan-kulium inveni nec apud auctores Arabicos. Castellus quidem in *Heptagl.* sub זין habet, sed nullâ additâ auctoritate.

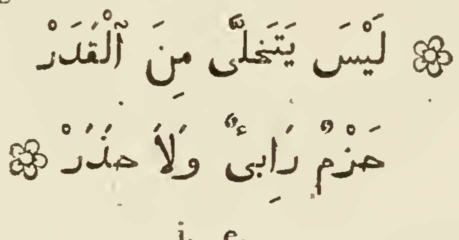
ولا) *nicht aber*. Imo potius simpliciter لا hoc sensu dicendum fuisse videtur, e. c. *Bord.* v. 143. من شدة الحَزْم لا من شدة الحزم

حذر) denique non tam est *timor*, *trepidatio*, quam *cautio*, *metus*, ut postea probabitur.

Haec sunt, quae circa hanc explicationem notanda duxi. Apparebit ex iis, etiamsi transcriptio Neschica, (ut a viro palaeographiae Cuficae peritissimo exspectari par erat) ductuum Cificorum rationi per omnia fere congruat, tamen haec transcripta rata haberi non posse. Jam vero totam sententiam, qualem ex iis elicuit, si spectes, fieri non potest, quin eam deprehendas incongruam, hiulcam, languidam et sine nervis. Id quod per singula consectari supersedeo.

§. 6.

Itaque quum in nullâ harum interpretationum, vel a peritissimis doctissimisque viris profectarum, acquiescere liceat, non videbor (spero) supersedere potuisse curâ atque operâ, quam et ipse in novo periculo ponere ausus sum. Jam habe, quae ego quidem mihi videor in Cuficis legere:



i. e.

Nicht sicher ist vor des Verhängnisses Macht
Des Sterblichen Vorsicht und späh'nder Bedacht.

seu magis κατα λε..ιν·

Non vacat metu fati divini
Prudentia speculans, nec cautio.

i. e. Nec ipsa prudentia circumspecta, nec cautio, metu fati divini exemta est.

Ad probandam hanc lectionem haec habeto.

ليس) Lectionem primae litterae simillima figura τῦ *lam* in voce القتل tuetur, quo quidem ut hoc paullo brevius sit, effecit ornamentum oblongum superne additum, quale in extremo versu altero inferne adjectum vides. Sustinet autem hoc utrumque ornamentum vices signi ❀, quod cum ab initio tum in fine versuum ponere solent.

يتغنى) Rationem, quâ duas primas litteras يت transcripsi, tuetur ابغا in numis Samanidarum passim obvium, e. c. in meis *Beiträg. z. Muhammedanischen Münzkunde* N°. 65. et in *Nov. Symbol. ex Mus. Pflug.* Tab. I. N°. 19. *Mus. Fuchs.* Tab. XV, N°. XIV. XXI al. Figuram litterae proxime sequentis غ, cujus, ubi conjuncta a dextrâ est ع, linea inferior sub praecedentes litteras porrigi solet, tum idem nomen ابغا in numis modo laudatis, tum اعلب in numo Isma'ilis Atabeki apud Barthelemium in *Mémoires de Littérature* etc. Tom. XXVI. Tab. I. N°. 7 ([16]), tum اصلحه, المحراب, اصحاب in *Inscript. Kiblae templi Kordub.* apud de Murr l. c. tuentur ([17]). In quartâ litterâ non potes non

---

([16]) In hujus numi Areâ non figuratâ legendum moneo المستضي, non المستنصر ut Deguign. in *Geneal. Chronol. Einleit.* p. 312 et Barthel. l. c. p. 564 legerunt. Etiam id moneo, ex hoc numo Parisiensi illustrandum esse eum, quem ill. de Hallenberg in fronte libri: *Quatuor Monumenta aenea*, aere expressum dedit et p. 57 sq. explicare studuit.

([17]) Ex multis aliis exemplis unum adjicere placet *sigillum Cuficum Musei Prauniani* septimum (ed. a b. de Murr in Cordonne's *Gesch. von A-*

ꞁ *l* agnoscere, simile in superiore quidem parte eidem litterae vocabulorum ليس et التذر: Ultimam litteram pro ن habui (18); licet tamen eam etiam pro caudâ litterae ل habere. Nimirum ut cauda litterae finalis ت passim ad modum ى inflectitur (vid. حق in fragmento *Korani Cufici* in Niebuhr. *Descript. Arab.* Tab. V, et الحق in numis Chalificis multis, item دمشق in numis Umaijadicis fere ut دمشقى scriptum), ita accidit, ut et لى pro ل sculptum in numis Cuficis deprehendatur. Exempla habe numos ab Emiro Samanide, Isma'ïl ben A'hmed, Schaschae (19), Balchae, Anderabae, Bijarae, Samarkandae, nec non ab ejus successore et filio A'hmede in urbe Meru cusos, in quibus nomen اسمعيل sane legeres اسمعيلى, nisi priorem lectionem unice veram esse constaret. Quod quum ita sit quumque primos duos ductus etiam pro لل *ll* habere liceat, nil obstat, quominus hoc secundum vocabulum لَلْجَلِ legas; id vero an per linguae rationem admitti possit, infra in ipsâ explicatione tituli examinabimus.

من) Vide sis hanc voculam apud Rosar. Greg. p. 146 et 151 من دعا et p. 155 versu Cuf. 9. خلت من شهر (sic leg.) it. in Nieb. *Descr. Arab.* Tab. V vers. 2 ab init., nisi quod quae in nostrâ gemmâ disjunctae cernuntur duae litterae, ibi rectius conjunctae sunt.

---

frica u. Span. T. III) male lectum a Casirio et Reiskio الله ولى الله رحوم موسى (*deus tutor, deus misericors. Moses.*), quum legi debuisset الله ولىّ اسحق بن موسى i. e. *deus tutor* (s. amicus) *est Is'haki filii Musae.* Hic nomen اسحق inspice pro caussâ nostrâ.

(18) Pro tali si habes, vocabulum Cuficum etiam lectionem لِلْجُلَّى admittit (*ad grave negotium fati, contra fatum ubi grave volvitur*)

(19) Vide Adleri *Mus. Cuf. Borgianum*, Tom. II, N°. XXXI.

التدلر) Hujus vocabuli lectio quidem mihi convenit cum Adlero et Tychsenio, sensu autem, qui ei tribuendus, ab utroque dissentio.

حزم) Litterae primae figura paullulum prona omnino jubet eam pro ه habere, coll. خلد, بالرخام al. in *Inscript. Kiblae Kordub.* Est, ubi linea superior magis depressa est, veluti in *Fragm. Kor. Cuf.* apud Niebuhrium; est etiam, ubi erecta fere stat, ut in ادخل apud Greg. Ros. l. c. p. 146 et in حسبى *Onychis* ornantis frontem libri: *Berättelse om Svenska Kongl. Mynt-Cabinettet* etc. *af* J. Hallenberg ([20]). — In litterâ secundâ ز adeo in altum productâ, ut pene ل referat, non est quod haereas. Litteras ز et ر scriptura Cufica passim sursum extendit. Cf. sis الرحيم in *Monum. Puteol.* apud Rosarium Greg. pag. 144 et الرحمة ib. p. 146. et الرحمن in *Epit. Beit-el-Fakihensi* (Nieb. *Descr. Arab.* Tab. VI.), item زمزم in *Monum. Puteol.* l. c. p. 144, et in *Epitaph. Ghalefkae* (Nieb. l. c. Tab. VIII.), item الامير et بن in nummo Panormit. apud Tychs. *Additam.* Tab. I. N°. 7, denique عمر apud Rosar. Greg. p. 158. ([21]). Nempe in litteris erectis, quales ا et ل sunt, pars elegantiae Cuficae versatur eaque eo major in epigraphe aliquà censetur, quo frequentior harum similiumque ([22]) litterarum in altum extensa figura recurrit. Vel hodie glypta, qui nasum habet, tergiversatur aggredi scalpturam, si epigraphe Arabica scalpenda eget tam ejusmodi litteris, quae aut

---

([20]) Epigraphe onychis ita legenda:

امنت بالله ربّى
الله الله حسبى

i. e. *Credo in Deum. Dominus meus est Deus. Deus mihi sufficit.*

([21]) Ita enim ibi versu 7 Cuf. legendum, non vero احمد. Nempe illa, quae in fine versus sexti cernitur, linea ad م του سلم pertinet. Illud igitur epitaphium non *A'hmedis*, sed *'Omari* est.

([22]) Ut ـ؛ , ـ؛ al. vid. e. c. ذريتة aqud Greg. p. 150.

per se gaudent figurâ erectâ aut ad eandem aptari possunt, quam talibus, quas, veluti ب et ن finales, in planum porrigere et per illas erectas, tignorum transversariorum ad instar, trajicere licet, quam posteriorem rationem aetas recentior nasci vidit. Ab illo elegantiae judicio est, quod in titulis Cuficis caudae etiam litterarum ل, ز, و, ن aliarumque similium, contra priscum scribendi morem sursum reflexae et porrectae reperiantur, scilicet quo columnarum augeatur numerus. Inspice, si placet, *Pallii Imper. German. inaug.* inscriptionem apud Gregor. Rosar. p. 172 et alia monumenta Cufica ib. ut pag. 150. 151. etc. Quid? quod artifices reperti sunt, qui huic generi elegantiae adeo indulgerent, ut insuper lineas tales in altum erectas, omnino illas superfluas, adderent; veluti in *Lampade* meâ *Bylariensi* vocis اليمن *n* finale in altum flexum est eique a dextrâ addita cernitur aequalis fere linea ا, eo nimirum consilio ut vocis finis compositus sit ad similitudinem initii. Id quod palaeographiae Cuficae studiosos admonitos volo, ne tale quid deprehendentes ad alia omnia suspicanda abripiantur. — Ad tertiam hujus vocis litteram venio. Jam supra negavi pro من haberi posse. Utique م finale est. Hanc litteram modo caudâ brevissimâ sive horizontali sive perpendiculari, modo longiore eâque nunc pendente nunc in altum erectâ instruit scriptura Cufica. Longiore quidem et pendente instructam, ut in onyche nostro, habes etiam in *Jaspide*, aere expressâ in Adleri *Mus. Cuf. Borgiano*, Tom. II, p. 32, sed minus recte lectâ (ib. p. 180), unde ejus explicationem hac datâ occasione emendatam addere non ab re erit. Lege:

يا عالم خَفِيَّتِي

اغفرلى خَطِيَّتِي

i. e. *O tu, qui perspectum tenes arcanum meum, veniam da delicto meo.* Ad priorem versum quod attinet, conf. عالم الغيب والشهادة

in *Carneolâ* aliquâ, et يا الله العظيم انت تعلم الخفيات والظاهرات in *Histor. X Vesiror.* p. 105; ad posteriorem adi Henningii *Muham. prec.* p. 398, ubi eum et ipsum legere est; ad integram autem sententiam, conf. quae in *Conchâ magicâ* quàdam leguntur: اللهمّ انك تعلم سرّى وعلانيتى فاقبل معذرتى. Ven. Adlerus pro خفيتى legit جنيى, et pro خطيتى — خطيى. Verum جنى non significat: *iniquitas*, imo جناء vel جنوة. جنى, vox rara, denotat *injuriâ affectum*, ut in illo *poëtae:* ولست بالجانى ولا الجنى *injuriam nec feci nec accepi.* Neque خطى *peccatum* est, sed خطاء et خطية

رابى) Ad quot lectiones varias pateant hi ductus, jam supra p. 538 sq. innui. Non est mihi in animo, hìc omnes, quas insuper admittant, enumerare. Prima littera ر est, coll. رمضان in Rosarii Gregor. *Coll.* pag. 157, XIX. sic enim ibi legendum loco pravi بنفضال, quod ibi non minus prave versum est, *in excellentiâ.* Secundum ductum pro duplici litterâ, quod utique licet, نا habuit Tychsenius, legens زبانى; ego pro simplici ا habere malui; Passim namque scriptura Cufica litteram ا, non connexam, infra a dextrâ auget vel lineolâ horizontali (sic fere in *Pallio* saepe memorato et in *numis Panormi* cusis, apud Tychs. in *Addit.* Tab. I. N°. 7. 8.) vel unco plus minus curvato, quem facile induci possis, ut pro litterâ ء aut ة aut ذ aut ڈ aut ء habeas. Adi sis *Inscript. in aedib. familiae de Emmanuele Drepani* apud Ros. Greg. p. 141. (23) et passim ibid. it. Fragment. *Kor. Cuf.* apud Niebuhr., *Inscript. Kiblae Kordub.* apud de Murr. aliaque Monumenta Cuf. In eo autem noli offendere, quod Elif alterum in gemmâ nostrâ obvium ejusmodi unco careat. Non adeo sibi constare solent glyptae, vel unâ in epigraphe. Vide

---

(23) Minus recte b. Tychsen. ibi legit وما ترنيع الا بالله Legendum est توفيقى et vert.: *Non secundantur res meae nisi a Deo.*

quantum in hac ipsâ litterâ variet *Epitaphium Melitense* in *Fodinis Or.* Vol. I. editum; adi etiam *Inscriptionem Pallii Imper. Germ.* et vide, quantâ in varietate ibi figura litterae و versetur. In ipsâ Gemmâ nostrâ duas varias figuras litterae ر habes. — Extrema denique hujus vocis pars, incertum, pro duabus litteris ىں, an pro unà ں habenda sit. Priorem rationem ubi sequeris, pronuntiare licet vel بى *bi* vel تى *ti* vel ثى *si* vel نى *ni*, vel يى etiam. Altius erectam figuram prioris litterae tuetur nomen جانى in multis *numis Dschani-Bek-Chani* (veluti *Mus. Acad.* Petrop. N°. 63, 94 al.). Tychsenio visum est legere نى *ni*, mihi بى *bi*, eoque pacto elicui vocabulum رابى. Quod ad alteram rationem, ei et ipsi fidem adstruere licet ex numis Cuficis. Similem litterae finalis separatae ں figuram, apice nimirum recto sursum vergente, monstrat vocabulum احدں in numis Kahir-billah a. 311, et nomen المهتدں in numo ipsius Muhtedi-billah. Quid? quod ille apex altius erectus vel litterae huic a dextrâ connexae nonnunquam manet, veluti in numis multis Isma'ilis, Emiri Samanidici, المكتفى ita scriptum, ut pro المكتفى, et in numo Leilae filii No'mani (vid. *Prolus.* meam p. 45 sq.) ليلى ita, ut pro ليلى habere possis. Hac igitur admissâ ratione, prodit lectio ران.

مدر) Ad tuendam primae litterae lectionem jam supra adduxi وحده numorum Cuficorum, ut in *numo Panormi* cuso, in Tychs. *Addit.* Tab. I, N°. 9., adde et حسبى الله in Adleri *Mus. Cuf.* II, N°. XLIV. Mediam د simillimam habes in احد et يولد *Epitaph. Panormit.* apud Ros. Greg. pag. 146. et in *Kibla Kordub.* (v. supr. ad. حزم). Litterae autem ultimae in altum retorsae figuram probat, alia ut taceam, المعمورة in *Pallio Imperat. Germ. inaug.*

Cuficis a me in Neschica transcriptis fide factâ, congruantne haec cum linguae Arabicae usu, eoque plus nanciscantur ponderis, exponere fas est.

ليس يتخلى من القدر) Verbum خلا *vacuus fuit*, ut locus ab incolis etc., transfertur ad *animum curâ, sollicitudine alioque affectu vacuum*, e. c. *Poët.* apud Elmac. 225: لم اخل قط من اشفاق *nunquam liber metu fui;* et alius apud Golium ad Erpen. *Tyroc.* pag. 158. يخلو من الهمّ *vacat sollicitudine.* Sed vel suppresso affectûs vocabulo ([24]) eàdem vi gaudet, veluti in sententiâ apud *Gol.* l. c. p. 271 obviâ; لا تخل من عدوك عاقل او جاهل فاحذر حيلة العاقل وجهل الجاهل *ne sis vacuus ab inimico tuo* (i. e. ne sis vacuus s. exemtus metu inimici tui, seu, ne male securus sis ab inimico tuo) *sive prudente illo sive stulto; sed cave, ut prudentis astutiam, ita stulti stoliditatem.* Adde Kaswin. in S. de Sacy *Chr. Arab.* p. 567 l. 5. Potissimum autem hic usus absolutus viget in Participio Passivi خَلِىّ, veluti *Diwan Huseil.* (apud Schultens. ad *Iob.* p. 843. Dscherir apud Reisk. ad Abulf. *Ann.* II, pag. 620.) نام الخلىّ *dormit curis vacuus* ([25]), et *poëta* apud Lett. ad Caab. p. 96: الخليّون نوم *curis vacui dormiebant* (sic verte. Male Lette: *Amici somnolenti erant*), quo sensu tamen nonnunquam addunt البال, ut Ibn-'Arabschah II, 434: خلىّ البال لا يخشى معاداً *homo securi animi non timet diem; quo ad deum redeundum.* Jam quum Forma quinta plerumque secundae passivum sit, secunda autem significet: *vacuum reddere*, vides eam fere cum primâ convenire, *vacuus est effectus, vacuus fuit.* Wan-kuli: التخلّى برنسنهدن فارغ اولق تقول تخلّيت اذا تفرغت Quidni igitur verteris: ليس يتخلّى من القدر حزم الخ *non est vacua a fato divino prudentia* etc. i. e. nec

---

([24]) Quemadmodum et in فرغ observare est, e. c. S. de Sacy *Chrest. Arab.* p. 365: افرغ et Ibn-'Arabsch. II, 386: البال الفارغ

([25]) Adde Kall. *Philos. Arab. popul.* p. 183: تنام عين من الهمّ خالية

prudentia exemta est metu fati. ليس autem loco τοῦ ما vel لا positum, ut passim e. c. حبّة من الجوهر ليس يتقوّم لها ثمن

Supra diximus, ductus Cuficos aliam etiam lectionem pati, nempe للْحِلّ. Circa eam haec observanda sunt. Verbum حلّ propr. *solvere*, ut nodum, *denodare*, inde 2) *καταλυειν*, *divertere aliquo*, *descendere alicubi* (propr. solvere jumentum, seu ex itinere soluto jumento descendere in diversorium); inde porro per metaphoram 3) *descendit* in aliquem ira dei, vindicta s. poena divina, calamitas, et, quod ad caussam nostram facit, *fatum divinum*. Sic *poëta* nescio quis: تُحلّ القضاء بالصيّاد *coelo ruit fatum in venatorem*, et Ibn-'Arabsch. II, 58: حلّ بهم ريب المنون *descendit in ipsos inevitabile fatum*. Conferatur verbum نزل *descendit*, 2) *diversatus est*, 3) *coelo descendit poena divina, mors, fatum*, et انقضّ القضاء *coelo praecipitavit fatum*, ad instar vulturis in praedam ex alto irruentis. Jam Masdara quidem حُلّ et حلول ad hanc potestatem metaphoricam a Castello certe et Wan-kulio non video relata esse. Apud posteriorem haec inveni: ايضا يقال حلّ بالمكان حَلًّا وحلولاً ومحلاًّ اذا نزل نزولاً Sed non video quid impediat, quominus ambobus, praeter sensum proprium, metaphoricus ille quoque tribuatur. Atque sane حلول passim hac vi gaudet, veluti *Bord.* v. 60: قد انذروا بحلول البوس والنقم *jam portentus ipsis est descensus calamitatis et vindictarum divinarum*, et *Liber Bedajet-el-hedajet* p. m. 6: ان وُفّق للتوبة قبل حلول الاجل *si secundatus a deo est ad resipiscentiam ante descensum necessitatis fatalis*. Quidni eodem sensu etiam حُلّ in nostrà sententià poëticà adhibitum censeamus, et vertamus الحلّ من القدر *de-*

scensus fati divini? من quidem Genitivo circumscribendo inservi-ente, ut passim apud poëtas Arabicos (velut Elmac. 52. 146. Abulf. Ann. I. not. 142. et 68. etc.) quâ in caussâ nunc post, nunc ante regens ponitur. Esset igitur idem atque حلّ القدر. ل autem in للحلّ positum pro عند vel مع censendum foret: *nulla est pruden-tia ad descensum fati; ingruente fato non habet locum prudentia* (coll. Hist. X Ves. 18: ليس حيلة مع سوء الحظ), vel etiam pro على *con-tra* (ut Schultens. *Monum.* p. 20. 28): *non est prudentia, nul-la est, non prodest, contra fatum ingruens, ad repellendum fatum ingruens.* Atque integra epigraphe ita sonaret germanice:

Wenn Gottes Verhängnifs herniedersteigt,
Dann späh'nder Bedacht und Vorsicht weicht.

Quâ cum sententiâ conferendae essent, quas in جامع الفنون s. *Colle-ctione rerum utilium ex omni scientiarum genere* (MS. Musei Asiat. Petrop.) deprehendi: اذا حلّ القدر بطل الحذر i. e. *quum descendit fatum, frustra est cautio* et لا حذر من قدر *contra fatum cautio nulla est;* quae sane et *sensu* et *verbis* et *rhythmo* prope ad nostram accedunt, ut fere suspiceris, eas ante oculos versatas esse auctori gemmae nostrae. Haec utut probabilitatis speciem prae se ferant, nolo tamen hanc lectionem urgere. Progrediamur ad il-lustranda, quae jam sequuntur, vocabula.

القدر) Verbo قدر, tam in primâ quam in secundâ formâ, praeter alias potestas inest *decernendi, praefiniendi, praedestinandi.* Peculiariter de *Deo* usurpatur, uti Elmac. p. 36: اذا قدر الله امرًا قدر اسبابه *Deus, quum decernit rem aliquam, ejus etiam media* (nexus) *decernit,* et Caabi *Carm.* ed. Lette v. 36: كلّما قدّر الرحمن مفعول *quidquid Misericors decernit, fiet.* Inde inter الاسماء الحسنى s. epitheta Dei invenitur القادر (v. *Koran.* ed. Mar. Tom. II, p. 414. Tychs. *Catal. Arab.* pag. 23. coll. nom. عبد القادر) quod,

etsi plerique ex aliâ hujus verbi vi vertant: *praevalens*, *potens*, equidem mallem vertere: *praedestinans*, *sapienter ex aeterno decreto res omnes disponens*. In verbi Passivo quoque illa notio peculiaris obtinet, veluti *Poëta* dixit apud Temimium in Vat. et Rinck. *Ar. Les.* pag. 120: قدر البين بيننا فافترقنا *separatio inter nos decreta* (a Deo s. a fato) *est*, igitur *alter ab altero discessimus*, et *Poëta* alius apud Abulf. in *Annal.* T. III, pag. 644: لا يقدر لى الّا مرافقة الملاح *mihi non decernitur* (a Deo, seu a fato) *nisi cum nautis societatem gerere*, mihi fatum est cum solis nautis societatem gerere. Ellipsin *Dei* in Passivo non est quod mireris. Est enim ea linguae Arabicae indoles, ut in verbo passivo id, quod in activo ejus subjectum constituebat, raro aut nunquam praepositionis ope exprimant. Aut omittere solent, ut cum dicunt مدينة فلانة المحروسة pro المحروسة بالله, aut activum potius adhibendo evitant: ut مدينة فلانة حرسها الله. A verbi hujus formâ primâ descendunt masdara قَدْر et قَدَر (26), a secundâ تقدير: τo *decernere*, *determinatio*, *praefinitio*, mox, siquidem masdaris etiam vis passiva inest, *id quod decernitur*, *quod decretum est*, *decretum*, et sive addito الله (قدر الله, تقدير الله) sive praefixo articulo (القدر, التقدير) *decretum dei*, *decretum divinum*, dei voluntas, quâ bonum malumve ab aeterno determinatum, quod mortalis nullâ cautione evitare, nullâ ratione neque retardare neque accelerare potest, inevitabile fatum (27). Quamquam hîc distinxerunt Mu'hammedanorum theologi inter القضاء et القدر ita quidem, ut prius sit decretum divinum universale aeternum circa rerum creatarum ab aeterno ad aeternum ordine sibi succe-

(26) Cum plur. اقدار qui in Lexicis desideratur.

(27) Juvabit annotare hac eâdem vi المقدار etiam gaudere, id quod a lexicographis non observatum esse video. Adi Ibn-Doreidi *Poëm.* v. 62 et 214 ed Scheid. ubi ejus singularem, et ibid. v. 36. Schult. *Monum.* 2. 57. 62. Abd-ul-latifi *Mem. Aeg.* p. 54. 152, ubi ejus pluralem مقادير habes; quamquam hunc quidem numerum etiam a مقدور derivare liceat.

dentium statum, posterius autem dispositio hujus status rerum singularum, quâ suis quaeque temporibus modisque et caussis in medium producuntur; quo pacto القضاء est decretum quatenus ab aeterno apud deum est et ab eo proficiscitur, providentia dei aeterna, القدر autem hoc ipsum decretum divinum quatenus suo tempore modoque ad effectum adducitur, providentia actualis (28). Inde haec duo vocabula ubi juncta, ut passim fit, occurrunt, القضاء primum locum occupat, veluti Beha-ed-dini *Vita Saladini* pag. 15: لا ابدت الاقضية والاقدار ما فى مكنونها, Ibn-'Arabschah *Vit. Timuri* I. p. 62: نزل مستسلما للقضاء والقدر. Attamen quia significatu inter se parum differant, haud raro promiscue usurpantur, veluti sententia, quae apud Kallium in *Philosoph. Arab. populari* p. 20 sonat: اذا وقع القدر عمى البصر, apud Herbelot. III, pag. 477 (ed. germ.) habet: اذا جا القضاء عمى البصر, eâdemque in caussâ etiam verba قضى et قدر versantur, coll. *Kor.* 8, v. 43: اذا يقضى الله امرا كان مفعولا cum Caab. v. 36: كلما قدر الرحمن مفعول.

حزم) Ad hujus vocis vim rite explanandam non sufficiunt neque Wan-kuli, qui habet: حزم بر كمسنه كندى احوالن ضبط وتدارك اتمكه ديرلر seu حزم *est quum quis res suas bene administrat iisque rite providet*, neque Meidani (apud Reisk. ad Abulf. *Ann.* II, not. 256): الحزم حفظ ما كلفت وترك ما كفيت i. e. حزم *est, commissorum satagere, et missum facere id, in quo alii sufficiunt ita ut te non sit opus.* Imo denotat *providum et consiliorum cautum animum; prudentiam circumspectam.* Usus hanc notionem tuetur. Habe exempla. *'Hamas.* p. 424: ظاعن بالحزم حتى اذا حل حل الحزم حيث يحل verte cum Reiskio: *quem proficiscentem prudentia et circumspectio tam nunquam deserit, ut ea ibi sua figat tentoria, ubi ille sua figit.* *Poët.* in Abulf. *Ann.* IV, 598: جاءنا بعزم وحزم venit

(28) Vid. Pocock. ad *Specim. hist. Arab.* p. 207 seqq. Hottingeri *Histor. Orient.* (ed. 2.) p. 572 sq. Herbel. *Bibl. Orient.* art. *Cadha.*

ad nos cum virili et constante, sed circumspectâ prudentiâ. Golius ad Erpen. *Tyr.* pag. 265: ظنّ السوْ بالناس من الحزم *cautae prudentiae est, inique opinari de hominibus.* Adde et Ibn-Doreid. v. 165. Schult. *Monum.* pag. 10. Ibn-'Arabschah II, 8: ذوو الراى السديد والحزم Inde passim abud Ibn-Sinam — فمن الحزم vel — وذلك هو الحزم *cautae prudentiae autem est, sic medicum cautum et circumspectum agere fas est;* et طبيب حازم apud. Elmacin. pag. 123 non est *medicus insignis*, sed *med. caute et considerate in curandis morbis agens.*

رابئ) Radicis rarioris ربأ integrum articulum ex Wan-kulio proferre placet, quo conferri posset Turca Interpres (et in aliis quidem Epitomator etiam) cum Arabe Dscheuhario apud Scheidium p. 92 sq. المَرْبَأة كوزه‌دجك ير مرقبه معناسنه المَربأ بمعناه المُرْتبأ كذلك ومنه قيل لمكان البازى (البازى .l) الذى يقف عليه مربأ الرَبْأ كوزتمك يقال ربأت القوم اى رقبتهم الارتباء بمعناه يقال ارتبأتهم ونظر ايتمك معناسنه‌ده كلور يقال ربأ لنا فلان وارتبأ اذا اعتان والربأ والارتبأ يوقرو چقمق معناسنه ده‌كلور يقال ربأت المرباة وارتبأتها اذا علوتها واعتبار معناسنه‌ده كلور يقال ما ربأت رباء فلان اى ما علمت به ولم اكترث (اكترث .l) له اى لم ابال به الربئ على وزن فعيل والربيئة قراول كه عسكرده دشمن جانبنه قورلر جمعى الربايا كلور وقولهم انى لاربأ بك عن هذا الامر اى ارفعك عنه المراباة على وزن المفاعلة صقنمق حذر ايتمك معناسنه تقول رابأت الشى مراباة اذا حذرته واتقيته

Itaque quod in lectione meâ cernitur participium رَابِئٌ (pro quo et رَابٍ dicunt) valet: *speculans, explorans, excubitorem agens.* Tali epitheto quidni in genere dicendi sublimi vel poëtico apte et commode ornetur prudentia cautiove, oculos quasi ipsa circumferens, ne quid mali ex improviso obruat? Atque sane in simili caussâ

usurpatum idem habes a poëtâ in Schultensii *'Hamasâ* pag. 400, qui de heroë forti simul et circumspecto : يجعل عينيه رابئة قلبه الى سلّة من حدّ اخلق „*constituit oculos suos speculatores sui cordis adversus evaginationem mucronis glabrum nitentis.*"

Sin vero ductum illum Cuficum finalem non pro ى, sed pro ن habere placet, quod sane admitti posse supra probavimus, tunc lege حَزْمُ رَأْىٍ *cautio consilii*, *providus et cautus in consiliis capiendis animus*, ut exstat apud Elmacin. pag. 67 حازم فى رأيه

ولا) *neque.* Sic tandem, ubi praecesserit وليس, optime locum suum occupat hoc و τῷ لا antepositum. Sic dicunt: ليس يصلح لك ولا يليق بك et simil.

حذر) Wan-kuli: الحذر حانك كسرى وذالك سكونيله والحذر فتحتينله صقنمق تحذر (? تحرّز l.) معناسنه يقال حذرت الشىء احذره حذرا من الباب الرابع حذرٌ i. e. والحذر حانك فتحى وذالك كسريلة احتراز ايديجى كمسنه متنبه معناسنه

et حَذْرٌ *significant: sibi cavere. Dicunt:* حَذِرْتُ الشىءَ, *in Aor.* أَحْذَرُهُ *in masd.* حَذَرًا, *pro: cavi aliquam rem.* حَذِرٌ *denotat hominem qui sibi cavet, cautum et vigilem.* — Estque omnino in hac radice vis *sibi cavendi, metuendi cum cautione, metûs conjuncti cum studio evitandi, quod metuitur.* Exempla omnem paginam occupant, حَذَرٌ (quod passim in exclamatione repetitur, veluti أَلْحَذَرَ آلْحَذَرَ *cautionem! cautionem!* pro: *cave, o cave!*) opponitur τῷ أَمْنٌ *securitati, quum quis omni periculorum metu exsolutus est*, denotatque : *sollicitudo, metus periculorum, animus periculorum metu turbatus*, ut in illo *poetae* in Abulf. *Annal.* II, pag. 410 :

كل امن الى حذر *omnis securitas tandem evadit in sollicitudinem*, et in hoc alius poëtae apud Jones. in *poës. Asiat. Comment.* p. 278 (ed. Lips.) العيش سطران اذا امن وذا حذر *vita duobus constat ordinibus, securitate et sollicitudine.*

Tantum ad probandam Arabicorum a me datorum fidem. Quod superest حَذَرْ scripsi pro حَذَرٌ, et القَدَرْ pro القَدَرُ, ut distichon sit ὁμοιοτέλευτον, qualis apocope a prosodià Arabicà admittitur.

Quod denique attinet ad ipsam sententiam, quam lectio mea suppeditat, eam apto commodoque esse sensu, et opinioni praeceptoque sacro populi ejus, unde ipsa inscriptio profecta est, plane congruere,

non hoc, quae centum continet urbes,
Quamvis sit mendax, Creta negare potest.

Quem enim fugit illa, quae doctrinae Mu'hammedicae sectatores tenet, de *decreto absoluto* (*de praedestinatione, fato inevitabili*) communis opinio ex ipsorum hausta sacro codice? (ut S. 17, v. 14. 3, v. 139.) Doctores Mu'hammedici licet dogmatis hujus sensum prudenter circumscripserint et temperàrint, ad solum animi hominum statum adque vitam futuram restringendo et liberum homini in hac vità rebusque suis attribuendo arbitrium; nihilosecius omnes fere Mu'hammedani quam opinioni de fato inevitabili indulgeant constat. Putant non solum hominum alios, deo probatos (qualem سعيد vel مقبل dicunt), aeternae felicitati, alios, a Deo repudiatos (qualis شقى vel مدبر vocatur) aeternae infelicitati ab aeterno et immutabili decreto divino destinatos esse, sed etiam nihil sive boni sive mali in hac vità accidere, quin ab aeterno jam sit decretum, nec ullà prudentià humanà vel accelerari vel evitari posse;

mori debuisse, qui in bello ceciderint, etiamsi domi resedissent; horam fatalem unius cujusque fronti occultis litteris a manu divinâ esse inscriptam, etc. Atque hac quippe opinione imbuti, constat, quam torpere soleant ad calamitates, quae forte ingruunt, quam fere negligant capere consilia et remediis uti, quibus avertant vel imminuant pestis, incendiorum aliarumque calamitatum frequentes atque funestas clades, quam passim coeco impetu se offerentes in ipsum capitis discrimen, in praesentissima belli pericula, summae fortitudinis exempla exstiterint. Inde fit, ut semper illis in ore sint sententiae huic opinioni faventes, utque Arabum, Persarum, Turcarum libri et prosaïci et poëtici pleni sint sententiis hoc idem dogma aliis alio modo repetentibus. En tibi ex ingenti numero paucas.

الاقدار لا تغلب *non vincuntur fata.* Cui geminum illud *Persarum:* با قضا كارزار نتوان كرد *cum fato pugnari haud licet.* — ما للعبد من الذى يقضى به الله امتناع *homo ab eo, quod in ipsum decrevit Deus, defendere sese nequit.* اذا جاء القضا عمى البصر *fato irruente visus* s. *intelligentia coecutit.* اذا حلّت المقادير بطلت التدابير *fata quando descendunt,* (hominum) *consilia frustra sunt.* اذا نزل (29) القدر بطل الحذر *fato descendente prudentia frustra est.* Quibuscum confer *Persarum* hoc: چون قضاى الهى نزول يابد ديدهٔ بصيرت را نه روشنى ماند ونه تدبير وخرد نفع رساند *Decreto divino descendente, neque oculo attentionis sua manet acies, neque consilium vel judicium aliquid prodest;* et *Turcarum:* قضاء كلدكده ديدهٔ دانش كور اولور *Fato ingruente oculus intellectus occoecatur,* et تقدير تدبيرى بوزر *decretum* (divinum, fatum) *consilia* (humana) *destruit;* quae duo posteriora et *Tataris* frequentata: قضاء كلسه كورور كوز كورمز اولور *Fato irruente vel apertus oculus coecatur,* et خدانك تقديرى تدبير برله بوزلمز *Dei decretum consilio* (hominum) *non rescinditur.* — اذا وقعت سهام القضاء نثرت حلق النثرة القضاء *quum decidunt sagittae decreti divini* s. fati, *annuli loricae com-*

(29) Seu حلّ

pactissimae defluunt. Similiter *Turcae:* چون تیر قضا کمان قدردن اتلور سپر حذرایله دفع اولنمز *quum sagitta fati ex arcu decreti divini emittitur, scuto cautionis repelli non potest.* — الموت انما هو قضاء مكتوب على الجبين فان كان قد كتب على الجبين شيء فلا بدّ ان يصل ولا ينجى منه جهداً ولا احترازاً ولا حذراً *mors est decretum divinum inscriptum fronti hominis; inde si quid fronti inscriptum est, accidat oportet nec evitari potest ullo studio et cautione et prudentiâ.* Similiter *Turcae:* باشده یازلش اولان کلمکی واجب در *capiti* (hominis) *quidquid inscriptum est, accidat necessum est.*

Sisto calamum; jam enim *sat prata biberunt.* Vel ex adductis exemplis satis superque intelligitur, quam adamata et trita Mu'hammedanis et quam alio ab aliis modo variata sit sententia ea, quam e gemmae nostrae ductibus Cuficis eruderavi. Quin vidistis inter citatas, quae, non sensu tantum, sed oratione etiam quodammodo ad nostram accedunt. Haec ipsa si forte aliquando in libro aliquo deprehenderetur, appareret, quatenus scopum ferierim.

Juvat in extremâ hac commentatione varias, quas haec gemma nacta est, interpretationes Italico quidem idiomate expressas (ad Italiam enim potissimum attinet) *junctim contuendas* proponere:

I. G. C. Adleri:

Tutto ciò che è vero e giusto viene da Dio;
Chiunque vede questo, certamente non erra.

Berolinensis cujusdam:

La tranquillità dell' animo scaccia le acerbità del Fato.
Il flexibile giumento non così presto muore.

O. G. Tychsenii:

La mia grazia à più di merito chè la potenza;
La vigilanza è l'ornamento mio, ma non l'inerzia.

Ejusdem:

L'ornamento è qualche cosa più preziosa che la potenza;
La costanza è il mio ornamento, e non il timore.

C. M. Fraehnii:

Prudenza avveduta e cauzione invano
Dal timor del Fato corron lontano.

Ejusdem:

Quando il Fato divin dal Ciel discende,
La più cauta prudenza a nulla intende.

Scr. anno MDCCCXVI.

EPILOGUS.

Marmorum aliorumque monumentorum Cuficorum, quae in vulgus edita exstant, *bona pars* dici non potest quam temerarias vanasque nacta sit interpretationes, sive alia, quam translaticia lippisque et tonsoribus nota continebant sive charactere minus perspicuo erant exarata. Eorum interpretes aut idoneâ destituebantur linguae Arabicae peritiâ, aut in palaestrâ Arabico-palaeographicâ non satis subacti erant, aut inscriptionum exemplis minus accuratâ curâ expressis utebantur; subinde accidedat, ut haec tria simul in unum convenirent. Adde, quod plerique nonnunquam pravo et praepostero indulsisse videntur pudori, quo moti ne auctoritas sua imminuatur verebantur, si hanc illamve inscriptionem, ipsis ut solverent propositam, vel totam vel ex parte capere se posse ingenue

negàssent. Ex hisce fontibus pravae monumentorum Cuficorum profluxerunt interpretationes haud paucae, quibus ut fidem haberent, mox alii viri docti, utpote Arabicae vel linguae vel palaeographiae certe expertes, facile inducebantur; quin eo progressi inveniuntur, ut illis interpretationibus conjecturas historicas superstruerent, sed subsessuras illas cum solo, cui impositae.

Tempus monere mihi visum est, ut non solum temeritas illa atque levitas, quà monumenta Cufica *aliquam multa* tractata video, retegatur eoque alii in fide eorum explicationibus adhibendà cautiores reddantur, sed etiam rectior aenigmata Cufica solvendi via monstretur. Id geminum consilium existimavi a me effectum dari posse, si unam alteramve inscriptionem, lectu illam quidem difficiliorem, sed illaesam et integram, sed fideli delineatione expressam, atque talem, quam alii ante me explicare parum prospero successu conati sint, mihi sumerem accurate commentandam ita, ut tum priorum interpretum examinarem pericula, tum meum qualecunque pro virili probarem. Atque tales deprehendi talique modo tractavi, quas tenetis, Inscriptiones Melitensem et Soranam.

Utramque hanc commentationem abhinc quatuor vel quinque annos a paucis si discesseris talem, qualem nunc edidi, scribebam in abdito recessu Kasanensi versans et idoneo apparatu nudus. Nunc ubi prelo subjiciendas percurrebam, potuissem mehercle multa eaque non nullius momenti ad positorum a me fidem corroborandam addere. Id enim illustrissimi Ouwarowii, Praesidis hujus Academiae, singularis in litteras Asiaticas amor et gravis quà pollet auctoritas effecit, ut harum litterarum cultori jam in hac Septentrionis metropoli, quemadmodum numorum aliarumque antiquae memoriae Asiaticae rerum, sic librorum Orientalium et typis excusorum et manuscriptorum apparatus adsit sane quam invidendus. Verum utut eo utendi etiam pro eà, quae nunc cum maxime agebatur, caussà lubido animum incesseret, ab eo in praesenti abstinendum arbitratus sum.

Scilicet in immensum excrevissent hae scriptiunculae, quarum quidem in copiolà acquiescere animus posse videtur. Uno tamen opere, quod et ipsum Viri laudatissimi sapienti consilio Museum Asiaticum acceptum refert, non uti nefas duxi; dico ven. Rosarii Gregorio *Rerum Arabicarum, quae ad Historiam Siculam spectant, amplam Collectionem*, quippe quae *monumentorum Cufico-Siculorum* numerum haud exiguum sistit. Nec frustra haec quidem monumenta consului. Ea enim perlustrans non modo inveniebam quae ad lectiones meas firmandas adjicerem testimonia, verum etiam mirabundus deprehendi hanc speciosam monumentorum Cuficorum Collectionem indignum in modum ab interprete تغمده الله برحمته habitam esse, ita quidem, ut *exceptis sex vel septem omnium reliquarum interpretationum nulla deprehendatur labe vacua, quid? quod complures, eaeque fere inscriptionum historicarum, a capite ad calcem inducendae* sunt; adeo earum auctor a veritate aberravit, aut explicare sustinuit, quae utpote vel temporum injuriam nimiam passa, vel minus fideli arte delineata, explicari nequeunt. Mirabundus etiam deprehendi ex illis monumentis adscripta et afficta esse *Siciliae*, quae *Aegypto* patriâ usa sunt, veluti N. XXXIX et XL, et pravis interpretationibus inductum editorem doctissimum super rebus prorsus alienis fuse disseruisse; veluti cum de *Othonis* IV Imperatoris cum Saracenis Siculis conjunctione ad Monumentum XXXV disputat, in quod, ut in alia nonnulla, prava interpretatio *Othonem* male ingessit (*). Hoc illius Collectionis splendidissimae ulcus num ante me alii jam animadverterint et animadversum prodiderint, ut nescio, ita vix credo; nam censores doctos, etsi, circa alias operis memorati sectiones varie peccatum esse, in ephemeridibus litterariis notaverint, de hac sectione sententiam pressisse video. Itaque haud cunctatus sum id nunc tandem in antecessum patefacere, non quidem singula atque omnia illa monumenta Siculo-Cufica de industriâ recensendo et no-

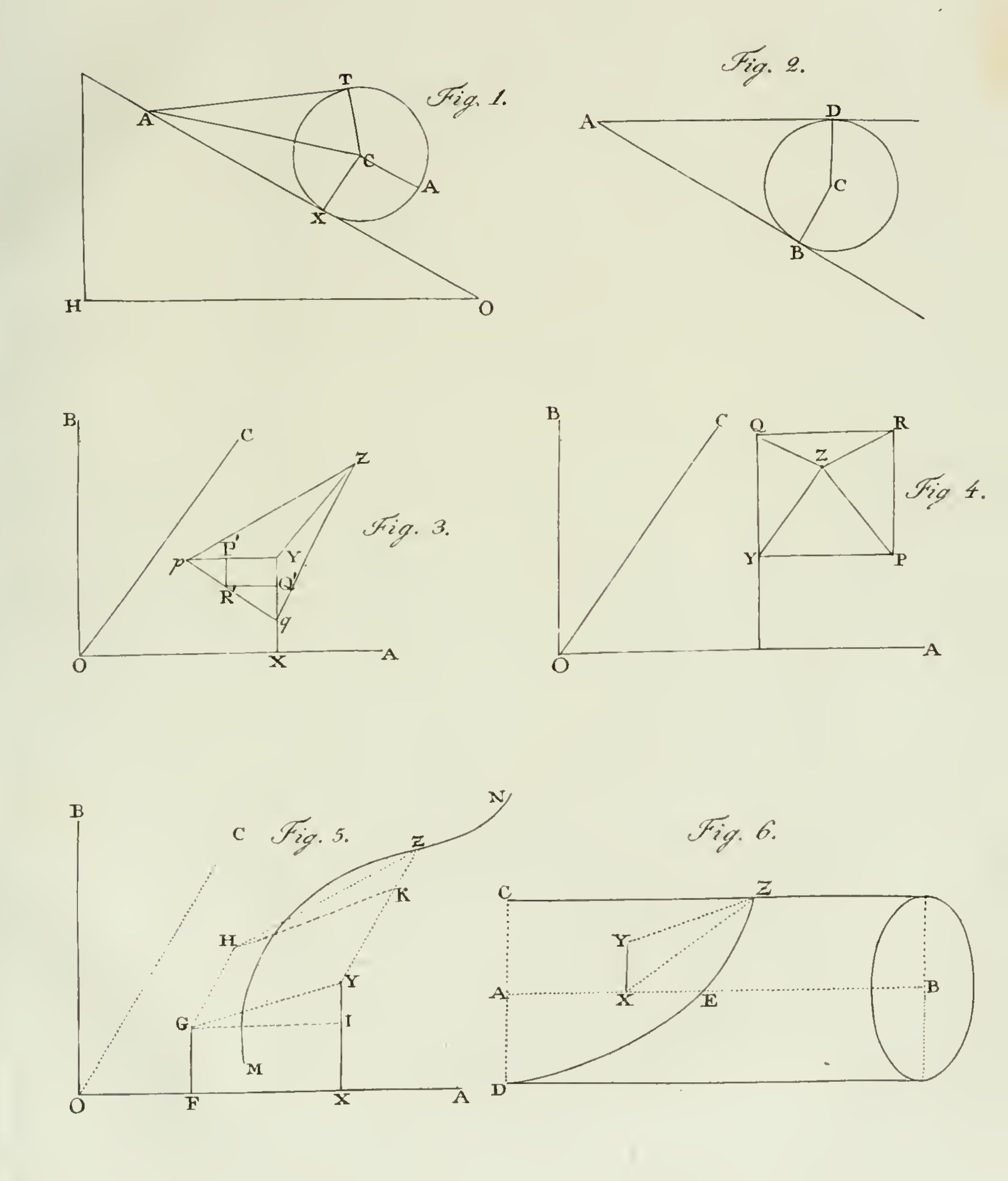
(*) Vide Comm. de Onyche Sorano not. 6.

tando, (id inpraesentiarum fieri vetabat locus) sed non nisi quae datâ occasione offerebantur vitia corrigendo (*); unde jam sat exemplorum natum est, ut ex ungue leonem *hunc* cognoscas.

Est mihi animus hanc meam operam in Monumentis Cuficis illustrandis inchoatam continuare, et posthac *non solum* quidquid eorum tam a Rosario Gregorio quam ab aliis viris doctis editorum minus recte lectum est, singulari commentatione junctim notare et, si pote, emendare, *verum etiam* complura id genus monumenta *inedita*, in Russiâ vel reperta vel nunc quidem asservata, meâ interpretatione aucta in vulgus dare. Ex posteriore genere nominatim hîc commemorare placet *Thecam Koranicam Chani alicujus Kasimowiensis*, *Poculum cum inscriptione geminâ, unâ Arabicâ, Belgicâ alterâ*, *Epitaphia Bulgharica*, *Cippum Cuficum in sede Archiepiscopi Kasanensis et Simb.*, *Lampadem Bylarensem*, *Ocream ferream Aegyptiacam*, *Talismanum Kasanensem*, *Concham magicam*, et all. Neque tamen eâ, quâ in his duobus primis monumentis commentandis utendum censui, prolixitate posthac utar. Pensum ut peragere queam, commodâ defungar brevitate. Scr. Petropoli m. Febr. a. MDCCCXX.

Nota. Id unum moneo, in Comment. de Epit. Melitensi litteras ر *d* et ز *ds* passim pro ر et ز adhibitas esse; cui vitio in alterâ de Onyche, cujus specimina prima ad memet mitti curavi, occursum est, ejectis nunc quidem duabus illis formis, quas, etsi huic typorum minusculorum generi, ad similitudinem scripturae Ta'lik accedenti, magis conveniant, a typothetâ hoc parum distingui a ر et ز videbam, et in earum locum substitutis, quas ex formis minusculis Schnoorianis jam antea additas deprehendebam.

(*) Vid. pagg. 493, not. 18. 495. 503. 525, not. 6. 526. 527. 528. 541. 542, not. 21. 544 et not. 23.


Fig. 1.
T
A
C
A
X
H
O
Fig. 2.
A
D
C
B
Fig. 3.
B
C
Z
p
P'
Y
R'
Q'
q
O
X
A
Fig. 4.
B
C
Q
R
Z
Y
P
O
A
Fig. 5.
N
B
C
Z
K
H
Y
G
I
M
O
F
X
A
Fig. 6.
C
Z
Y
A
X
E
B
D

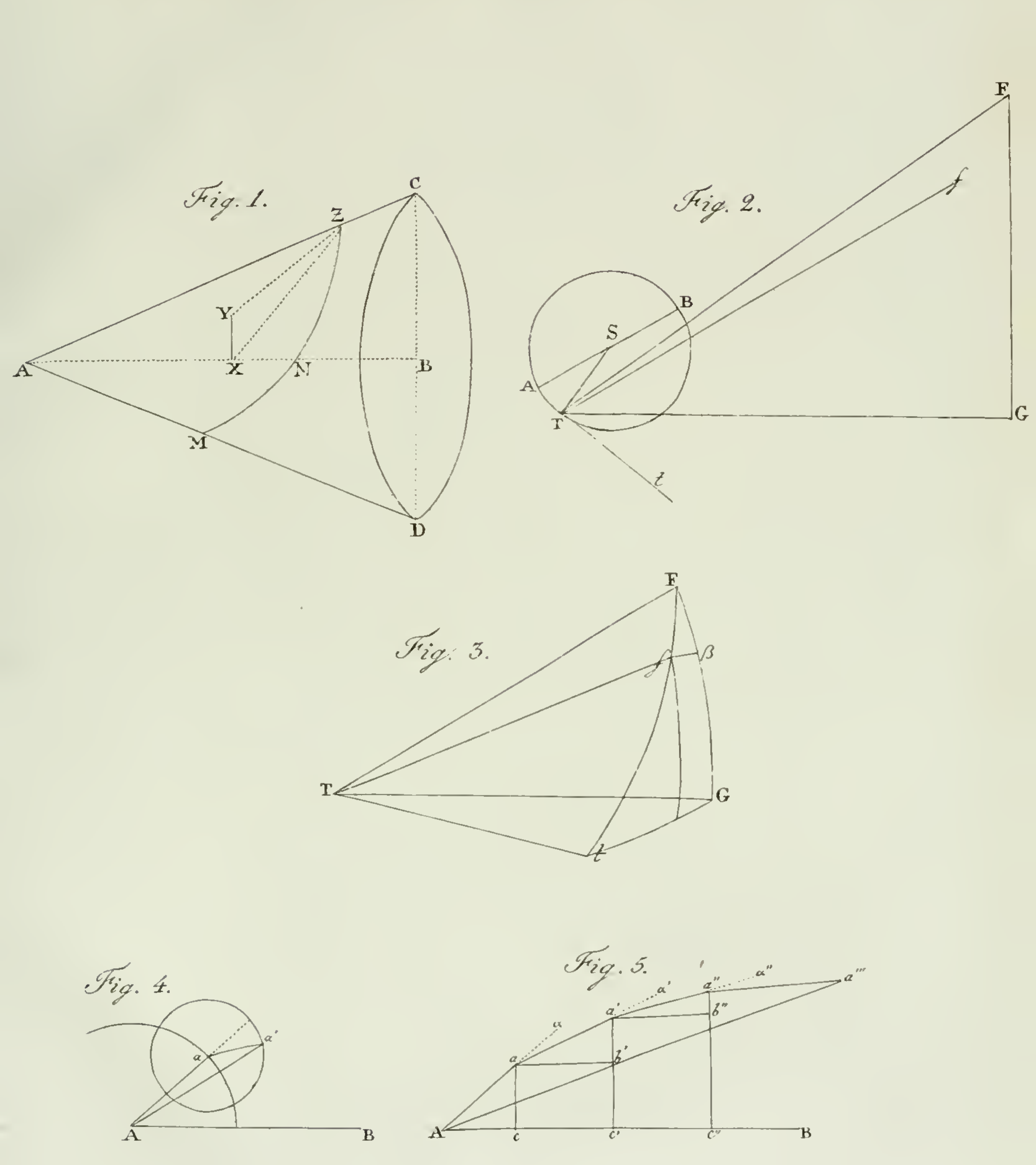
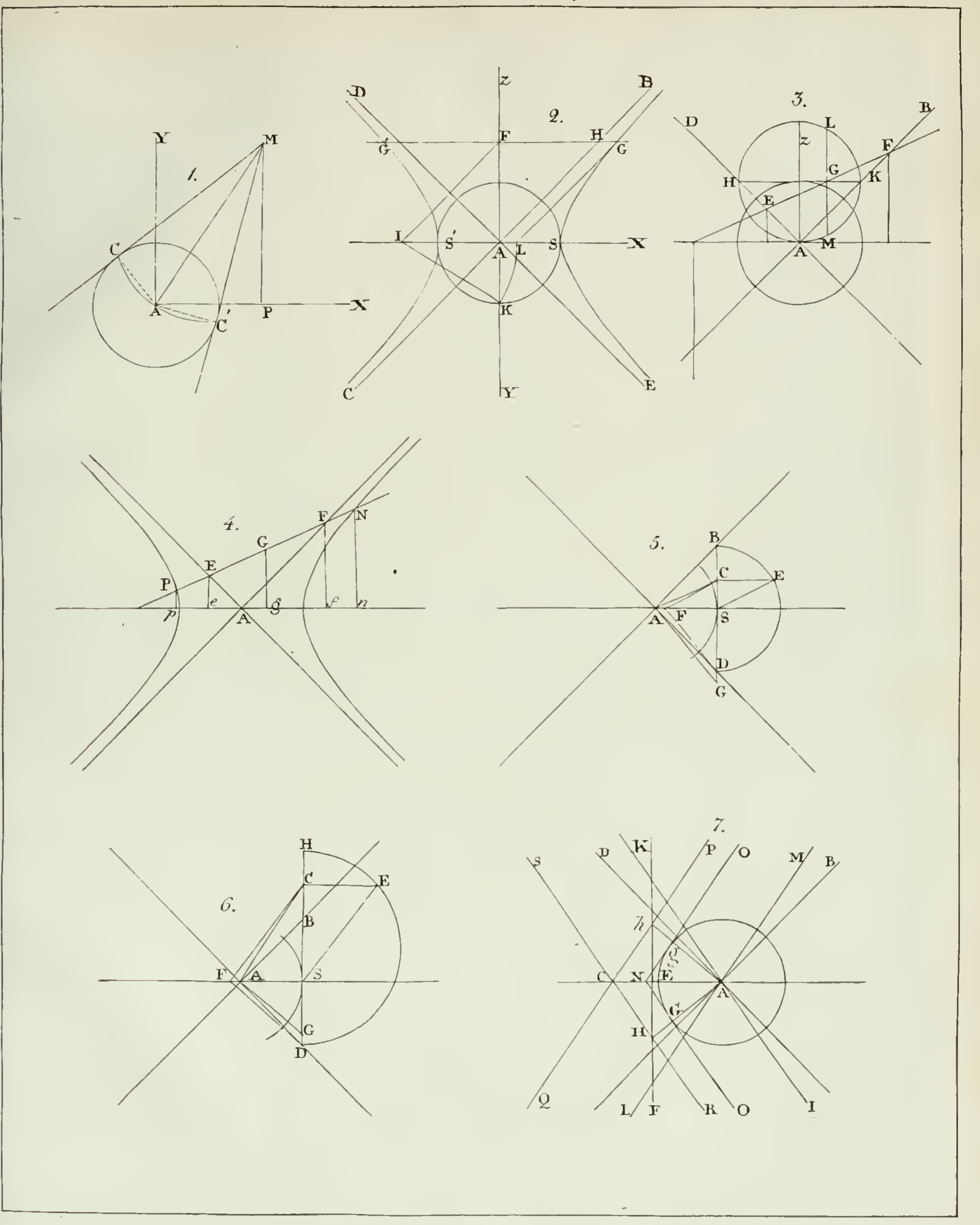
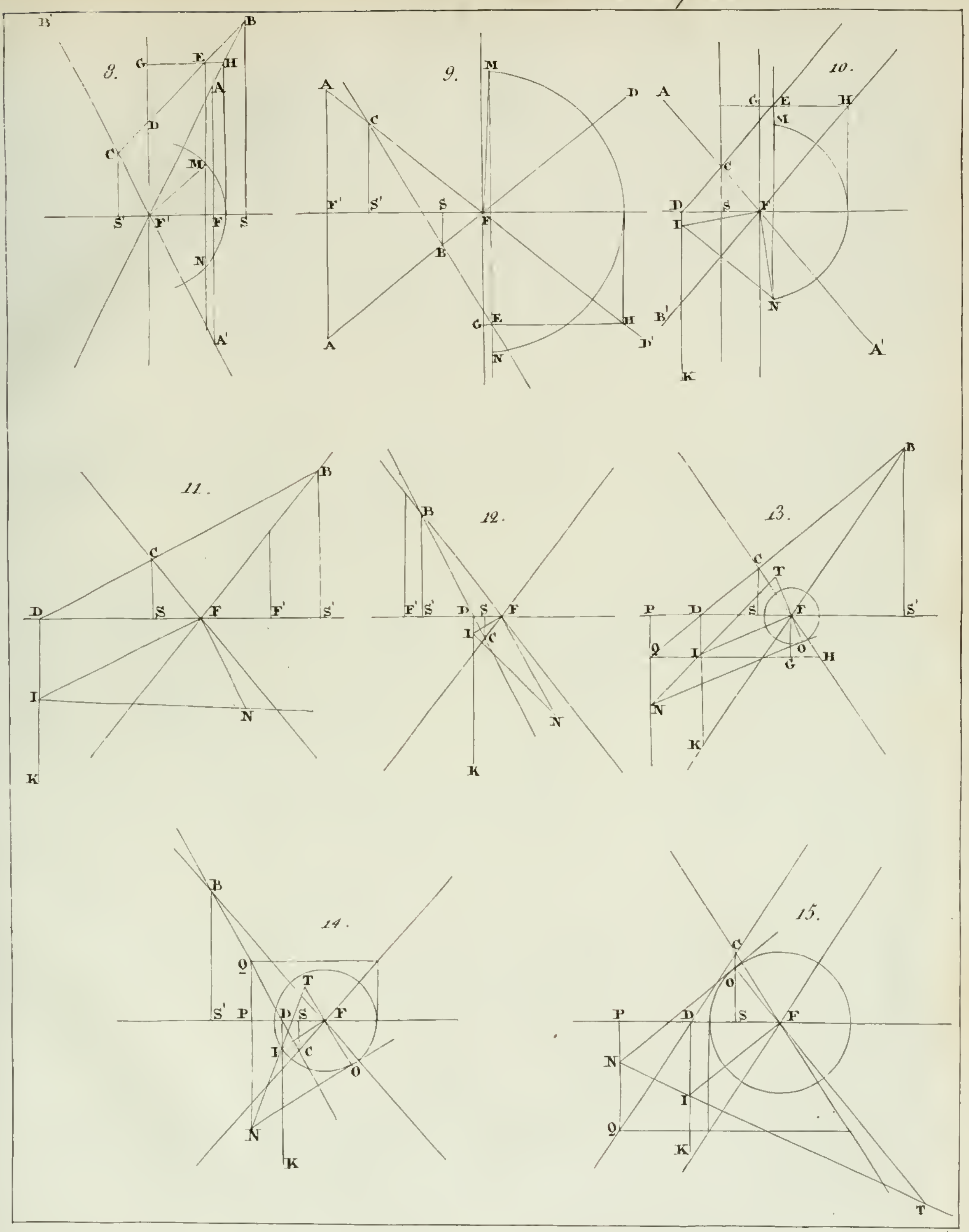


Fig. 1.
C
Z
Y
A
X
N
B
M
D
Fig. 2.
F
f
B
S
A
T
G
t
Fig. 3.
F
f
β
T
G
t
Fig. 4.
a
a'
A
B
Fig. 5.
a'''
a''
α''
α'
a'
b''
α
a
b'
A
c
c'
c''
B


1.
Y
M
C
A
C'
P
X
2.
z
D
B
F
G
H
G
I
S'
A
L
S
X
K
C
Y
E
3.
D
L
B
z
F
H
G
K
E
A
M
4.
G
F
N
E
P
e
A
g
f
n
p
5.
B
C
E
A
F
S
D
G
6.
H
C
E
B
F
A
S
G
D
7.
S
D
K
P
O
M
B
h
g
C
N
E
A
G
H
Q
L
F
R
O
I


8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.

16.

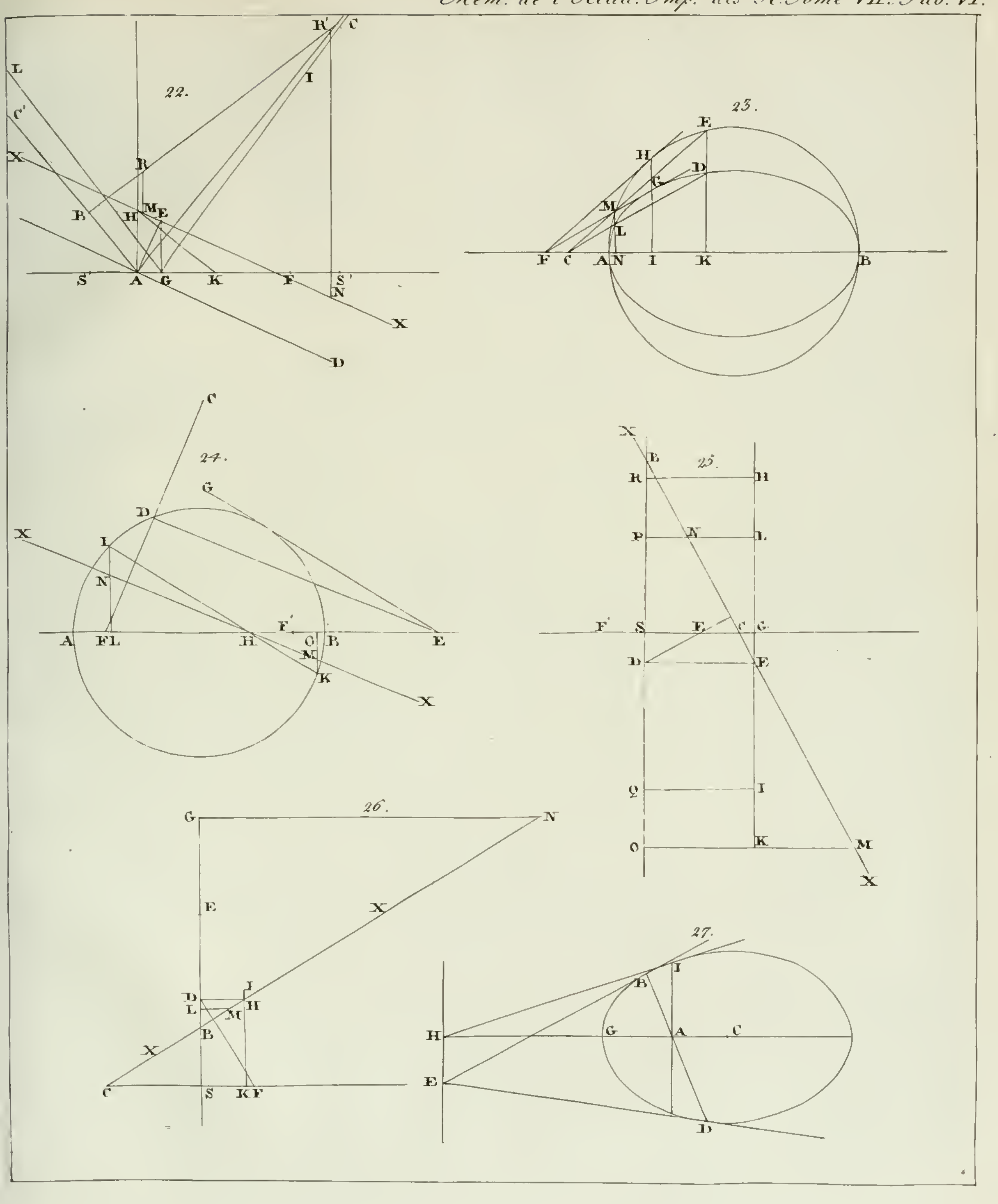
17.

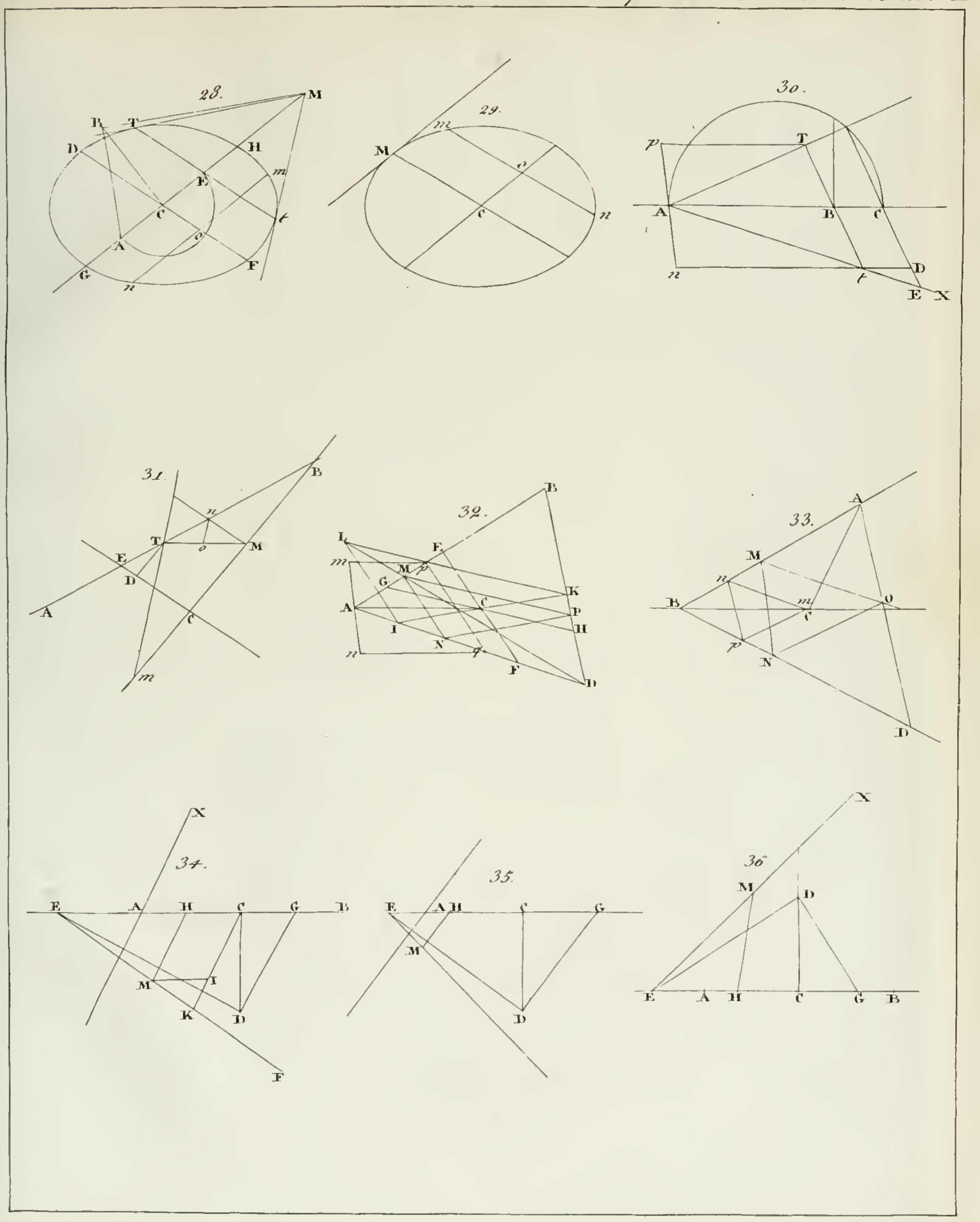
18.

19.

20.

21.


22.
23.
24.
25.
26.
27.

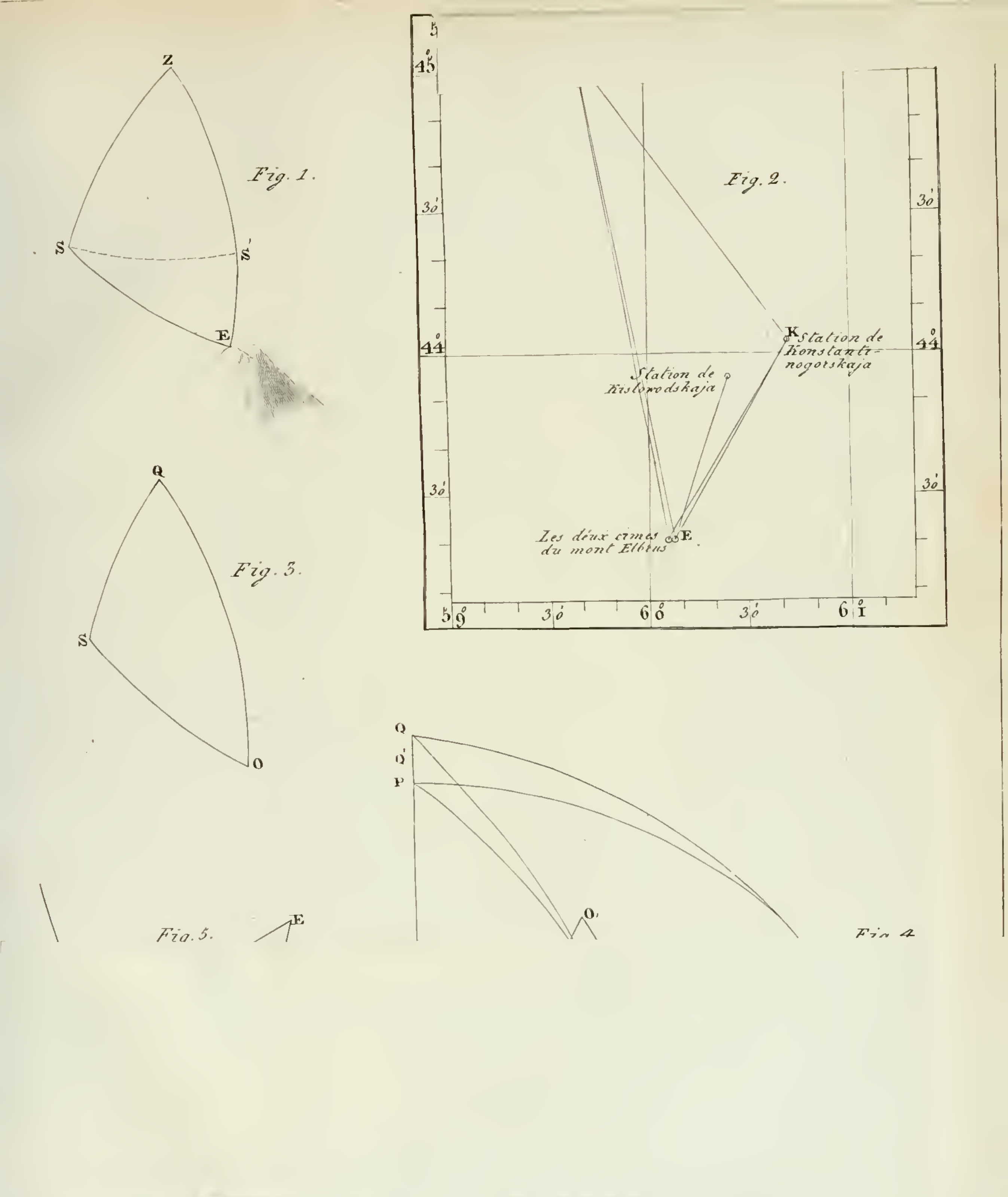

28.
M
B
T
D
H
m
E
C
t
A
o
G
n
F
29.
m
M
o
C
n
30.
p
T
A
B
C
n
t
D
E
X
31.
B
n
T
o
M
E
D
A
C
m
32.
B
E
L
m
M
p
G
K
A
C
P
I
H
N
n
q
F
D
33.
A
M
n
B
m
C
O
p
N
D
34.
X
E
A
H
C
G
B
M
I
K
D
F
35.
E
A
H
C
G
M
D
X
36
M
D
E
A
H
C
G
B

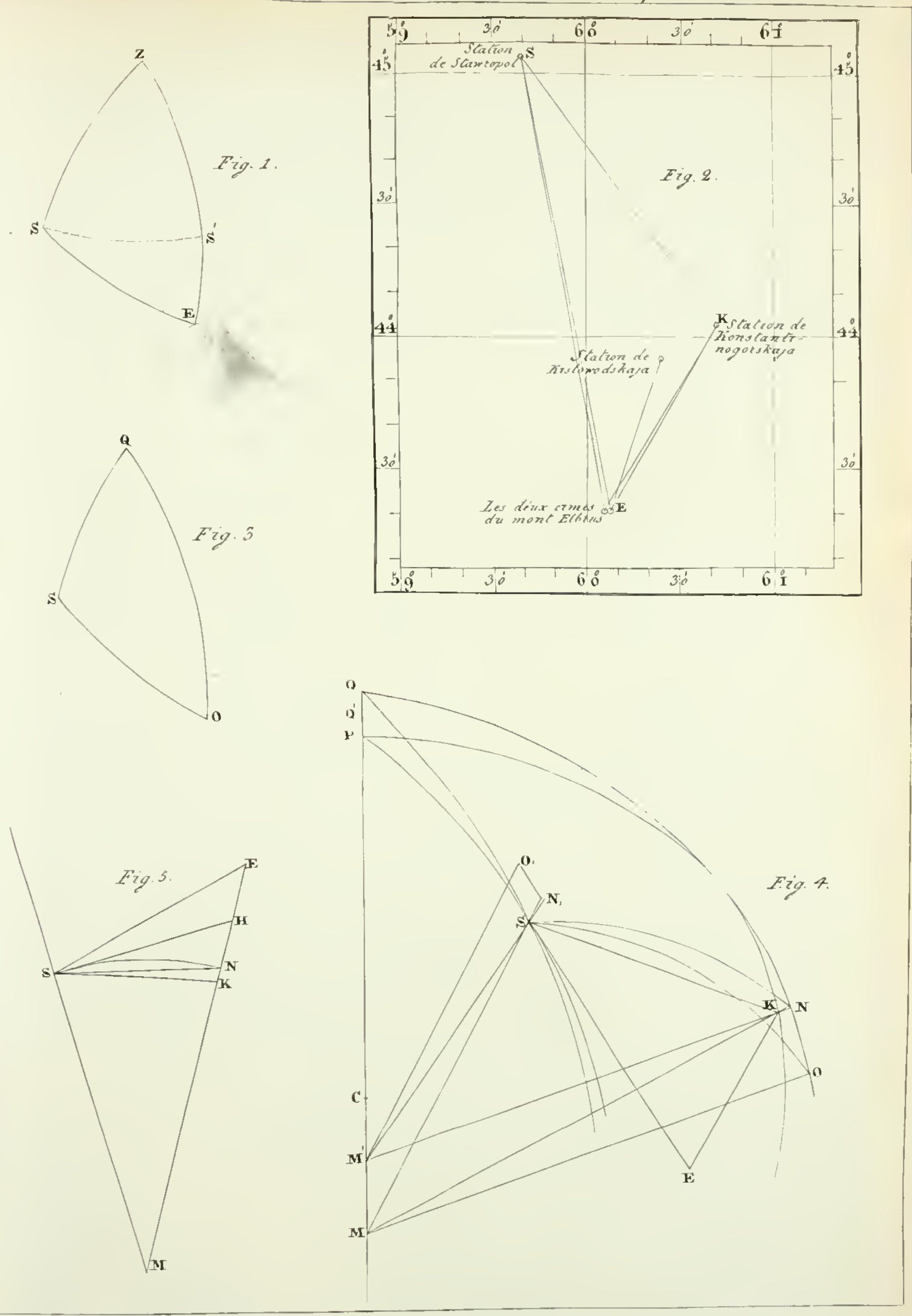
37.

38.

40.

39.


Z
Fig. 1.
S
S'
E
Q
Fig. 3.
S
O
45°
30'
44°
30'
Fig. 2.
30'
44°
30'
K Station de Konstantinogorskaja
Station de Kislowodskaja
Les deux cimes du mont Elbrus
E
59°
30'
60°
30'
61
Q
Q'
P
O
Fig. 5.
E
Fig. 4


Fig. 1.
Z
S
S'
E
Fig. 2.
Station de Stawropol
S
Station de Kislowodskaja
K
Station de Konstantinogorskaja
Les deux cimes du mont Elbrus
E
Fig. 3
Q
S
O
Fig. 5.
E
H
N
K
S
M
Fig. 4.
Q
Q'
P
O'
N'
S
K
N
O
C
M'
M
E

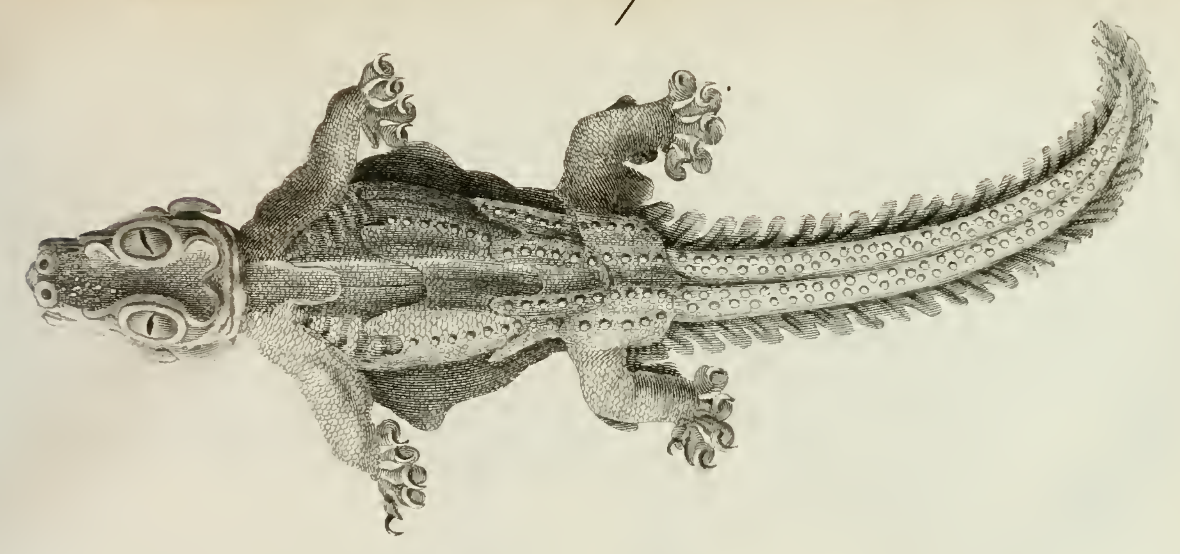


2. 4. 3. 5.

1.

Balistapus capistratus piscium australium novum genus.

Tilesius pinxit



Stellio Fimbriatus Schn. vel Gecko homalocephalus Creveldi

Tilesius pinxit.

9. 2. 10. 11. 12.

4.

3.

ad Diss. cel. Zagorsky.



Gecko vel Stellio argyropis.


a
b
I.
3.
4.
5.
b
a
7.
2.
8.
9.
10.
6.




Julin pinx



URSUS. Brasiliensis



